UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA: UMA APLICAÇÃO DA INTEGRAL DE RIEMANN.

MACAPÁ-AP
2011

DIEGO FLEXA DOS SANTOS
SÂMIA COSTA DE BARROS

TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA: UMA APLICAÇÃO DA INTEGRAL DE RIEMANN.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ-AP
2011

DIEGO FLEXA DOS SANTOS
SÂMIA COSTA DE BARROS

TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA: UMA APLICAÇÃO DA INTEGRAL DE RIEMANN.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

_____

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil - UNIFAP

_____

Prof. Dr. Guzmán Isla Chamilco - UNIFAP

_____

Prof. Dr. Erasmo Senger – UNIFAP

Avaliado em: _____/_____/_____

MACAPÁ-AP
2011

Agradecimentos

Primeiramente agradecemos a Deus, pela inspiração, ensinamento e pela força que nos deu e dá todos os dias, por permitir a realização deste trabalho.

Aos nossos pais por todas as coisas nos deram e fizeram por nos, se não fosse eles jamais conseguiríamos chegar até aqui. Muito obrigada!

Agradecemos em especial ao nosso orientador *Prof. José Walter Cárdenas Sotil* por ter aceitado nos orientar neste trabalho, por respeitar o ritmo de trabalho, e pela confiança em nós depositada. Tem nosso sincero respeito.

Agradecemos a todos os professores do Curso de Licenciatura em Matemática pelas contribuições teóricas e práticas desenvolvidas durante o curso.

Agradecemos aos nossos colegas de graduação pelo apoio e compreensão.

“Mas há uma outra razão que explica a elevada reputação das Matemáticas, é que elas levam as ciências naturais exatas uma certa proporção de segurança que, sem elas, essas ciências não poderiam obter”.

(Albert Einstein)

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso abordamos a Integral definida de Riemann como uma extensão das somas finitas e aplica-la em vários tipos de problemas associados ao trabalho de uma força. São abordados aspectos teóricos da integral definida, como a definição através da integral inferior e superior, onde o supremo e o ínfimo são conceitos de fundamental importância. São considerados teoremas de existência da integral definida e a relação entre a derivada e integral é relacionada pelo teorema do valor médio. Em cada uma das aplicações se define o conceito mais básico do trabalho e logo se generaliza através do conceito de integral definida. São considerados o trabalho de uma força constante, força variável, força peso, força elástica e força de uma transformação de um gás. Conclui-se que a menos dos conceitos da integral de Riemann, o conceito de integral pode ser usado no ensino médio para o ensino de áreas e na física.

Abstract

In this work Completion of course approach the Riemann Integral defined as an extension of finite sums and apply it in all sorts of problems associated with the work of a force. Theoretical Aspects of the definite integral, as defined by the integral lower and upper, where the highest and smallest concepts are of fundamental importance. Existence theorems are considered definite integration and the relationship between the derivative and integral is related to the mean value theorem. In each application we define the most basic concept of work and soon became generalized through the concept of definite integral. They are considered the work of a constant force, variable force, strength, weight, tensile strength and a transformation of a gas. It follows that unless the concepts of the Riemann integral, the concept of integral can be used in high school for teaching areas and physics.

Sumário

1 Introdução..... 10

2 Integral Riemann..... 13

2.1 Partição de um Intervalo..... 13

2.2 Integral Superior e Integral Inferior..... 14

2.3 Integral de Riemann e Somas de Riemann..... 18

2.4 Propriedades da Integral..... 23

2.5 Teorema Fundamental do Cálculo..... 26

3 Trabalho..... 28

3.1 Trabalho de uma Força Constante..... 29

3.1.1 Força Paralela ao Deslocamento..... 29

3.1.2 Força Não Paralela ao Deslocamento..... 32

3.2 Trabalho de uma Força Variável..... 33

3.3 Trabalho da Força Peso..... 35

3.4 Trabalho da Força Elástica..... 38

3.4.1 Lei de Hooke..... 38

3.4.2 Calculando o Trabalho..... 39

3.4.3 Regras dos Sinais..... 40

3.5 Trabalho Realizado Por um Gás..... 42

Considerações Finais..... 45

Referencias Bibliográficas..... 46

Lista de Figuras

1.1 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)..... 10
2.1 Área indicada representa a soma superior (a), área indicada representa a soma inferior (b)..... 15
2.2 Representação da soma das áreas dos retângulos sob a curva..... 18
3.1 Representação de uma força paralela ao deslocamento..... 29
3.2 Representação de uma força constante paralela aos pequenos deslocamentos..... 29
3.3 Trabalho motor..... 31
3.4 Trabalho resistente..... 31
3.5 Representa um força não-paralela ao deslocamento..... 32
3.6 Representa uma força que varia ao longo dos pequenos deslocamentos..... 34
3.7 Representa um corpo em queda livre sob a ação da força peso..... 35
3.8 A trajetória do corpo lançado obliquamente para a resolução de exemplo3.3 37
3.9 Representa uma mola sendo esticada por uma força..... 38
3.10 Representa uma mola sendo esticada de sua posição natura 0 até x_2 passando por x_1..... 39
3.11 Representação gráfica da força elástica..... 39
3.12 Representa uma simulação para a regra dos sinais no cálculo do trabalho..... 41
3.13 Representa uma Transformação isobárica de um gás, provocando uma variação do seu volume..... 42

Capítulo 1

Introdução

Descreveremos a vida e obra de Georg Friedrich Bernhard Riemann, foi um dos matemáticos alemães mais influentes do século XIX.

*Figura 1.1: Georg Friedrich Bernhard Riemann (**1826-1866**)*

Georg Friedrich Bernhard Riemann, filho de um pastor luterano, foi educado em condições modestas. Era uma pessoa tímida e fisicamente frágil. Com boa instrução em Berlim e depois em Gottingen, obteve seu doutoramento com uma tese sobre teoria das funções de variáveis complexas, onde aparecem as equações denominadas de Cauchy-Riemann, embora ela fossem conhecidas por Euler e D'Alembert. Neste trabalho já estabelece o conceito de superfície de Riemann que desempenharia papel fundamental em Análise.

Riemann foi nomeado professor na Universidade de Gottingen em 1854, apresentou um trabalho perante o corpo docente e que resultou na mais celebre conferência da história da

Matemática. Nele estava uma ampla e profunda visão da Geometria e seus fundamentos que até então permanecia marginalizada.

Ao contrário de Euclides e em sentido mais amplo do que Lobachevsky, observou que seria necessário tratar-se de pontos, ou de retas, ou do espaço não no sentido comum, mas como uma coleção de n-uplas que são combinadas segundo certas regras, uma das quais, a de achar distância entre dois pontos infinitamente próximos.

Para Riemann, o plano e uma superfície de uma esfera e reta, o círculo máximo sobre a esfera. Com os estudos de espaços métricos em geral com curvatura, tornou-se possível a teoria da relatividade, contribuindo assim para o desenvolvimento da Física.

Riemann conseguiu muitos teoremas em Teoria dos Números, relacionando-os com Análise, onde encontramos também a equação de Cauchy-Riernann que e uma concepção intuitiva e geométrica da Análise, em contraste com a aritmetização de Weierstrass.

Por volta de 1854, realizou um estudo bem mais aprofundado sobre a integral e em sua homenagem a integral estudada por ele passou a receber o nome de Integral de Riemann. Tal nome serve para distinguir essa integral de outras que foram introduzidas mais tarde, como por exemplo, a Integral de Lebesgue. A forma usada para introduzir o conceito de Integral de Riemann nos cursos de Cálculo e a versão devida a Cauchy. O que justifica isto e que, ela e simples e bastante acessível aos alunos de um curso de inicial de Cálculo, além de atender aos propósitos de um curso desta natureza.

Nos cursos de Análise Matemática apresenta-se uma versão mais refinada, a Integral de Darboux-Riemann, usando os conceitos de soma inferior, soma superior, integral inferior e integral superior, que correspondem ao método de exaustão usando, respectivamente, poligonos inscritos e polígonos circunscritos.

Mas, para que ninguém alimente idéias equivocadas, observamos que as diversas definições da Integral de Riemann mencionadas são equivalentes e a diferença entre elas se situa na adequação das definições para a obtenção das propriedades da referida Integral.

Em 1859, Riemann foi nomeado sucessor de Dirichlet na cadeira de Gottingen já ocupada por Euler. Com seu estado de saúde sempre precário, acabou por morrer em 1866 em conseqüência de uma tuberculose.

No capitulo 1, iniciamos com uma breve biografia de Riemann, e, em seguida no capitulo 2, com as noções necessárias para a definição de integral através das somas de Riemann. E alguns teoremas e definições que ajudaram a intende melhor o conceito de integral. Como por exemplo o Teorema Fundamental do Cálculo. A seguir, no capítulo 3 veremos como definir trabalho e como calculá-lo em diferentes situações envolvendo forças constantes como a Força Peso, Força de uma Transformação de um Gás. Embora já saibamos como resolver problemas para os quais as forças sejam constantes, ainda assim o conceito de trabalho é útil para resolver tais problemas. Mais adiantes, veremos como aplicar esses conceitos a problemas em que essas forças não são constantes, ou seja, forças variáveis tais como Força Elástica.

O objetivo deste trabalho é demonstrar como o Trabalho de uma Força, seja ela qual for, pode ser determinado através de uma Integral de Riemann.

Capítulo 2

Integral de Riemann

Neste capítulo introduziremos o conceito de *integral de Riemann*. A integral tem muitas aplicações tanto na geometria como na física, e é na física com o cálculo do trabalho que aplicaremos a integral de Riemann, como veremos no próximo capítulo.

2.1 Partição de um intervalo

Definição2.1.1: Seja [a, b] um intervalo, com b > a. Uma partição P de um intervalo [a, b] é um conjunto finito $P = \{x_0,\ x_1, \dots, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Uma partição P de [a, b] dividi [a, b] em *n* intervalos $[x_{j-1},\ x_j],\ j = 1, 2, \dots, n$.

A amplitude do intervalo $[x_{j-1},\ x_j]$ será indicada por $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$. Assim:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1$$

Os números $\Delta x_1,\ \Delta x_2$,..., Δx_n não são necessariamente iguais; o maior deles denominamos amplitude da partição P e indicamos por $máx\ \Delta x_j$.

Uma partição $P = \{\ x_0,\ x_1, \dots, x_n\}$ de [a, b] será indicada simplesmente por

$$P:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

2.2 Integral Superior e Integral Inferior

Seja f: [a, b] uma função em um intervalo fechado [a, b], e limitada nesse intervalo. Uma função é limitada se existirem números reais m, M tais que m $\leq f(x) \leq$ M, para todo x $\in$ [a,b], ou seja, que os valores $f(x)$ pertencem todos ao intervalo compacto [m, M].

O menor e o maior valor de $f(x)$, no intervalo[a, b], é dado por:

m = inf {f(x); x ∈ [a, b]} e *M = sup {f(x); x ∈ [a, b]}.*

Uma partição *P* do intervalo [a, b] é um conjunto finito de pontos de [a, b]:

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\,.$$

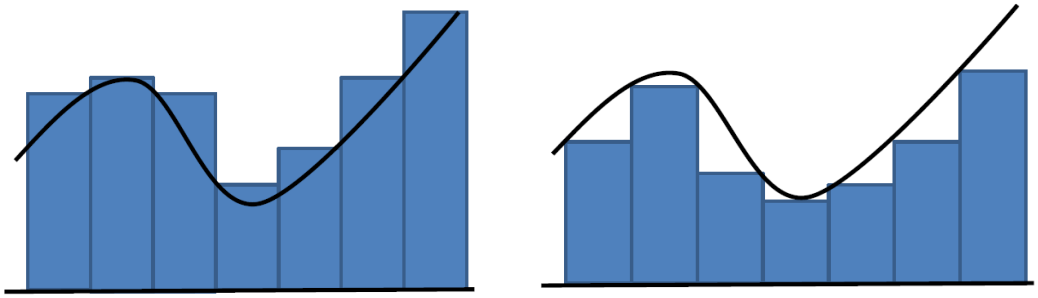
Dadas uma função f e uma partição P, definimos as chamadas somas de *Darboux-Riemann, soma superior* $S(f,P)$*e a soma inferior* $s(f,P)$. pelas expressões:

$$S(f,P) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}),$$

$$s(f,P) = \sum_{j=1}^{n} m_j\left(x_j - x_{j-1}\right),$$

onde $M_j = \sup\{f(x): x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ e $m_j = \inf\{f(x): x \in [x_{j-1}, x_j]\}$. Esses sup`s e inf"s são finitos, uma vez que a função f é limitada. De fato, $m \leq m_j \leq M_j \leq M$. É claro que, para qualquer partição *P*, tem-se

$$s(f,P) \leq S(f,P). \qquad (2.1)$$



(a) (b)

Figura 2.1: Área indicada representa a soma superior (a), área indicada representa a soma inferior (b).

Quando f é uma função positiva, as somas s(f, P) e S(f, P) podem ser interpretadas como áreas de polígonos, um inscrito e outro circunscrito ao gráfico f, respectivamente, e portanto como valores aproximados (por falta e por excesso) da área compreendida entre esse gráfico e o eixo das abscissas.

Definição 2.2.1: Sejam P_1 e P_2 duas partições do intervalo [a, b]. P_2 é um refinamento de P_1 se o conjunto dos pontos que formam P_2 contiver o conjunto dos pontos de P_1.

Exemplo 2.2.1: Seja P_1 uma partição dada: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. A partição P_2, formada por esses pontos e mais os pontos médios dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$, para j =1,..., n, é um refinamento de P_1.

Exemplo 2.2.2: Sejam $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ e $P_2 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = b\}$ duas partições dadas. A partição P_3, formada pela união dos pontos de P_1 e P_2, é um refinamento de P_1, bem como de P_2.

Teorema 2.1: *Sejam P_1 e P_2 duas partições do intervalo [a, b], com P_2 sendo um refinamento de P_1. Então,*

$$S(f, P_2) \leq S(f, P_1) \tag{2.2}$$

$$s(f, P_2) \geq s(f, P_1) \tag{2.3}$$

Demonstração:

Seja $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. A partição P_2 contém os mesmos pontos e mais pontos adicionais nos subintervalos aberto (x_{j-1}, x_j). Podemos construir uma sucessão finita de partições, a primeira sendo P_1, a última sendo P_2, e cada partição a partir da segunda é um refinamento do anterior pela adição de apenas um ponto. Portanto, basta provar o teorema para o caso em que $P_2 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{j-1} < t < x_j < \cdots < x_n = b\}$ contém apenas um ponto a mais que P_1. Então,

$$\sup\{f(x): x_{j-1} \le x \le x_j\} \ge \begin{cases} \sup\{f(x): x_{j-1} \le x \le t\} = M_{j,1} \\ \sup\{f(x): t \le x \le x_j = M_{j,2} \end{cases}$$

e

$$\inf\{f(x): x_{j-1} \le x \le x_j\} \le \begin{cases} \inf\{f(x): x_{j-1} \le x \le t\} = m_{j,1} \\ \inf\{f(x): t \le x \le x_j = m_{j,2} \end{cases}$$

obtemos

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \ge M_{j,1}(t - x_{j-1}) + M_{j,2}(x_j - t)$$

$$m_j(x_j - x_{j-1}) \le m_{j,1}(t - x_{j-1}) + m_{j,2}(x_j - t).$$

Daí se seguem as desigualdades (2.2) e (2.3) que queríamos provar.

Teorema 2.2: *Sejam P_1 e P_2 duas partições quaisquer de [a, b]. Então,*

$$s(f, P_1) \le S(f, P_2). \tag{2.4}$$

Demonstração:

Seja P a partição obtida pela a união dos pontos de P_1 com os pontos de P_2. Como P é um refinamento de P_1, a desigualdade (2.3) nos dá

$$s(f, P_1) \le s(f, P). \tag{2.5}$$

Como P é um refinamento de P_2, temos pela desigualdade (2.2):

$$S(f,P) \leq S(f,P_2). \tag{2.6}$$

Logo, a desigualdade (2.4) decorre de (2.1), (2.5) e (2.6).

O *Teorema 2.2,* segundo (FIGUEIREDO, pag 122) através da desigualdade (2.4), diz que as somas inferiores são limitadas superiormente, pois qualquer S(f, P) é um cota superior. Analogamente, as somas superiores são limitadas inferiormente. Portanto, o conjunto das somas inferiores tem um supremo, e o conjunto das somas superiores tem um ínfimo.

Definição 2.2.2: Seja $f: [a,b] \to R$ uma função real limitada em [a, b]. A integral superior, que se designa por $\overline{\int_a^b f}$, é o ínfimo das somas superiores. Em símbolos:

$$\overline{\int_a^b f} = \inf\{S(f,P): P \in \mathscr{P}\},$$

Onde $\mathscr{P}$ representa o conjunto de todas as partições de [a, b]. A integral inferior, que se designa por $\underline{\int_a^b f}$, é o supremo das somas inferiores. Em símbolos:

$$\underline{\int_a^b f} = \sup\{s(f,P): P \in \mathscr{P}\}.$$

Decorre do *Teorema 2.2* que

$$\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f} \tag{2.7}$$

Definição 2.2.3: Uma função limitada $f: [a,b] \to R$ é integrável se, e somente se,

$$\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}.$$

O valor comum das integrais superior e inferior é chamada a integral de f, que se designa por $\int_a^b f$. Usa-se, também, a notação $\int_a^b f(x)dx$. Portanto, se f é integrável, temos

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}.$$

2.3 Integral de Riemann e Somas de Riemann

Definição 2.3.1 Seja f: $[a, b] \rightarrow$ R limitada não negativa, isto e, $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$ e tomemos uma partição: $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, do intervalo $[a, b]$ que tenha todos os n subintervalos com o mesmo comprimento $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$.

Tomaremos apenas os primeiros pontos da partição e faremos uma analise geométrica da curva no subintervalo $[x_0, x_1]$ (veja Figura 2.2). Para os outros subintervalos ocorre uma situação similar. A área sob a curva no intervalo $[x_0, x_1]$ pode ser obtida através da área S_1 do retângulo cuja base mede $\Delta x = x_1 - x_0$ e a altura e a linha tracejada cuja medida e dada por $f(c_1)$ onde c_1 é um ponto em $[x_0, x_1]$.

Figura 2.2*: Representação da soma das áreas dos retângulos sob a curva.*

Existe uma compensação da área "branca" que fica acima da curva e dentro do retângulo que fica abaixo da curva e fora do retângulo. Em cada subintervalo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$

desta partição tomamos um ponto genérico qualquer c_j e formamos *n* retângulos, todos com as bases de medida Δx e alturas dadas por:

$$f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n) \qquad (2.8)$$

Se a partição tem *n* subintervalos, denotamos por S_n a soma das áreas dos *n* retângulos:

$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \ldots + f(c_n)\Delta x = \sum_{j=1}^{n} f(c_j).\Delta x \qquad (2.9)$$

sendo a soma realizada sobre todos os j = 1, ... , *n*. Se essas somas forem calculadas para todos os valores de *n*, formaremos uma sequência:

$$\{S_1, S_2, ..., S_n, ...\} \qquad (2.10)$$

Se esta seqüência numérica $\{S_n\}$ e convergente para um numero real bem definido, diz-se que *f* e integrável no intervalo [*a*, *b*], e o valor do limite desta seqüência e denotado por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x \qquad (2.11)$$

A expressão da esquerda é a integral de *f* entre os limitantes de integração *a* e *b* e a expressão da direita e o limite da seqüência de somas parciais S_n.

A integral definida por (2.11) é denominada Integral de Riemann e as somas

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x \qquad (2.12)$$

são chamadas de *Somas de Riemann*.

Veremos agora como a integral de uma função num intervalo [a, b] pode ser interpretada como limite de uma soma, chamada soma de Riemann. Para isso seja $P =$

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de [a, b] e $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ um conjunto de *n* pontos tais que $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$. A soma de Riemann da função f referente a partição P e aos pontos c_j de C é definida pela expressão

$$\sigma\,(f, P, C) = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j.$$

Para simplificar, escreveremos $\sigma = (f, P)$ invés de $\sigma = (f, P, c)$.

Mostraremos, no caso em que f é integrável, que essa soma tende a integral da função quando o maior dos comprimentos Δx_j tende a zero, independentemente da maneira como os pontos c_j são escolhidos nos sub-intervalos $[x_{j-1}, x_j]$.

Vamos definir norma da partição P ao maior dos números Δx_j, j variando de 1 a n. Indicaremos a norma de P com o símbolo $|P|$.

Lema (de Darboux) 2.1. *Seja I e J, respectivamente, as integrais inferior e superior de f num intervalo [a, b]. Essas integrais são os limites de s(f, P) e S(f, P), respectivamente, com $|P| \to 0$. Em outras palavras, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|P| < \delta \;\to I - \varepsilon < s(f, P) \leq I \leq j \leq S(f, P) < J + \varepsilon. \qquad (2.13)$$

Demonstração:

Comecemos por demonstrar que quando incluímos um ponto x' numa partição P de [a, b], obtemos uma nova partição P', tal que

$$s(f, P) - S(f, P') \leq 2C|P|,$$

onde C é o supremo de $|f(x)|$ em [a, b]. Observe que o ponto x' cairá no interior de um sub-intervalo de P, digamos, o j-ésimo deles. Sejam M'_j e M''_j os supremos de f nos sub-intervalos $[x_{j-1}, x']$ e $[x', x_j]$ respectivamente.

$$\begin{aligned} S(f, P) - S(f, P') &= M_j(x_j - x_{j-1}) - M'_j(x' - x_{j-1}) - M''_j(x_j - x') \\ &= (M_j - M'_j)(x' - x_{j-1}) + (M_j - M''_j)(x_j - x'). \end{aligned}$$

Esta ultima expressão é majorada por

$$2C\left(x' - x_{j-1}\right) + 2C\left(x_j - x'\right) = 2C(x_j - x_{j-1}) \leq 2C|P|$$

Se P' é um refinamento de P que contém *n* pontos a mais do que P, podemos passar de P a P' introduzindo $(n-1)$ partições intermediárias, $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, a primeira obtida de P pelo acréscimo de um ponto, a segunda obtida da primeira pelo acréscimo de mais um ponto, e assim por diante até chegar a P' obtida de P_{n-1} pelo acréscimo do n-ésimo ponto. Agora é só observar que

$$S(f,P) - S(f,P') = S(f,P) - S(f,P_1)$$

$$+S(f,P_1) - S(f,P_2) + \cdots + S\left(f,P_{(n-1)}\right) - S(f,P'),$$

Para obtemos:

$$S(f,P) - S(f,P') \leq 2nC|P|.$$

Passemos á demonstração do lema 2.1 propriamente dito por (ÁVILA, pag 156) . Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tal que

$$S(f,P_0) < J + \varepsilon/2. \tag{2.14}$$

Seja $\delta > 0$ um número a ser determinado; e seja P uma partição qualquer com $|P| < \delta$. A partição $P' = P_0 \cup P$ é obtida de P pelo acréscimo de no máximo $n-1$ pontos, ou seja, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Em consequência, com $n-1$ em lugar de n, donde

$$S(f,P) - S(f,P') \leq 2(n-1)C\delta.$$

Portanto, tomando $\delta < \frac{\varepsilon}{4(n-1)C}$, teremos

$$S(f,P) < S(f,P') + \varepsilon/2 \leq S(f,P_0) + \varepsilon/2.$$

De (2.14) obtemos a desigualdade da direita em (2.13).

A demonstração de que $I - \varepsilon < s(f,P)$ é inteiramente análoga.

Teorema 2.3: *Se f é uma função integrável no intervalo [a, b] sua integral nesse intervalo é o limite das somas de Riemann $\sigma(f,P)$ com $|P|$ tendendo a zero, isto é,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j, \tag{2.15}$$

Independentemente da escolha dos c_j nos sub-intervalos $[x_{j-1},\ x_j]$.

Demonstração:

Qualquer que seja $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$, valem as desigualdade $m_j \leq f(c_j) \leq M_j$, de sorte que

$$s(f,P) \leq \sigma(f,P) \leq S(f,P);$$

Pelo lema anterior, combinado com o fato de que f é integrável, $s(f,P)$ e $S(f,P)$ têm o mesmo limite $I = J = \int_a^b f$ com $|P| \to 0$; $\sigma(f,P)$ também tem o mesmo limite, ou seja, vale a igualdade (2.15), como queríamos provar.

Teorema 2.4: *Se f é contínua em [a, b], então f é integrável [a, b].*

Demonstração:

Sabemos que f é limitada em [a, b]. Mostraremos que f é integrável.

Dado $\varepsilon > 0$, usando que f é uniformemente contínua em [a, b], existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y\ \in [a,b] \text{ e } |x-y| <\ \delta\ \to |f(x)-f(y)| < \varepsilon. \tag{2.16}$$

Seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de [a, b] tal que $\Delta x_j = x_j - x_{j-1} < \delta$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Definindo,

$m_j = \inf\left(f(I_j)\right)$ e $M_j = \sup\left(f(I_j)\right)$, de (2.16), obtemos

$$(M_j - m_j)\Delta x_j \leq \varepsilon\ \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j = \varepsilon(b-a).$$

2.4 Propriedades da Integral

Teorema 2.5: *Sejam f, g integráveis em [a, b] e k uma constante. Então:*

a) f+g é integrável em [a, b] é $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

b) kf é integrável em [a, b] e $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

c) Se f(x) ≥ 0 em [a, b], então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

d) Se c ∈ $]a,b[$ *e f é integrável em [a, c] e em [c, b] então*

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Demonstração:

a) Para toda partição P de [a, b] e qualquer que seja a escolha de c_j em $[x_{j-1}, x_j]$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}[f(c_j)+g(c_j)]\Delta x_j - [\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx]\right|$$

$$\leq \left|\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j - \int_a^b f(x)dx\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} g(c_j)\Delta x_j - \int_a^b g(x)dx\right|$$

Da integrabilidade de f e g segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\left|\sum_{j=1}^{n} g(c_j)\Delta x_j - \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para toda partição P de [a, b] com $máx\ \Delta x_j < \delta$, logo,

$$\left|\sum_{j=1}^{n}[f(c_j)+g(c_j)]\Delta x_j - \left[\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right]\right| < \varepsilon$$

Para toda partição P de [a, b] com $máx\ \Delta x_j < \delta$. Assim,

$$\lim_{máx\ \Delta x_j \to 0}\sum_{j=1}^{n}[f(c_j)+g(c_j)]\Delta x_j = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Ou seja, f + g é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)dx$$

b) Como f é integrável em [a, b], existe o

$$\lim_{máx\Delta x_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j,$$

e portanto, podemos escrever

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{máx\Delta x_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j$$

$$= k \lim_{máx\Delta x_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j$$

$$= k \int_a^b f(x)dx.$$

c) Como $f(x) \geq 0$ em [a, b] para toda partição de [a, b] e qualquer que seja a escolha dos C_j

$$\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j \geq 0.$$

Se tivéssemos $\int_a^b f(x)dx < 0$, tomando-se $\varepsilon > 0$, existiria um $\delta > 0$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \varepsilon < \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$$

Para toda partição P de [a, b] com $máx\ \Delta x_j < \delta$. Assim, para alguma partição P teríamos

$$\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j < 0.$$

Que é uma contradição.

d) Para toda partição P de [a, b], com c ∈ P, temos

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j - \left[\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right]\right|$$

$$\leq \left|\sum_{j=1}^{m} f(c_j)\Delta x_j - \int_a^c f(x)dx\right| + \left|\sum_{j=m+1}^{n} f(c_j)\Delta x_j - \int_c^b f(x)dx\right|.$$

Como, por hipótese, f é integrável em [a, c] e em [c, b], dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda partição P de [a, b] com c $\in P$e $máx\ \Delta x_j < \delta$

$$\left|\sum_{j=1}^{m} f(c_j)\Delta x_j - \int_a^c f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\left|\sum_{j=m}^{n} f(c_j)\Delta x_j - \int_c^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, portanto,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j - \left[\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right]\right| < \varepsilon.$$

Segue, então, da integrabilidade de f em [a, b] que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

2.5 Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for continua em [a, b] e F for uma antiderivada de f em [a, b], então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2.17)$$

Demonstração:

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ pontos quaisquer em [a, b], tais que

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

Esses pontos dividem [a, b] em *n* subintervalos

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b] \qquad (2.18)$$

cujo, comprimento, como antes, denotaremos por

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$$

Por hipótese, $F'(x) = f(x)$ para todo *x* em [a, b]; logo, F satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio em cada subintervalos em (2.18). Portanto, podemos encontrar pontos $c_1, c_2, \dots, c_n$ nos respectivos subintervalos em (2.18), tais que

$$F(x_1) - F(a) = F'(c_1)(x_1 - a) = f(c_1)\Delta x_1$$

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c_2)(x_2 - x_1) = f(c_2)\Delta x_2$$

$$F(x_3) - F(x_2) = F'(c_3)(x_3 - x_2) = f(c_3)\Delta x_3$$

$$\vdots$$

$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(c_n)(b - x_{n-1}) = f(c_n)\Delta x_n$$

Somando as equações precedentes, obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j \tag{2.19}$$

Vamos agora aumentar *n* de tal forma que $máx\ \Delta x_j \to 0$. Como se supõe *f* contínua, o lado direito de (2.19)tende a $\int_a^b f(x)dx$. Porém, o lado esquerdo de (2.19) é independente de *n*; ou seja, o lado esquerdo de (2.19) permanece Constante quando *n* aumenta. Assim,

$$F(b) - F(a) = \lim_{máx\Delta x_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j = \int_a^b f(x)dx$$

Capítulo 3

Trabalho

É comum ouvirmos frases do tipo “o trabalho deste operário é muito difícil” ou “vou levar 12 horas para concluir este trabalho ”. Nestas frases há o termo trabalho, que também é empregado em Física, mas com um significado muito diferente do anterior.

Em Física, trabalho está associado a forças, e não a corpos: diz-se “trabalho de uma força” e nunca “trabalho de um corpo”.

Quando você aumenta a velocidade de um objeto aplicando a ele uma força, a energia cinética do objeto aplicando a ele uma força, a energia cinética do objeto diminui. Explicamos essas variações da energia cinética dizendo que a força que você aplicou transferiu energia de você para o objeto ou do objeto para você. Nas transferências de energias através de uma força, dizemos que um trabalho W é realizado pela força sobre o objeto.

Definimos o trabalho da seguinte forma:

Trabalho W é a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto. Quando a energia é transferida para o objeto, o trabalho é positivo; quando a energia é transferida do objeto, o trabalho é negativo.

“Trabalho”, portanto, é energia transferida; “realizar trabalho” é o ato de transferir energia. O trabalho tem a mesma unidade que a energia e é uma grandeza escalar.

O termo transferência pode ser enganador. Ele não significa que um objeto material entre ou saia do objeto; a transferência não é como um fluxo de água. Ela se parece mais com a transferência eletrônica de dinheiro em duas contas bancárias: o valor de uma das contas aumenta, enquanto o valor da outra conta diminui, mas nenhum objeto é transferido de uma conta para a outra.

Note que não estamos usando a palavra “trabalho” no sentido coloquial, segundo o qual qualquer esforço físico ou mental representa trabalho. Assim, por exemplo, se você faz força contra uma parede você se cansa por causa das contrações musculares repetidas e esta, no sentido coloquial, realizando um trabalho. Entretanto, como esse esforço não produz uma transferência de energia para a parede ou da parede, o trabalho, de acordo com nossa definição, é nulo.

3.1 Trabalho de uma Força Constante

3.1.1 Força Paralela ao Deslocamento

Consideremos um corpo que se move em trajetória retilínea (eixo x), efetuando um deslocamento $\vec{d}$ de um ponto a até um ponto b. Seja $\vec{F}$ uma força paralela ao deslocamento que atua no corpo e supondo que essa força seja constante. Veja a figura 3.1:

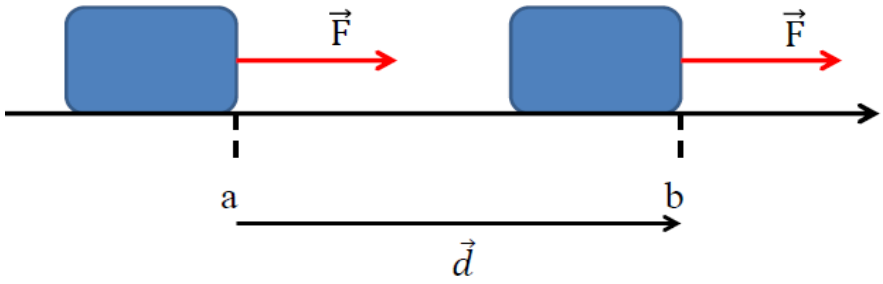


Figura 3.1: Representação de uma força paralela ao deslocamento

Definimos o Trabalho W da força $\vec{F} = F\vec{\imath}$ em um deslocamento $\vec{d}$ = d$\vec{\imath} = (b - a)\vec{\imath}$ como sendo

$$W = \vec{F}.\vec{d} \tag{3.1}$$

Em termos vetoriais temos, $W = \vec{F}.\vec{d}$, isto é, W é o produto escalar de $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

Em termos de Integrais, vamos considerar deslocamentos infinitesimais Δx igualmente espaçados, conforme a figura 3.2:

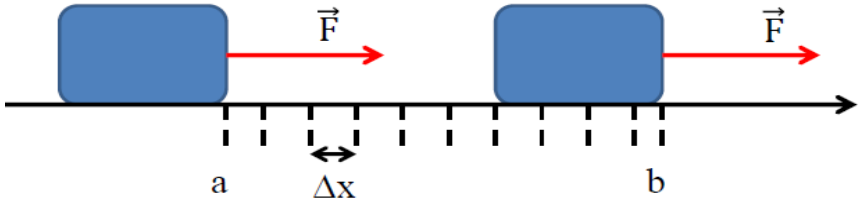


Figura 3.2: Representação de uma força constante paralela aos pequenos deslocamentos

Da definição de Trabalho, temos

$$\Delta W = F.\Delta x \tag{3.2}$$

Integrando (3.2) nos limitantes a e b, vem

$$\int_a^b dW = F \int_a^b dx$$

$$W|_a^b = F.x|_a^b$$

$$W(b) - W(a) = F.(b - a) \tag{3.3}$$

Note que W(a) = 0, pois o corpo está em repouso e como consequência não produz Trabalho (W = 0). Portanto, de (3.3) obtemos a expressão (3.1)

$$W = F.(b - a) = \vec{F}.\vec{d}$$

No Sistema Internacional (SI) de Unidades, a unidade de Trabalho é o *Joule,* cujo símbolo é *J***.** da equação (3.1), segue que

Unidade de W = (unidade de F). (unidade de d)

$$1\ J = 1\ N\ .\ 1\ m$$

$$J = N\ .\ m$$

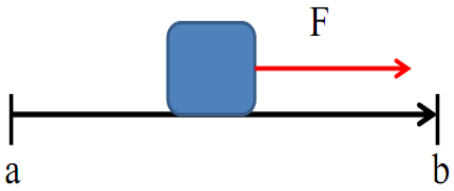
É importante entender que o trabalho é uma grandeza escalar, embora seja obtido a partir do cálculo do produto escalar de duas grandezas vetoriais (a força e o deslocamento).

A unidade SI de trabalho é o joule (abreviada pela letra J e pronunciada como ‘jaule’, nome dado em homenagem ao físico inglês do século XIX James P. Joule). Vemos que, em

qualquer sistema de unidades, a unidade de trabalho é dada pela unidade de força multiplicada pela unidade de deslocamento. A unidade SI de força é o newton e a unidade de deslocamento é o metro, de modo que a unidade de trabalho joule é equivalente a um (N.m):

1 Joule = (1 newton)(1 metro) ou 1J = 1N.m.

Quando a força favorece o deslocamento, seu trabalho é positivo (W > 0) e denominado *Trabalho motor* (Ver figura 3.3). Quando a força se opõe ao deslocamento, seu trabalho é negativo (W < 0) e denominado *Trabalho resistente* (Ver figura 3.4).



Figuras 3.3 Trabalho motor.

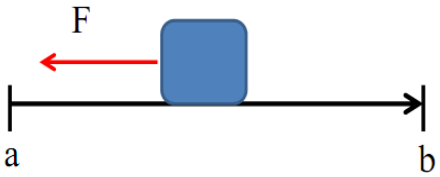
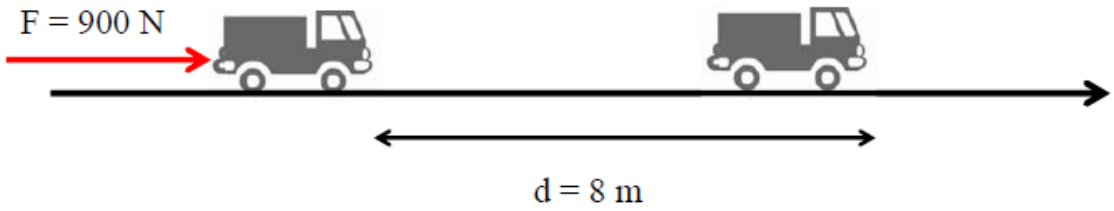


Figura 3.4 Trabalho resistente.

Exemplo 3.1 Qual o Trabalho realizado para empurrar um carro a uma distância de 8 m exercendo uma força constante de 900 N ?

Solução 1:



Utilizando a equação (3.1), vem

W = (900 N).(8 m)

W = 720 J

Solução 2:

Por integração, temos

$$W = 900 \int_0^8 dx$$

$$W = 900.(8 - 0)$$

$$\mathbf{W = 720\ J}$$

3.1.2 Força não-paralela ao Deslocamento

Vamos estender o conceito anterior para o caso de uma força $\vec{F}$ constante não-paralela ao deslocamento d (ver figura 3.5).

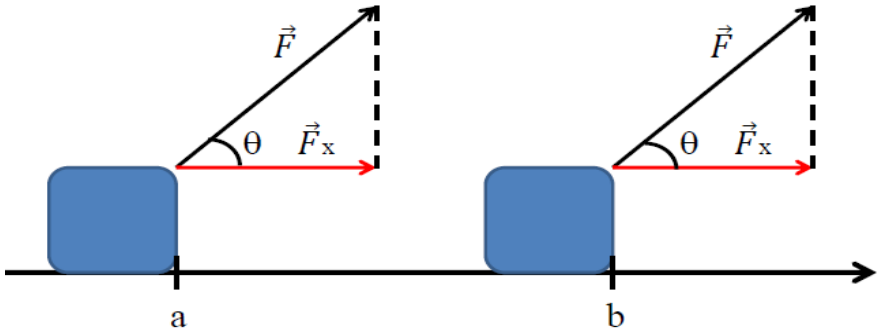


Figura 3.5: Representa um força não-paralela ao deslocamento

Seja F_x a projeção da força F na direção do deslocamento. Por definição de Trabalho, o Trabalho da força F é dado pela equação (3.1), assim temos

$$W = F_x.d \qquad (3.4)$$

Como $F_x = F.\cos\theta$, vem

$$W = F.d.\cos\theta \qquad (3.5)$$

Pelo Método de Integral, consideremos deslocamentos infinitesimais de espaçamentos de mesmos comprimentos Δx. Da definição dada pela equação (3.1), temos

$$\Delta W = F.\cos\theta.\Delta x \qquad (3.6)$$

Integrando (3.6) segue que

$$\int_a^b dW = F.\cos\theta \int_a^b dx \tag{3.7}$$

$$W(b) - W(a) = F.\cos\theta.(b - a) \tag{3.8}$$

Como no ponto a o corpo está em repouso, então W(a) = 0. De (3.8) obtemos a equação (3.5)

$$W(b) = F.\cos\theta.(b - a) = F.d.\cos\theta$$

OBSERVAÇÕES

- Se $0 \leq \theta < 90°$, o Trabalho é Motor, ou seja, positivo ($W > 0$);
- Se $90° < \theta \leq 180°$, o Trabalho é Resistente, ou seja, negativo ($W < 0$);
- Se $\theta = 90°$ ou $\theta = 270°$, o Trabalho será Nulo ($W = 0$). Em outras palavras, A força será perpendicular ao deslocamento.

3.2 Trabalho de uma Força Variável

Quando a força aplicada sobre o corpo não é constante, não podemos aplicar a expressão (3.1) dada anteriormente, portanto é necessário buscar um outro caminho para resolver este problema.

O caminho a ser tomado, é usando a Integral de Riemann. Considerando que um corpo se desloca ao longo de um eixo x de um ponto a com uma força inicial $\overrightarrow{F_o}$ até um ponto b com uma força final $\overrightarrow{F_n}$, já que a força varia ao longo do deslocamento. (ver figura 3.6).

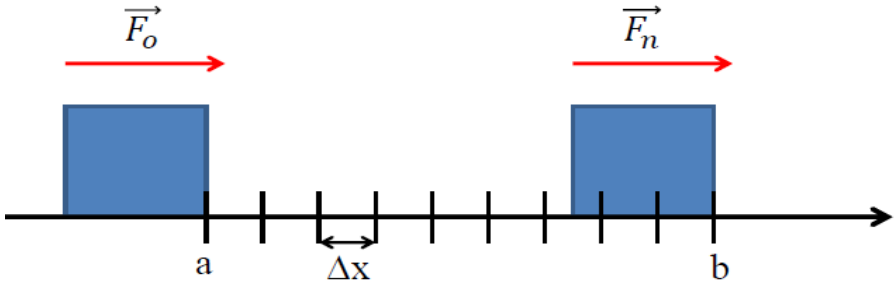


Figura 3.6: representa uma força que varia ao longo dos pequenos deslocamento

Vamos considerar deslocamentos infinitesimais de mesmos comprimentos Δx. Como a força varia com o deslocamento, podemos representar a força como uma função

$$F = F(x) \tag{3.9}$$

Da equação (3.1), temos

$$\Delta W = F(x).\Delta x \tag{3.10}$$

Integrando (3.10) no intervalo [a, b], obtemos

$$W = \int_a^b F(x)dx \tag{3.11}$$

Exemplo 3.2: Uma partícula está localizada a uma distância de x metros da origem. Uma força de $(x^2 + 2x)$ Newtons é aplicada sobre a partícula. Qual o Trabalho realizado para mover a partícula de x = 1 m a x = 3 m ?

Solução:

Claro que a força $F(x) = (x^2 + 2x)$ N é variável, então aplicando a expressão (3.11)

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)dx$$

$$W = \int_1^3 x^2\,dx + \int_1^3 2x\,dx$$

$$W = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 + x^2|_1^3$$

$$W = \frac{26}{3} + 8$$

$$\mathbf{W = \frac{50}{3}\ J}$$

3.3 Trabalho da Força Peso

Considere um corpo de massa m em queda livre, de modo que a aceleração da gravidade g pode ser considerada constante. Suponha que o corpo vá de um ponto A até um ponto B. veja a figura 3.7:

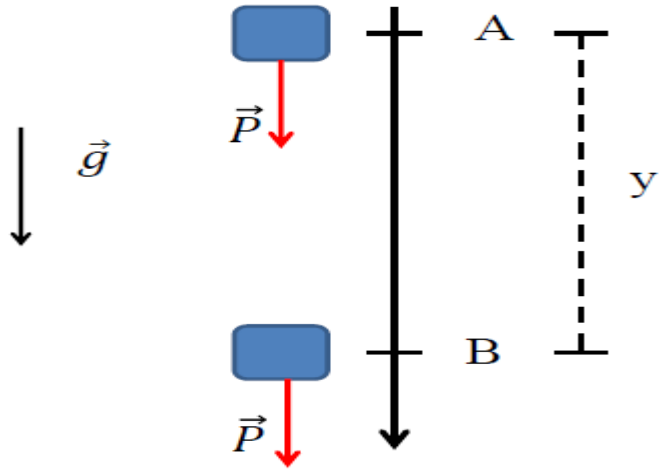


Figura 3.7: representa um corpo em queda livre sob a ação da força peso

Considerando que a força F = P e o deslocamento é y = B – A, da equação (3.1), temos

$$W_{(AB)} = P.y \qquad (3.12)$$

Como P = m.g e o corpo está a favor do peso, o Trabalho será positivo. Assim teremos

$$W_{(AB)} = m.g.y \tag{3.13}$$

Se o corpo fosse de B para A (subindo), estaria se movendo contra o peso e nesse caso o Trabalho será negativo. Então temos

$$W_{(BA)} = - m.g.y \tag{3.14}$$

Em termos de Integrais, vamos considerar deslocamentos infinitesimais de iguais espaçamentos Δy. Da expressão (3.13), temos

$$\Delta W = m.g.\Delta y \tag{3.15}$$

Integrando (3.15) no intervalo [A, B], segue que

$$\int_A^B dW = m.g \int_A^B dy \tag{3.16}$$

$$W(B) - W(A) = m.g.(B - A) \tag{3.17}$$

Considerando que no ponto A o corpo está em repouso, temos W(A) = 0 e da equação (3.17), obtemos a equação (3.13).

$$W(B) = m.g.(B - A) = m.g.y$$

Observação: O Trabalho da força peso é independente da trajetória.

Exemplo 3.3 Uma corpo de massa 0,10 kg é lançada obliquamente, descrevendo uma trajetória indicada na figura 6. Sendo g = 9,8 m/s², h_A = 1,0 m e h_B = 0,30 m, determine o Trabalho realizado pelo peso do corpo nos deslocamentos de O a A e de A a B.

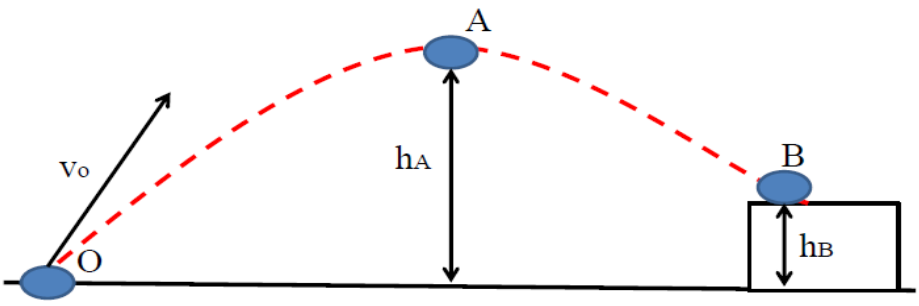


Figura 3.8: representa a trajetória do do corpo lançado obliquamente para a resolução de exemplo 3.3.

Solução:

- No deslocamento de O para A, o corpo sobe e seu peso realiza trabalho negativo. Em termos de integral, temos

  $W_{(OA)} = - m.g\int_0^1 dh$

  $W_{(OA)} = - (0{,}10\ kg).(9{,}8\ m/s^2).(1 - 0)$

  $W_{(OA)} = - 0{,}98\ J$

- No deslocamento de A para B, o corpo desce e seu peso realiza trabalho positivo. O desnível h entre A e B é:
  $h = h_A - h_B = (1{,}0\ m) - (0{,}30\ m) = 0{,}70\ m$
  Em termos de integral, temos

  $W_{(AB)} = m.g\int_0^{0,70} dh$

  $W_{(AB)} = (0{,}10\ kg).(9{,}8\ m/s^2).(0{,}70\ m)$

  $W_{(AB)} = 0{,}686\ J$

3.4 Trabalho da uma Força Elástica

Antes de discutirmos o cálculo do Trabalho da Força Elástica, vejamos o que é e como atua este tipo de força.

3.4.1- Lei de Hooke

Observe a figura 3.9:

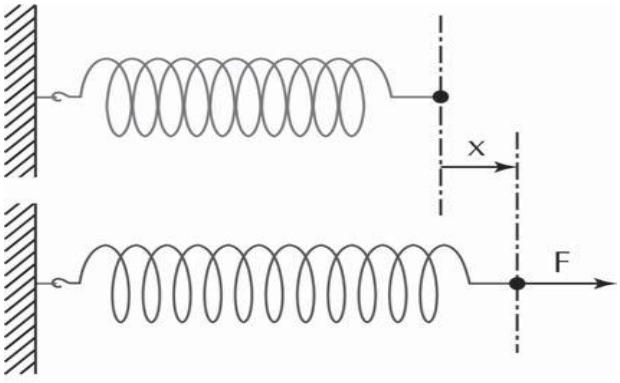


Figura 3.9: representa uma mola sendo esticada por uma força

Quando aplicamos uma força $\vec{F}$ a uma mola, provocamos na mesma uma deformação $\vec{x}$, verificamos que a intensidade da força é diretamente proporcional à deformação provocada. A formalização deste conceito que acabamos de descrever é conhecida como Lei de Hooke, que é expressa matematicamente da seguinte forma:

$$F = k.x \tag{3.18}$$

Onde k é uma *constante de deformação* da mola.

A unidade no SI de k é o N/m (Newton por metro), pois de (3.18) temos

$$K = \frac{(\text{unidade de força})}{(\text{unidade de deslocamento})} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

3.4.2 – Calculando o Trabalho

Observe a figura 3.10:

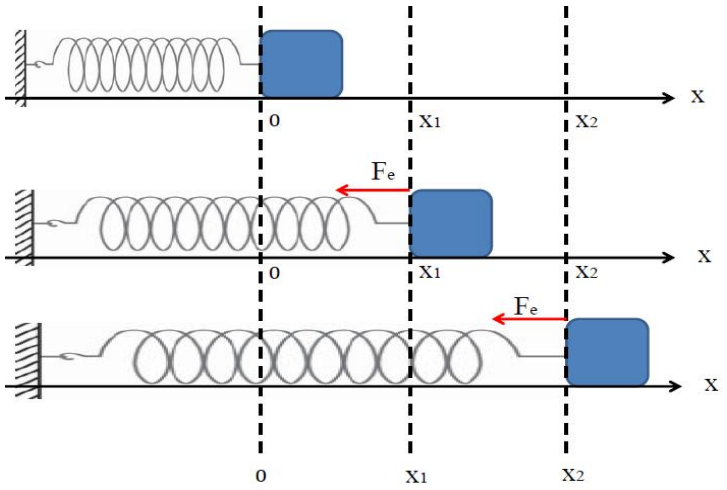


Figura 3.10: representa uma mola sendo esticada de sua posição natura 0 até x_2 passando por x_1

Na figura 3.10, temos um bloco preso a uma mola ideal, sendo que o eixo x mede a deformação da mola. Suponha que alguém puxe o bloco, fazendo com que ele saia da posição de equilíbrio. A mola exercerá no bloco uma força F_e (força elástica) cujo sentido aponta para a posição de equilíbrio x = 0. Se quisermos calcular o Trabalho de F_e entre duas posições quaisquer, lembrando sempre que a F_e não é constante; ela varia com a deformação (F = kx). Assim, o Trabalho deve ser determinado graficamente (ver figura 3.11).

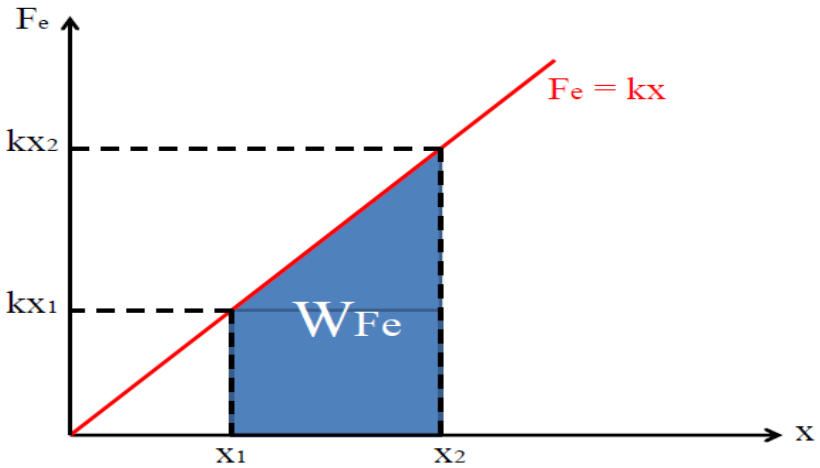


Figura 3.11: representação gráfica da força elástica

Note que no gráfico, a área de cor “ azul ” é numericamente igual ao módulo do Trabalho W_{Fe} entre as deformações x_1 e x_2. Figura é essa que representa um Trapézio de bases kx_1 e kx_2 com altura $x_2 – x_1$. Da geometria plana, temos:

$$W_{Fe} = \frac{(kx_1 + kx_2).(x_2 - x_1)}{2}$$

$$W_{Fe} = \frac{k.(x_2^2 - x_1^2)}{2} \tag{3.19}$$

Outra maneira de determinar o Trabalho W_{Fe}, é a utilização da Integral de Riemann.

Seja $F(x) = F_e$ uma função que depende do deslocamento x. Da Lei de Hooke, temos

$$F(x) = kx \tag{3.20}$$

Note que (3.20) é uma função contínua no intervalo $[x_1, x_2]$, então F(x) é integrável e definimos como

$$W_{Fe} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} k.x\,dx \tag{3.21}$$

3.4.3 - Regra dos Sinais

A utilização dos sinais no cálculo do trabalho da força elástica é teoricamente simples, basta prestarmos a atenção para que lado é o deslocamento (ver figura 3.12):

- Se o deslocamento é em direção a posição natural da mola o trabalho é motor ($W > 0$);

- Se a mola é alongada ou comprimida o trabalho é resistente ($W < 0$).

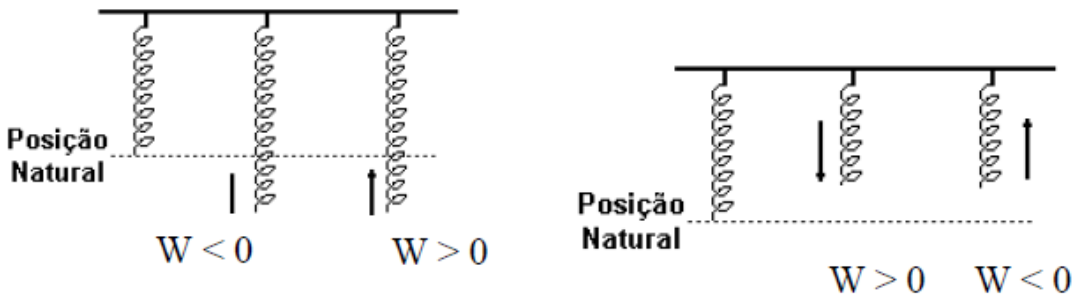


Figura 3.12: representa uma simulação para a regra dos sinais no cálculo do trabalho

Exemplo 3.4 Uma mola tem um comprimento natural de 0,5 m. Uma forca de 4N é exigida para esticar até o comprimento de 0,6 m. Calcular o trabalho realizado para que a mola se estenda de seu comprimento natural ate um comprimento de 1,2 m.

Solução:

Inicialmente, precisamos encontrar a constante de deformação k. Pela Lei de Hooke, vem

$$F(x) = k.x$$

Como F(0,6) = 4, temos

$$k.(0,6) = 4$$

$$k = \frac{20}{3}\ \text{N/m}$$

Logo, temos $F(x) = \frac{20}{3}x$

Portanto, usando (3.21) com os limites de integração $x_1 = 0$ e $x_2 = 0,7$ temos

$$W_{Fe} = \frac{20}{3}\int_0^{0,7} x\,dx$$

$$W_{Fe} = \frac{20}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{0,7}$$

$$W_{Fe} = \frac{20}{3}\left(\frac{0{,}49}{2}\right)$$

$$W_{Fe} = \frac{49}{30}\,J$$

3.5 Trabalho Realizado Por um Gás

Em particular, os gases aplicam forças nas paredes dos recipientes que os contêm, e essas forças podem realizar Trabalho. Vejamos como calcular o Trabalho por um gás, dependendo da transformação que ele sofre.

A figura seguinte mostra o aquecimento de um gás contido em um recipiente fechado e provido de um êmbulo (Pistão) que pode movimentar-se sem atrito. Nesse caso, dizemos que o gás sofre uma *transformação isobárica*, na qual a pressão ρ permanece constante (ver figura 3.13).

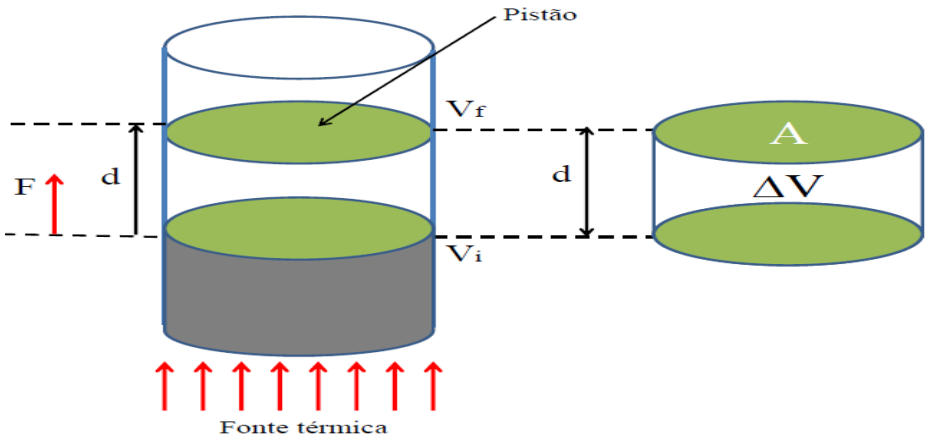


Figura 3.13: representa uma Transformação isobárica de um gás, provocando uma variação do seu volume

O gás. recebendo calor da fonte térmica, consegue empurrar o Pistão, realizando Trabalho por meio da força que aplica. Se o deslocamento do Pistão se efetua com velocidade constante, a força aplicada pelo gás estará equilibrando o peso do Pistão e a força devida a pressão atmosférica. Assim sendo, a força aplicada pelo gás permanece constante ao longo desse deslocamento.

A definição de Trabalho é dada pela equação (3.1), como a força $F = \rho.A$, temos

$$W = \rho.A.d \tag{3.22}$$

Notamos que $A.d = \Delta V$, segue que

$$W = \rho.\Delta V = \rho.(V_f - V_i) \tag{3.23}$$

Em termos de Integrais, vamos considerar variações de volumes infinitesimais dV. Da equação (3.23), temos

$$dW = \rho.dV \tag{3.24}$$

Integrando (3.24), segue que

$$\int_{V_i}^{V_f} dW = \rho \int_{V_i}^{V_f} dV \tag{3.25}$$

$$W(V_f) - W(V_i) = \rho.(V_f - V_i) \tag{3.26}$$

Note que $W(V_i) = 0$, pois o Pistão está em repouso e não realiza Trabalho. Portanto, da equação (3.26) obtemos a equação (3.23)

$$W(V_f) = \rho.(V_f - V_i) = \rho.\Delta V$$

A unidade de pressão no Sistema Internacional (SI) é o N/m^2 e a variação de volume (ΔV) é o m^3. São também muito utilizadas as unidades atmosfera (atm) para a pressão e o litro (L) para a variação do volume. Nesse caso, o Trabalho é dado em atm.L.

A relação entre essas duas unidades é:

$$1 \text{ atm.L} = 100 \text{ J} \tag{3.27}$$

O gás pode sofrer uma expansão ou uma compressão. Em termos de energia, podemos dizer que a expansão é um processo em que o gás transfere energia ao meio externo, pois o Trabalho realizado por ele é *positivo*. Na compressão, o gás recebe energia do meio externo, sendo que o Trabalho é *negativo***.**

Exemplo 3.5 O volume de um gás aumenta de 2.10^{-3} m³ para 5.10^{-3} m³. Durante essa expansão, a pressão do gás permaneceu constante e igual a 2.10^{5} N/m². Determine o Trabalho realizado pelo gás.

Solução:
Do exemplo, temos

$\rho = 2.10^{5}$ N/m²
$\Delta V = (5.10^{-3}\ m^3) - (2.10^{-3}\ m^3) = 3.10^{-3}\ m^3$

Usando o método de integração no intervalo de V = 0 a V = 3.10^{-3}, segue que

$$W = (2.10^{5}\ N/m^2) \int_0^{3.10^{-3}} dV$$

$$W = (2.10^{5}\ N/m^2).(3.10^{-3}\ m^3)$$

$$W = (6.10^{2}\ N.m)$$

$$\mathbf{W = 600J}$$

Considerações Finais

Neste trabalho, foi definido uma aplicação da Integral de Riemann na Física que é o cálculo de Trabalho de Força Constante, Força Variável, Força Peso, Força Elástica e Força de uma Transformação de um Gás.

Na Física, aprendemos o cálculo do Trabalho através de definições e fórmulas. Neste trabalho de conclusão de curso obtiveram-se essas mesmas fórmulas utilizando o método de Integração.

Como foi proposta inicialmente, aplicamos a Integral de Riemann para o Trabalho das forças citadas e este objetivo foi alcançado de acordo com as definições físicas.

Uma grande contribuição acadêmica que esse trabalho pode deixar, está no fato de que tais aplicações de Integral de Riemann demonstradas não são comumente encontradas nos livros do Ensino Médio, são apenas citadas. Uma boa sugestão para prosseguir os estudos dessa linha de pesquisa, seria estender a utilização do cálculo integral para o caso do Estudo dos Movimentos, por exemplo, por que a Integral da Função da Velocidade do MUV é igual Função do Espaço do MUV, ou seja, $\int v(t)dt = s(t)$.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BINVES, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo*. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.

[2] ÁVILA, Geraldo S.S. *Introdução à Analise Matemática.* Editora Edgar Blucher Ltda. (1993)

[3] BOSQUILHA, Alessandra; PELEGRINI, Márcio. *Minimanual Compacto de Física: Teoria e prática.* 2ª edição. São Paulo: Rideel Editora, 2003.

[4] CARRON, Wilson; GUIMARÃES, Osvaldo. *Física: volume único.* 2ª edição. São Paulo: Moderna Editora, 2003.

[5] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Analise I.* 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1996.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo, Volume 1*. 5ª edição. São Paulo; LTC Editora, 2001.

[7] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física*, Volume 1. 8ª edição. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2008.

[8] JUNIOR, Francisco Ramalho; FERRANO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. *Os Fundamentos da Física, Volume 1*. 9ª edição. São Paulo: Moderna Editora, 2007.

[9] SAMPAIO, José Luiz; CALÇADA, Caio Sérgio. *Física: volume único (coleção ensino médio atual)*. 2ª edição. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[10] www.idesa.com.br/física.

[11] http://flarranyelly.blogsport.com/2009/11/georg-friedrich-bernhard-riemann.htmt