UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Claudia Barrozo Dias
Siméia Barbosa dos Reis

# CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS A PARTIR DOS AXIOMAS DE PEANO

Macapá - 2011

**Claudia Barrozo Dias**
**Siméia Barbosa dos Reis**

# CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS A PARTIR DOS AXIOMAS DE PEANO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática - Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), como requisito parcial para a obtenção da Graduação em Licenciatura em Matemática.

Área de Concentração: **Teoria dos Números**
Orientador: *Ms.* Márcio Aldo Lobato Bahia.

**Macapá - 2011**

# Construção dos Números Naturais a partir dos Axiomas de Peano

**por**

**DIAS, Claudia Barrozo**
**REIS, Siméia Barbosa dos**

Este Trabalho de Conclusão de Curso, foi julgado e aprovado, pelo Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), como requisito parcial para a obtenção da Graduação de Licenciatura em Matemática.

**Macapá, 08 de Abril de 2011**

---

Prof. *Ms.* Marcio Aldo Lobato Bahia
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP

**Banca Examinadora**

---

**Orientador:** Prof. *Ms.* Márcio Aldo Lobato Bahia.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

---

**Membro:** Prof. *Dr.* Erasmo Senger.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

---

**Membro:** Prof. *Esp.* Steve Wanderson C. de Araújo.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

*À minha mãe, Benedita Dias, que contribuiu intensamente para a minha formação e nos momentos mais difíceis de minha vida se mostrou uma verdadeira amiga.*

*Aos três grandes homens da minha vida, que despertaram em mim o desejo de seguir em frente, meu esposo Evaristo Messias e meus filhos Gabriel dos Reis e Eduardo dos Reis.*

# Agradecimentos

$\star$ Agradeço à Deus, que me permitiu tudo isso, a quem dirijo minha maior gratidão, a quem deu propósito à minha vida. Vem dEle tudo o que sou, o que tenho e o que espero, o maior dos mestres;

$\star$ Ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIFAP;

$\star$ Ao professor *Ms.* Márcio Bahia, pelas orientações, discussões, dedicação, paciência e apoio durante esta longa jornada;

$\star$ À minha família, pelas orações, conselhos, empenho, estímulo e força em todos os momentos de minha vida;

$\star$ Ao meu filhote Caio Marcelo, que entendeu minhas ausências, compartilhou lágrimas e sorrisos, divido, agora, o mérito desta conquista;

$\star$ Ao amor da minha vida, Gledson Amanajás, pelo amor, carinho, e confiança necessária em todos os momentos;

$\star$ À minhas irmãs Cri e Cris, com quem sempre pude contar em todos os momentos de minha vida;

$\star$ À Maria Hite, minha segunda mãe, cujo apoio, incentivo e carinho foram fundamentais para o meu sucesso;

$\star$ À cinco grandes amigas: Daianne, Kathiuce, Nazaré, Siméia e Tatiane, pelas horas que, juntas, dividimos, tristezas, incertezas e inseguranças... Mas somamos entusiasmo, forças, alegrias, desafios e conquistas;

$\star$ À todos que contribuíram de alguma forma para que esta etapa de minha vida se concretizasse.

# Agradecimentos

⋆ À Deus, o grande autor da minha vida, que durante essa caminhada iluminou o meu caminho e deu forças para chegar ao final dessa jornada;

⋆ Ao Colegiado do Curso em Matemática da UNIFAP;

⋆ Ao professor *Ms.* Márcio Bahia, por sua disponibilidade, dedicação e paciência na orientação deste trabalho;

⋆ Aos dois grandes exemplos de perseverança, amor e dedicação: meus pais José dos Reis e Maria Madalena dos Reis;

⋆ Às minhas duas maiores riquezas: meus filhos Gabriel e Eduardo. Mamãe ama vocês!

⋆ Ao presente que Deus me deu, o grande amor da minha vida que esteve sempre ao meu lado, nos momentos difíceis me deu forças para seguir em frente, chorou e sorriu quando necessário, : meu esposo Evaristo;

⋆ À três pessoas especiais: minhas irmãs Cíntia e Siane e meu sobrinho Rogério ;

⋆ Às minhas grandes amigas: Claudia, Daianne, Kathiuce, Nazaré e Tatiane, pelo companheirismo, amizade, carinho e cumplicidade. Valeu a pena cada lágrima derramada.

*“Devemos ter perseverança para aprender o que nos é ensinado,
e transmitir os ensinamentos com a mesma virtude”.*

BAHIA, Márcio Aldo Lobato, 2005

# Resumo

Apresentamos neste trabalho a descrição formal do Conjunto dos Números Naturais a partir da Axiomática de Peano. Inicialmente abordamos resumidamente a linguagem formal utilizada, mostrando sua importância no contexto matemático. Em sequencia, apresentamos um panorama histórico sobre o surgimento dos Números, ressaltando desde os primeiros indícios de utilização até o seu estabelecimento com as notações e terminologias utilizadas em Teoria dos Conjuntos.

Posteriormente apresentamos a Construção dos Números Naturais dando ênfase ao Axioma da indução. Também, de forma específica, mostramos a existência e a unicidade das operações de adição e multiplicação deste conjunto, deduzimos as propriedades mais relevantes destas operações. Para formalizar a ideia intuitiva de que 0 é menor que 1, que é menor que 2 e assim por diante, discutimos a relação de ordem em $\mathbb{N}$.

**Palavras-chave**: Números Naturais, Axiomas, Princípio de Indução.

# Abstract

We present in this work the formal description of the Set of Natural numbers from the Axiomática de Peano. Initially we board resumidamente the formal language used, showing his importance in the mathematical context. In sequencia, we present a historical view on the appearance of the Numbers, standing out from the first signs of use up to his establishment with the notations and terminology used in Theory of the Sets.

Subsequently we present the Construction of the Natural Numbers giving emphasis to the Axiom of the induction. Also, in the specific form, we show the existence and the unicity of the operations of addition and multiplication of this set, we deduct the most relevant properties of these operations. To formalize the idea $\mathbb{N}$.

**keyword**: Natural numbers, Axioms, Beginning of Induction.

# SUMÁRIO

# Introdução

Entre os vários ramos da matemática, a Teoria dos Conjuntos ocupa um lugar de destaque e, juntamente com a lógica, fundamentam toda a matemática conhecida. Desse modo, os vários ramos da matemática podem ser considerados formalmente incluídos na Teoria dos Conjuntos.

Como consequência desta inclusão, questões fundamentais à cerca da natureza da matemática reduzem-se a perguntas a cerca da teoria dos conjuntos. Perguntas como: O que é um conjunto? O que é um número? Motivaram grande parte dos matemáticos e dos filósofos dos fundamentos da matemática durante o século XIX e parte do século XX. A caracterização dos números inteiros, racionais e dos números reais foi um problema central para as investigações de Weierstrass, Dedekind, Kronnecker, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Brower e outros.

O conhecimento dos números nas séries iniciais do ensino fundamental é transmitido de forma intuitiva. Diz-se que o conjunto dos números naturais é constituído dos elementos 0, 1, 2, 3... Aprende-se a somar, multiplicar esses números e também informa-se sobre as propriedades essenciais dessas operações.

O desejo de fazer uma abordagem sobre o tema "A construção dos Números naturais a partir dos Axiomas de Peano" nasceu destes questionamentos. A definição intuitiva de contagem pode ser resumida com base no senso comum, no entanto, para a Matemática, é necessário uma rigorosa teoria axiomática-dedutiva dos números naturais porque nos permite organizar os conceitos e propriedades relevantes desses números numa estrutura lógica bem definida, permitindo a investigação de suas propriedades e também a realização de aplicações em outras áreas. Esta observação conduziu o desenvolvimento do trabalho aqui apresentado, a qual busca abordar a teoria dos conjuntos e a construção lógico-formal do conjunto dos Naturais, usando como alicerce para esta construção, a teoria axiomática de Peano.

Para Peano não tornava-se necessário a definição de número, admitia o conceito de número primitivo, ou seja, não definido. No entanto, a exigência de rigor de Peano não podia deixar o conceito de número sujeito a arbitrariedade. Por este motivo explicita os termos primitivos que serão usados e fixa com os termos utilizados. Peano mostrou que para isso precisaria de 3 conceitos lógicos, além de 5 axiomas. Ele pensou que se encontrasse um sistema lógico partindo dos números naturais, ele seria válido para toda a matemática, já que  a matemática pura tradicional, inclusive a geometria analítica, eram derivadas de proposições referente às propriedades dos números naturais. Em outras palavras, a validade do sistema para os números naturais implica na validade do sistema para todo o resto.

Esta forma teria a preferência de Peano, o qual sempre defendeu (radicalmente) a simbolização como um elemento simplificador, que evita ambiguidades da linguagem comum. De fato, fica claro na forma refraseada que existe uma operação $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denominada sucessora. Esta operação sucessora origina, indutivamente, a uma nova operação: a operação soma, nos permite, ainda, definir a ordem de um elemento, e então verificar que...

A aritmética começa, realmente, com os Axiomas de Peano.

Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1 Noções Primitivas

Para que os conceitos primitivos sejam empregados adequadamente torna-se necessário estabelecer regras que regulamentem sua utilização e estabeleçam suas propriedades.

Peano, em sua fundamentação de 1879, admite três entes primitivos: *número natural, zero* e *sucessor*, relacionados entre si por cinco axiomas. Indicaremos por $\sigma(n)$ o "*sucessor*" do número $n$ e, como é usual, utilizaremos o símbolo 0 para indicar o zero.

*Axiomas* ou *postulados* são sentenças ou proposições que não são provadas ou demonstradas, são consideradas como óbvias ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução e inferências de outras verdades. Na matemática, um axioma é uma hipótese inicial de qual outros enunciados são logicamente derivados. Pode ser uma sentença, uma proposição, um enunciado ou uma regra que permite a construção de um sistema formal. Diferentemente de teoremas, axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução e nem são demonstráveis por derivações formais, simplesmente porque eles são hipóteses iniciais.

Um axioma é uma expressão lógica formal usada em uma dedução, axiomatizar um sistema é mostrar que suas inferências podem ser derivadas a partir de um pequeno e bem definido conjunto de sentenças. todavia, isto não significa que elas possam ser conhecidas independentemente, todas as demais noções devem ser definidas e as afirmacões seguintes devem ser demonstradas. Nisto consiste o chamado *método axiomático*.

As proposições a serem demonstradas chamam-se *teoremas* e *corolários* são conseqüências imediatas dos teoremas. Uma proposição auxiliar usada na demonstração denomina-se *lema*.

A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra sucessor. Intuitivamente, dizer que $\sigma(n)$ é o sucessor de $n$ significa que $\sigma(n)$ vem logo depois de $n$, não havendo outro número entre $n$ e $\sigma(n)$. Todavia, deve-se observar que o termo primitivo sucessor não é definido explicitamente.

## 1.2 História dos Números

### 1.2.1 Primeiros Indícios

Quase quatro mil anos separam as primeiras manifestações de numeração escrita da construção do sistema de numeração posicional decimal que utilizamos, munido do símbolo denominado zero. Esse símbolo foi criado pelos hindus nos primeiros séculos da era cristã. A concepção do zero foi ignorada, durante milênios, por civilizações matematicamente importantes como a dos gregos e dos egípcios.

Até que se iniciasse o desenvolvimento teórico do conceito de número foi lento e complexo, envolvendo diversas civilizações.

> Usando os dedos das mãos podem ser representados conjuntos contendo até dez elementos. Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com os elementos do outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele freqüentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois, os milhares de anos que foram necessários para que o homem fizesse a distinção entre os conceitos abstratos e repetidas situações concretas mostram as dificuldades que devem ter sido experimentadas para se estabelecer uma base, ainda que primitiva, para a matemática. (BOYER, 1974, p.02)

Os registros históricos nos mostram a utilização de vários sistemas de numeração, os babilônios de 2000 a.C., desenvolveram o sistema de numeração sexagesimal e empregaram o princípio posicional; os romanos, fizeram história através do uso simultâneo do princípio da adição e do raro emprego do principio da subtração, os egípcios que já usavam o sistema decimal (não posicional); e os gregos antigos, povos que utilizavam diversos sistemas de numeração. A invenção do zero foi um passo decisivo para a consolidação do sistema de numeração indo-arábico, devido à sua eficiência e funcionalidade em relação aos demais sistemas de numeração.

No século VI a.C., na Escola Pitagórica, um marco importante na história dos números e da matemática. Os pitagóricos acreditavam que existia uma harmonia interna no mundo governada pelos números naturais, seus estudos envolviam-se de um misticismo.

Desde os Pitagóricos, acredita-se que, dados dois segmentos de reta quaisquer, AB e CD, seria possível encontrar um terceiro segmento EF, contido um número inteiro de vezes em AB e um número inteiro de vezes em CD, ou seja EF é um *submúltiplo comum* de AB e CD ou que AB e CD são comensuráveis.

Dessa forma, essa idéia nos permite comparar dois segmentos de reta da seguinte maneira: dados segmentos, AB e CD é o número racional $m/n$, significa dizer que existe um terceiro segmento EF, submúltiplo comum desses dois, satisfazendo: AB é $m$ vezes EF.

É imediato pensamos que, para dois segmentos AB e CD dados, é sempre possível tomar EF suficientemente pequenos para caber um número inteiro de vezes simultaneamente em AB e em CD. Ou seja, que dois segmentos de reta são sempre comensuráveis, como acreditavam os pitagóricos, isto é, os números eram suficientes para expressar a razão entre eles, portanto, a relação entre grandezas da mesma natureza.

Uma descoberta originada na própria comunidade pitagórica abalou profundamente o domínio dos números naturais, na concepção pitagórica, trata-se da *incomensurabilidade* entre a diagonal e o lado de um quadrado, ocorrido, particularmente, em uma figura geométrica comum e de propriedades aparentemente simples, o quadrado.

Considerando a diagonal e o lado de um quadrado comensuráveis, tem-se, a diagonal com medida $nt$ e o lado $mt$. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$n^2t^2 = m^2t^2 + m^2t^2 \Longrightarrow n^2t^2 = 2m^2t^2 \Longrightarrow n^2 = 2m^2$$

O que é inaceitável, pois como mostra o Teorema Fundamental da Aritmética, em $n^2$ há uma quantidade ímpar de fatores primos, em contradição com a unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos.

No entanto, essa situação foi contornada através do matemático e astrônomo ligado à Escola de Platão, Eudoxo de Cnidos (408 a.C.), *criador da Teoria das Proporções* para tratar as grandezas incomensuráveis através da geometria, contribuindo assim para a desaceleração do desenvolvimento da aritmética e da álgebra por séculos. Somente no final do século XIX, motivados pelas demandas teóricas que surgiram a partir do cálculo diferencial e integral de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfriend Leibniz (1646-1716), no século XVII ocorreu a fundamentação do conceito de número, principalmente através dos trabalhos propostos por Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano(1858-1916).

Podemos inferir que o processo histórico da conceituação de número assemelha-se a nossa própria formação desse conceito. A preocupação em fazer contagens, em diversas situações do dia-dia, fez-se à necessidade de criarmos uma estrutura de elementos enumeráveis conhecido como o conjunto dos números naturais.

### 1.2.2 Giuseppe Peano - Vida e obras

O matemático Giuseppe Peano, considerado o maior matemático italiano da época, nasceu em Spinetta em 1858 e morreu em Turim em 1932. Na matemática, teve um papel importante na axiomatização, uma de suas maiores contribuições teóricas foi na área da teoria dos conjuntos, e foi um líder pioneiro no desenvolvimento da lógica.

Na obra "Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita"de 1889, introduziu notações como $\cup$ e $\cap$ para união e intersecção de conjuntos. Descobriu um tipo de curva contínua denominada curva de Peano em 1890. Grande parte da sua vasta obra científica foi dedicada à Matemática e à Lógica, sendo a restante parte à Filosofia e à construção da interlingua.

Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale (1884) e Lezioni di analisi infinitesimale (1893) foram uma das obras mais importantes no desenvolvimento da teoria geral das funções.

No livro Calcolo geometrico (1888) que encontramos o seu primeiro trabalho em Lógica Matemática, introduziu os elementos básicos do cálculo geométrico, deu novas definições para o cálculo do comprimento de um arco e para a área de uma superfície curva em Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale(1887). Criou um sistema de símbolos que permite a descrição e o enunciado das proposições lógicas e matemáticas sem recorrer à linguagem comum.

## 1.3 Fundamentos

### 1.3.1 Notações

$\forall$ : leia-se "para todo" ou "qualquer que seja".

$\exists$ : leia-se "existe (pelo menos) um".

### 1.3.2 Implicação

Suponhamos, P e Q são "asserções" (ou "propriedades"). Quando escrevemos:

$$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$$

queremos dizer que:

P implica em Q

Ou seja, sempre que P for verdadeiro, também Q será verdadeiro.

Também podemos dizer que (a verdade de) P é condição suficiente para (a validade de) Q.

- Ou Q é condição necessária para P;
- Ou Q vale se P vale;
- Q vale se P vale;
- Se P, então Q.

Temos ainda que:

P $\Longrightarrow$ Q significa o mesmo que $Q \Longleftarrow P$.

**Observação 1.3.1.** *A seta numa implicação $P \Longleftarrow Q$ não pode ser simplesmente invertida. Se P é condição suficiente para Q, isto é, significa que Q é condição necessária para P, mas não que Q é condição suficiente para P.*

Existem asserções P e Q que ambas implicam na outra, ou seja, as quais satisfazem simplesmente:

$$P \Longleftarrow Q \text{ e } Q \Longleftarrow P.$$

Temos então que P é suficiente para Q e também P é necessário(a) para Q. Dizemos que P é (condição) necessário (a) e suficiente para Q, ou seja, P vale se, e somente se, vale Q.

Indicaremos isto por:

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Dizemos que P e Q são asserções equivalentes, ou ainda, que P constitui uma propriedade de característica para Q (e vice-versa).

Se P é uma asserção, indicaremos por $\overline{P}$ a asserções "não P", a qual é verdadeira se, e somente se, P é falsa. Sejam P e Q duas asserções e suponha:

$$P \Longrightarrow Q.$$

Caso as duas asserções forem falsas, temos:

$$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$$

Ou seja, se P é suficiente para Q, então $\overline{Q}$ é suficiente para $\overline{P}$, ou ainda, se P é suficiente para Q, então $\overline{P}$ é necessária para $\overline{Q}$.

### 1.3.3 Conceito Primitivos e conjuntos

Como conceitos admitiremos: A noção de elemento, a relação de igualdade "=", a noção de conjunto e a relação da pertencia "∈".

Um conjunto A é uma "coleção" ou "família" de "elementos" ou "objetos".

Dado um conjunto A. Para indicarmos que um elemento $a$ pertence a A, escreveremos $a \in A$, enquanto sua negação é escrita $a \notin A$.

Admitimos também que, para qualquer objeto de $a$ ocorre exatamente uma das propriedades:

$$\text{Ou } a \in A \text{ ou } a \notin A.$$

Além disso, para dois elementos $a, b \in A$ teremos exatamente uma das possibilidades:

$$\text{Ou } a = b \text{ ou } a \neq b.$$

Temos que:

$A = \{a \setminus ...\}$, é lido: $A$ é um conjunto de todos os elementos $a$ tal que.

### 1.3.4 Igualdade entre Conjuntos

**Definição 1.3.1** (Igualdade entre Conjuntos)**.** *Dados dois conjuntos A e B, são iguais quando eles possuem os mesmos elementos, isto é:*

$$A = B \Longleftrightarrow \forall\ a \in A \Longrightarrow a \in B\ e\ \forall\ b \in B \Longrightarrow b \in A.$$

**Ver referência [8].**

**Exemplo 1.3.1.** *Os seguintes conjuntos tem notação padrão e serão sempre usados :*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *representa o conjunto dos números naturais.*

$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ *representa o conjunto dos números inteiros.*

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} / \ m, n \in Z \ e \ n \neq 0\right\}$*representa o conjunto dos números racionais.*

$\mathbb{R}$ *representa o conjunto dos números reais.*

### 1.3.5 A Ordem de um Conjunto

**Definição 1.3.2.** *Um conjunto A é dito finito quando possui uma quantidade finita de elementos distintos.*

**Definição 1.3.3.** *A quantidade de elementos distintos pertencentes à um conjunto A qualquer é um número natural e indicado por* $\mid A \mid$, *é chamado de a ordem de A.*

**Definição 1.3.4.** *Os conjuntos* $A = \{a\}$ *que* $\mid A \mid = 1$ *são chamados de conjunto unitários.*

**Definição 1.3.5.** *Um conjunto que não possui elementos é denominado de conjunto vazio, representado pelo símbolo* $\phi$ *ou* $\{\}$.

## 1.3.6 Subconjuntos

**Definição 1.3.6.** *Se A e B são dois conjuntos, dizemos que A é um subconjunto (ou uma parte) de B (também B abrange A), se todo o elemento de A for elemento de B, ou seja, se para todo o elemento a, a implicação*

$$a \in A \Longrightarrow a \in B.$$

*se for verdadeira. Escreve-se como* $B \supseteq A$ *ou* $A \subseteq B$.

*Temos:*

$$A{=}B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

**Observação 1.3.2.** *Considere A,B e C três conjuntos, temos as regras:*

**a)** *Sempre* $A \subseteq A$*;*

**b)** $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq A$*, então* $A = B$*;*

**c)** *Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.*

A negação de A ⊆ B é simbolizada por A ⊈ B.

Se A ⊆ B e A ≠ B, diremos que A é subconjunto próprio de B. Assim, A ⊂ B significa que existe um $b \in$ B tal que B ∉ A.

### 1.3.7 Diferença e Complementar

**Definição 1.3.7.** *Dados dois conjuntos A e B, a diferença A menos B é o conjunto,*

$$A \setminus B = \{\ x/x \in A \text{ e } x \notin B\ \}.$$

**Definição 1.3.8.** *Quando $B \subseteq A$, a diferença $A \setminus B$ é denotada por Cptb(B) e é chamada de complementar de B em relação a A. Se $A = B$, temos que:*

$$Cpt_B(A) = Cpt_B(B) = \{b \in B/b \notin B\} = \phi\ .$$

**Observação 1.3.3.** *Se $A \subseteq B \subseteq C$, então:*

$$Cpt_C(B) \subseteq Cpt_C(A).$$

***Demonstração:*** *Considere $A \subseteq B \subseteq C$ e considere $x \in Cpt_C(B)$, daí;*

$$x \in C \text{ e } x \notin B, \text{ então } x \notin A.$$

*logo, $x \in Cpt_C(A)$.*

*Desse modo temos que: $Cpt_C(B) \subseteq Cpt_C(A)$.*

■

### 1.3.8 Reunião e Interseção

**Definição 1.3.9.** *Dados dois conjuntos A e B, a sua reunião é o conjunto de todos os elementos que pertence a A ou pertence a B, e serão denotados por:*

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\ \}$$

**Definição 1.3.10.** *A interseção de A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e pertencem a B, e será denotado por:*

$$A \cap B = \{x/x \in A \ \ e \ x \in B \ \}$$

**Observação 1.3.4.** *Para quaisquer conjunto A,B e C temos:*

**i)** $A \subseteq A \cup B$ *e* $B \subseteq A \cup B$.

**ii)** $A \supseteq A \cap B$ *e* $B \supseteq B$.

**iii)** *Se* $A \subseteq C$ *e* $B \subseteq C$, *então* $A \cup B \subseteq C$.

**iv** *Se* $A \supseteq C$ *e* $B \supseteq C$, *então* $A \cap B \supseteq C$.

**Definição 1.3.11.** *Se* $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ *são* $n$ *conjuntos dados, então:*

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n \ = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

*é o conjunto dos elementos* $x$ *que pertencem a pelo menos um dos* $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, *enquanto*

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 ... \cap A_n \ = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

*É o conjunto dos elementos* $x$ *que pertencem a todos os* $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

### 1.3.9 As Regras de "DE MORGAN"

Considere E um conjunto qualquer e os subconjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ subconjuntos de E, então:

$$Cpt_E(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \bigcap_{k=1}^{n} Cpt_E(A_k). \ Cpt_E(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \bigcap_{k=1}^{n} A_k Cpt_E(A_k).$$

**Demonstração:** Para todo x $\in$ E, temos:

$x \in Cpt_E(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \iff x \notin (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \iff x \notin A_k, \ \forall \ k \iff x \in Cpt_E(A_k)$, $\forall \ k \Longrightarrow x \in (\bigcap_{k=1}^{n})Cpt_E(A_k). \ \forall \ x \in E.$

Da mesma forma

$x \in Cpt_E(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \iff x \notin \bigcap_{k=1}^{n} A_k \ k \iff \exists$ K $\in$ 1 com $x \notin A_k \iff \exists \ k$ com $x \in Cpt_E(A_k) \iff x \in \bigcup_{k=1}^{n} Cpt_E(A_k)$.

■

### 1.3.10 Propriedade Fundamental em $\mathbb{N}$

**Ver referência [8].**

Admitiremos a adição " + " em N e Z, a qual da origem a uma ordem natural " $\leq$ " em Z:

$\forall\ m, n \in$ Z, temos:

$m \leq n \Longleftrightarrow$ a equação $m + x = n$ possui uma solução $x \in \mathbb{N}$.

### 1.3.11 Princípio da Indução

**Ver referência [8].**

Princípio do Menor Natural: Todo conjunto não vazio de números naturais possui um elemento mínimo, ou seja:

$\forall\ \emptyset \neq$ S $\subseteq$ N, $\exists\ m \in$ S / $m \leq n$, $\forall\ n \in$ S.

**Proposição 1.3.11.1.** *Considere $T$ um conjunto de (alguns) números naturais (isto é, $T \subseteq \mathbb{N}$) satisfazendo as propriedades:*

**(i)** *1 $\in T$.*

**(ii)** *Sempre se $n \in T$; então também $n+1 \in T$.*

*Então $T = \mathbb{N}$ é o conjunto de todos os números naturais.*

***Demonstração:*** *Suponhamos que $T \subset \mathbb{N}$. Então $\emptyset \neq Cpt_{\mathbb{N}}(T) \subseteq \mathbb{N}$, temos que:*

*Existe $m \in S/\ m \leq n$, $\forall\ n \in S$. Como 1 $\in T$, temos que $1 \in S$, e $m >$ 1. Daí $n = m - 1 \in T$; logo $m = n + 1 \in T$; o que leva ao absurdo já que $m \in S \cap T = \emptyset$.*

*Assim temos $S \neq \emptyset$ é impossível. Logo $S = \emptyset$ e daí $T = \mathbb{N}$.*

$\blacksquare$

**Proposição 1.3.11.2.** *Considere $n_0 \in Z$ um inteiro fixo e seja T' um conjunto de (alguns) números inteiros maiores ou iguais a $n_0$(isto é $T \subseteq \{n/n_0 \leq n \in \mathbb{Z}\}$), satisfazendo as propriedades:*

**(i)** *$n_0 \in T$*

**(ii)** *Se $n \in T$', então também $n+1 \in T$'.*

*Dessa forma $T' = \{n/n_0 \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto de todos os números inteiros maiores ou iguais a $n_0$.*

***Demonstração:*** *Aplicando a proposição anterior ao conjunto:*

$$T = \{n - n_0 + 1/n \in T'\},$$

*note que para este $T$ temos $T \subseteq \mathbb{N}$ e $n_0 \in T'$ é equivalente a $1 \in T$.*

■

### 1.3.12 O Conjunto das Partes

**Definição 1.3.12.** *Considere um conjunto $A$, indicamos por: $2^A = \{X/X \subseteq A\}$ o confronto de todas as partes de $A$, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjunto de $A$.*

**Observação 1.3.5.** *Considere $A$ um conjunto finito, então: $|2^A| = 2^{|A|}$.*

***Ver referência [8].***

***Demonstração:*** *(Por indução) Supondo que $|A| = n$ , temos:*

*Se $n = 0$, temos $A = \emptyset$, daí $2^A = 2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. Logo $|2^A| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}$. Por outro lado, se $A = \{a\}$, teremos $2^A = 2^{\{a\}} = \{\ \emptyset, \{a\}\ \}$. Portanto, $|2^{\{a\}}| = 2 = 2^1 =$ $= 2^{|A|}$.*

*Considere $A$ um conjunto com $n+1$ elementos tal que,*

$$A = \{1, 2, 3, ..., n, n+1\ \} \text{ e que}$$
$$A^* = \{1, 2, 3, ..., n\ \} = A/\{n+1\}. \text{ Supondo que:}$$
$$|2^{A^*}| = 2^{|A^*|} = 2^n = \{X_1, X_2, X_3, ..., X_{2^n-1}, X_{2^n}\}\ .$$

*temos que os subconjuntos de $A$ podem ser divididos em duas classes: os que contém o elemento $n+1$ e os que não contém o elemento $n+1$, estes últimos são justamente os $2^n$ subconjuntos distintos de $A^*$. Portanto, os subconjuntos distintos de $A$ são:*

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_{2^n-1}, X_{2^n}$$
$$\text{junto com}$$
$$X_1 \cup \{n+1\}, X_2 \cup \{n+1\}, X_3 \cup \{n+1\}, ..., X_{2^n-1} \cup \{n+1\}, X_{2^n} \cup \{n+1\}\ .$$

*logo $A$ possui o dobro de elemento de $A^*$, ou seja:*

$$|2^A| = 2|2^{A^*}| = 2.2^n = 2^{n+1} = 2^{|A|}.$$

■

*Dado um conjunto $A$ = {1,2,3, ... , $n$ } com $n$ elementos e um inteiro $k$ com 0$\leq$ $k \leq n$, denotamos por: $C_{n,k} = |C_{n,k}|$, em que a ordem da família de subconjunto de $k$ elementos existentes em $A$, assim:*

$$C_{n,k} = \{X/X \leq A; \ |X| = k\} \subseteq 2^A.$$

*temos de imediato que:*

$$C_{n,0} = C_{n,n} = 1.$$

*visto que $A$ possui um único subconjunto vazio e um único conjunto com todos os elementos, o próprio $A$.*

*Também temos :*

$$C_{n,1} = C_{n,n-1} = n,$$

*pois $A$ possui, exatamente, $n$ subconjunto unitários e também $n$ subconjuntos de $n$ - 1 elementos $A/\{k\}$, obtidos com a retirada de um dos $n$ elementos de $A$.*

*Em geral;*

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} \ ,$$

*pois os subconjuntos de $n$ - $k$ elementos são obtidos por remoção de um subconjunto de $k$ elementos de $A$.*

*Se $k < n$, podemos obter $C_{n,k+1}$ a partir de $n, k$ da seguinte forma:*

*Considere $X \in C_{n,k}$ um dos $C_{n,k}$ subconjuntos com $k$ elementos. Podemos acrescentar de $n-k$ maneiras em $(k+1)$ ésimo ponto $j \in A \backslash X$, obtendo um total de $C_{n,k}.(n-k)$ conjuntos da forma $X \cup \{j\} \in C_{n,k+1}$, mas cada conjunto $Y \in C_{n,k+1}$ surge desta maneira, exatamente, $k+1$ vezes. Logo, obtemos um total de $C_{n,k}.\frac{n-k}{k+1}$ subconjuntos distintos de $k+1$ elementos.*

*Portanto,*

$$C_{n,k+1} = C_{n,k} \ . \ \frac{n-k}{k+1}$$

*A partir* $C_{n,0} = 1$, *temos:*

$C_{n,1} = C_{n,0} \ . \ \dfrac{n-0}{0+1} = 1 \ . \ n = n$

$C_{n,2} = C_{n,1} \ . \ \dfrac{n-1}{1+1} = \dfrac{n.(n-1)}{2.1}$

$C_{n,3} = C_{n,2} \ . \ \dfrac{n-2}{2+1} = \dfrac{n.(n-1)(n-2)}{3.2.1}$

$$\vdots$$

$C_{n,k} = \dfrac{n.(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$

$C_{n,k+1} = \dfrac{n.(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}$

*Entende-se por por* $k!$ *pela expressão:*

$$k! = \prod_{k}^{l-1} l = 1.2.3.....k, \ se \ k \in \mathbb{N} \ .$$

*temos ainda:*

$$0! = 1, \ se \ k = 0 \ (produto \ vazio)$$

$$k! \ leia\text{-}se \ n \ fatorial.$$

*também temos:*

$$k! = (k-1)! \ . \ k$$

$$(k+1)! = k! \ (k+1)$$

■

## 1.3.13 Produtos Cartesianos

**Definição 1.3.13.** *Considere* $A_1, A_2, ..., A_m \neq \emptyset$ *conjuntos. O conjunto* $M = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m = \{(a_1, a_2, ..., a_m)/a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 ... a_m \in A_m\}$, *chama-se produto cartesiano dos* $A_1, A_2, ..., A_m$ *(nesta ordem). Os elementos* $(a_1, a_2, ..., a_m)$ *em* $M$ *chama-se m-uplas. O elemento* $a_i \in A_i$ *é a i-nésima coordenada da m-upla* $(a_1, a_2, ..., a_m)(1 \leq i \leq m)$.

Para dois elementos $(a_1,a_2,...,a_m)$ e $(b_1,b_2,...,b_m)$ em $M$ temos sua igualdade definida por:

$$(a_1, a_2, ..., a_m) = (b_1, b_2, ..., b_m) \Longleftrightarrow a_1 = b_1; a_2 = b_2; ...; a_m = b_m.$$

No caso de $m$ arbitrário e $A_1 = A_2 = ... = A_m = A$ o produto cartesiano passa a ser a potência cartesiana $m$-ésima de A, indicada por:

$M = A^M = \{(a_1,a_2,...,a_m)/a_1,a_2,...,a_m \in A\}.$

**Observação 1.3.6.** *Se $C = \{x_1,x_2,...,x_m\}$ e $B = \{y_1,y_2,...,y_m\}$ são conjuntos finitos, então temos:*

$$C.B = \left\{ \begin{array}{c} (x_1, y_2), (x_1, y_2)..., (x_1, y_n) \\ (x_2, y_1), (x_2, y_2)..., (x_2, y_n) \\ ... \\ (x_m, y_1)(x_m, y_2)...(x_m, y_n) \end{array} \right\}$$

*Portanto, $|C.B| = m.n = |C||B|$;*

**Observação 1.3.7.** *Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos finitos, então vale:*

$$|A_1 \times A_2... \times A_m| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_m|$$

*Particularmente, se $A_1 = A_2 = ... = A_m = A$, temos :*

$$|A^m| = |A|^m$$

***Ver referência [8].***

***Demonstração:*** *(Por indução) Se $m = 1$, é óbvio que a afirmação é verdadeira. Supondo que:*

$$|A_1 \times A_2... \times A_m| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_m|$$

*e considerando $C = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ , temos:*

$$C = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m \times A_{m+1} = C \times A_{m+1}$$

*pela observação acima, temos:*

$$|C \times A_{m+1}| = |C|.|A_{m+1}|$$

*Daí,*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_m \times A_{m+1}| = |C \times A_{m+1}| = |C||A_{m+1}| = |A_1||A_2|...|A_m|.|A_{m+1}|$$

■

### 1.3.14 Relações

**Definição 1.3.14.** *Considere $A,B \neq \emptyset$ dois conjuntos, uma relação $R$ em $A$ e em $B$ um subconjunto de $A \times B$:*

$$R \subseteq A \times B, \text{ ou seja, } R \in 2^{A\times B},$$

*em que $2^{A\times B}$ é o conjunto de todas as relações de $A$ em $B$.*

Para indicar que $(a,b) \in R$ usaremos a notação $a\ R\ b$ (lê-se: "$a$ relaciona-se com $b$ segundo $R$"), se $(a,b) \notin R$, escrevemos $a \not R\ b$.

**Definição 1.3.15.** *Chama-se domínio de $R$ o subconjunto de $A$ constituído pelos elementos "a" de $A$ para os quais existe algum $b$ em $B$ tal que $a\ R\ b$, ou seja:*

$$D(R)=\{\ a \in A\ /\ \exists\ b \in B \text{ com } a\ R\ b\} \subseteq A.$$

**Exemplo 1.3.2.** *Para quaisquer dois conjuntos $A,B \neq \emptyset$, temos que:*

$$A \times B \in 2^{A\times B} \text{ e } \emptyset \in 2^{A\times B}$$

*Temos $a(A\times B)b$, $\forall\ a \in A$, isto é, todo o elemento $a \in A$ é $(A\times B)-relacionado$ com todo $b \in B$.*

*Portanto, AxB é também denominada a relação universal entre A e B.*

*Temos $a\ \emptyset\ b$ nunca, isto é, nenhum elemento $a \in A$ é $\emptyset$-relacionado com nenhum elemento $b \in B$.*

*As relações $A \times B$ e $\emptyset$ são relações triviais entre $A$ e $B$.*

**Definição 1.3.16.** *Considere $A \neq \emptyset$ um conjunto e $R \in 2^{A\times A}$ uma relação em $A$. Dizemos que $R$ é uma relação*

**(i)** *Reflexiva, se $a\ R\ a$, $\forall\ a \in A$.*

**(ii)** *Simétrica, se $\forall\ a,b \in A$: $a\ R\ b \Longleftrightarrow b\ R\ a$.*

**(iii)** *Anti-Simétrica, se $\forall\ a,b,c \in A$: $a\ R\ b$ e $b\ R\ a \Longrightarrow a = b$.*

**(iv)** *Transitiva, se $\forall\ a,b,c \in A$: $a\ R\ b$ e $b\ R\ c \Longrightarrow a = c$.*

### 1.3.15 Relação de Equivalência

**Definição 1.3.17.** *Uma relação* $R \in 2^{A \times A}$ *chama-se relação de equivalência em* $A$*, se* $R$ *é ao mesmo tempo:*

**(i)** *Reflexiva.*

**(ii)** *Simétrica.*

**(iii)** *Transitiva.*

O conjunto de todos as classes de equivalência em A denotamos por $Eq(A)$. Temos então, $Eq(A) \subseteq 2^{A \times A}$.

**Definição 1.3.18.** *Se* $R$ *é uma relação de equivalência em* $A$ *e se* $a \in A$*, então colocamos*

$$\overline{a} = \{\ x \in A\ /\ x\ R\ a\ \}$$

$\overline{a}$ *chama-se classe de equivalência de* $a$ *mod* $R$ *(lido:* $a$ *módulo* $R$*).*

Denotamos a relação de equivalência R por $\sim$ ou $\equiv$, ou seja, se $(a, b) \in R$ usaremos a notação $a \sim b$ ou $a \equiv b$ , que é lido: "$a$ equivalência a $b$ módulo R".

**Proposição 1.3.15.1.** *Considere* $A \neq \emptyset$ *um conjunto e* $\sim \in Eq(A)$*. Então valem para todos os* $a, b \in A$*.*

**a)** $\in \overline{a}$*, particularmente,* $\overline{a} \neq \phi$*.*

**b)** $\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow a \sim b$*.*

**c)** $\overline{a} \neq \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$*.*

**d)** $\dot{\bigcup\limits_{a \in A}} \overline{a} = A$*.*

***Demonstração:***

**a)** *Pela reflexividade de* $\sim$ *temos* $a \in \overline{a} \neq \phi$, $\forall\ a \in A$*.*

**b)** *(*$\Longrightarrow$*) De* $\overline{a} = \overline{b}$ *segue* $a \in \overline{b} = \{\ x \in A\ /\ x \sim b\ \}$*. Logo* $a \sim b$*. (*$\Longleftarrow$*) Considere* $a \sim b$*. Para todo* $x \in \overline{a}$ *temos* $x \sim a \sim b$ *e daí* $x \in \overline{b}$*, segue* $\overline{a} \subseteq \overline{b}$*, da mesma forma:* $\forall\ x \in \overline{b}$ *temos* $x \sim b \sim a$ *e daí* $x \in \overline{a}$*. Segue* $\overline{b} \subseteq \overline{a}$*. Logo* $\overline{a} = \overline{b}$*.*

**c)** *Suponhamos* $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ *e seja* $x \in \overline{a} \cap \overline{b}$*, temos* $a \sim x \sim b$ *e daí por* $b$ $\overline{a} = \overline{b} = \overline{x}.$

**d)** *Claramente,* $\dot{\bigcup\limits_{a \in A}} \overline{a} = A$*, mas como* $a \in \overline{a}$*, temos de fato* $\dot{\bigcup\limits_{a \in A}} \overline{a} = A$.

■

### 1.3.16 Relação de Ordem

**Definição 1.3.19.** *Uma relação* $R \in 2^{A \times A}$ *chama-se relação de ordem sobre* $A$*, se* $R$ *é ao mesmo tempo:*

**(i)** *Reflexiva.*

**(ii)** *Anti-Simétrica.*

**(iii)** *Transitiva.*

### 1.3.17 Aplicações(Funções)

**Definição 1.3.20.** *Considere* $A, B \neq \emptyset$ *dois conjuntos. Uma relação* $f \in 2^{A \times B}$ *chama-se aplicação (função) de* $A$ *em* $B$*, se*

**i)** $\forall\ a\ \exists\ b \in B$*, tal que* $afb$*, isto é, o domínio de* $f$ *é todo* $A$.

**ii)** $\forall\ a \in A\ \forall\ b, b'$ *temos:* $afb$ *e* $afb' \Longrightarrow b = b'$*, isto é, cada elemento* $a \in A$ *associa-se à um único elemento* $b \in B$.

**Definição 1.3.21.** *Este único* $b \in B$*,* $f$*-relaciona-se com* $a \in A$ *chama-se valor de* $f$ *em* $a$ *e é escrito com* $b = f(a)$.

**Definição 1.3.22.** *A imagem de* $f$*, isto é,* $I(f) = \{\ b \in B\ /\ \exists\ a \in A \text{ com } afb\ \}$ *é agora o conjunto de valores de* $f$.

*Portanto,* $I(f) = \{\ f(a)\ /\ a \in A\ \}$ *e escreve-se também* $I(f) = f(a)$.

O conjunto de todas as aplicações de A em B denotamos por:

$$B^A = \{\ f \in 2^{A \times B}\ /\ f \text{ é uma aplicação de A em B }\}$$

temos então,

$$B^A \subseteq 2^{A \times B}.$$

Se $f \in B^A$, então:

$$f = \{ \ a, f(a) \ / \ a \in A \ \}$$

**Exemplo 1.3.3. (i)** *Toda função $f \in B^N$ é denominado uma sequência em B.*

*Se $f(n) = b_n \in B$ é o valor de $f$ em $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$f \ = \{ \ [n, f(n)] \ / \ n \in \mathbb{N} \ \} = \{ \ (n, b_n) \ / \ n \ = \ 1, \ 2, \ 3, \ ... \ \}$$

*A sequência f também pode ser escrita com:*

$$f \ = \ (b_1, b_2, ..., b_n) \ = \ (b_n)_n \in N$$

*$B^N$ é então o conjunto de todas as sequências em B.*

**(ii)** *Considere $A \neq \emptyset$ um conjunto e $R \in E_q(A)$.*

*Considere $A \ / \ R \ = \{ \ \overline{a} \ / \ a \in A\}$ o conjunto quociente de A mod R,*

*Em que $\forall \ a \in A$: $\overline{a} \ = \{ \ x \in A \ / \ x \ R \ a \ \}$ é classe de equivalência de a mod R. A aplicação*

$$g \in (A/R)^A$$

*Definida por $g(a) \ = \overline{a}$, $\forall \ a \in A$ chama-se aplicação canônica de A sobre A/R. Temos*

$$g \ = \{ \ (a, \overline{a}) \ / \ a \in A \ \},$$

*Isto é, a aplicação canônica associa a cada elemento $a \in A$ a sua classe de equivalência mod R na qual ele está.*

**(iii)** *Considere $A_1, A_2, ..., A_r \neq \emptyset$ conjuntos e $M = A_1 \times A_2 \times ... \times A_r$, seu produto cartesiano seja $i \in \{1, 2, ..., r\}$. A aplicação $h_i \in {A_i}^M \subseteq M^M$ tal que $h_i \ (a_1, a_2, ..., a_r)$ $= a_i$, $\forall \ (a_1, a_2, ..., a_r) \in M$, chama-se a projeção de M sobre $A_i$ (também: a i-ésima projeção de M).*

*Por exemplo, se $M = A \times B = \{(a, b) \ / \ a \in A, \ b \in B\}$ duas projeções de M sobre A e sobre B são*

$$h_1\{(a,b)\} = a \text{ e } h_2\{(a,b)\} = b, \forall\ (a,b) \in M.$$

**Definição 1.3.23.** *Considere $A$, $B \neq \emptyset$ um conjunto. O conjunto*

$$\delta_A = \{(a,\ a)\ /\ a \in A\} \subseteq A^2$$

*chama-se a diagonal de $A$ ou ainda, $A^2$.*

**Exemplo 1.3.4.** *Para $A = \mathbb{R}$ temos*

*$\mathbb{R}^2 = \{(x,\ y)\ /\ x\ .\ y \in \mathbb{R}\}$ é o plano cartesiano (Euclidiano) real,*

*$\delta_{\mathbb{R}} = \{(x,\ x)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ é a sua diagonal (a primeira mediana).*

**Proposição 1.3.17.1.** *Se $A$ é um conjunto e $R \in E_q(A)$ é uma relação em $A$ então:*

$$R \in A^A \Longleftrightarrow R = \delta_A\ ,$$

*Isto é, uma relação de equivalência é uma aplicação se, e somente se, ela é uma relação de igualdade.*

***Demonstração:***

*($\Longleftarrow$)Temos que $\delta_A = \{\ (a,a)\ /\ a \in A\}$, ou seja, o $D(\delta_A) = A$, e $\forall\ a \in A$, $\forall\ b, b'$ $\in A$, temos: $a'\ \delta_A\ b$ e $a\ \delta_A\ b' \Longrightarrow b = a = b'$. Logo $\delta_A$ é uma aplicação.*

*($\Longrightarrow$) Se $R \neq \delta_A$, vai existir um par $(a,b) \in R$ com $a \neq b$. Vamos ter $(a,a) \in R$ e também $(a,b) \in R$, ou seja, $R$ "assume valores distintos" em $a$.*

*Logo, $R \notin A^A$.*

**Proposição 1.3.17.2.** *Para qualquer relação $R \in 2^{A\times B}$, temos:*

**i)** $\delta_A \subseteq R^{-1} \circ R \Longleftrightarrow D(R) = A.$

**ii)** $\delta_B \subseteq R \circ R^{-1} \Longleftrightarrow \forall\ a \in D(R)/\exists$ *um único* $b \in B$ *com* $a\ R\ b$

***Demonstração:***

*a) "$\Longrightarrow$" $\forall\ a \in A$, temos $(a,a) \in \delta_A$, daí $(a,a) \in R^{-1} \circ R$. Isto significa que $\exists\ b \in B$ com $\{\ a\ R\ b$ e $b\ R^{-1}\ a\} \Longrightarrow (a,b) \in R$.*

*Portanto, $D(R) = A$.*

*"$\Longleftarrow$" $\forall\ a \in A$, temos que $(a,a) \in \delta_A$, daí $\exists\ b \in B$ com $(a,b) \in R$, temos então $\{a\ R\ b\ e\ b\ R^{-1}\ a\} \Longrightarrow (a,a) \in R^{-1} \circ R$.*

*Logo, $\delta_A \subseteq R^{-1} \circ R$.*

*b) "$\Longrightarrow$" Considere $a \in A$ , $b, b' \in B$ com $a\ R\ b$ e $a\ R\ b'$, vale então $\{b\ R^{-1}\ a\ e\ a\ R\ b'\}$. Isto significa que $(b,b') \in R \circ R^{-1}$. Como $R \circ R \subseteq \delta_B$, então $b = b'$. "$\Longleftarrow$" Considere dado qualquer $(b,b') \in R \circ R^{-1}$. Existe então $a \in A$ com $\{b\ R^{-1}\ a\ e\ a\ R\ b\}$. Isto significa que $\{a\ R\ b'\ e\ a\ R\ b'\}$, daí $b = b'$.*

*Logo, $(b,b') = (a,b) \in \delta_B$ e $\delta_B \supseteq R \circ R^{-1}$.*

Consequência: Considere $f \in 2^{A\times B}$. Equivalentes são:

**a)** $f \in B^A$.

**b** $\delta_A \subseteq f^{-1} \circ f$ e $\delta_B = f \circ f^{-1}$.

**Proposição 1.3.17.3.** *Conjunto $A, B \neq \emptyset$ conjuntos, $f, g \in 2^A$ duas aplicações de $A$ em $B$. Então:*

$$f = g \Longleftrightarrow f(a) = g(a),\ \forall\ a \in A,$$

*Isto é, duas aplicações de $A$ em $B$ coincidem se, e somente se, elas assumem e mesmo valor para todos os argumentos.*

***Demonstração:***

*Temos:*

$$f = \{\ (a,b) \in A \times B\ /\ a\ f\ b\} = \{\ (a, f(a))\ /\ a \in A\}\ e$$
$$g = \{\ (x,y) \in A\ x\ B\ /x\ g\ y\} = \{\ (x, g(x))\ /\ x \in A\}.$$

*"$\Longleftarrow$" $f(a) = g(a)$, $\forall\ a \in A$, significa então $\{(a, f(a))\} = \{(a, g(a))\}\ \forall\ a \in A$. Portanto, $f = g$.*

*"$\Longrightarrow$" Se $f = g$, então $(a, f(a)) \in g\ \forall\ a, \in A$. Portanto, $\forall\ a \in A\ \exists\ x \in A$ com $\{(a, f(a))\} = \{(x, g(x))\}$, segue que $a = x$ e $f(a) = g(x) = g(a)$.*

**Observação 1.3.8.** *Considere $A, B$ dois conjuntos finitos, sendo $|A| = m$ e $|B| = n$, então:*

$$|B^A| = |B|^{|A|} = B^m = n^m$$

***Demonstração:*** *Podemos supor* $A = \{1, 2, \ldots, m\}$. *A afirmação fica claro se lembrarmos* $|B^m| = |B|^m$.

$\blacksquare$

**Aplicações Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras**

**Definição 1.3.24.** *Considere* $A, B \neq \emptyset$ *conjuntos e* $f \in B^A$. *Dizemos que* $f$ *é uma aplicação*

**a)** *Injetora de A em B, se* $\forall\ a, a' \in A$ *com* $f(a) = f(a')$ *implica* $a = a'$. *Equivalente:* $a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$.

**b)** *Sobrejetora de A em B , se* $\forall\ b \in B$, $\exists\ a \in A$ *tal que* $f(a) = b$.

**c)** *Bijetora de A em B, se f for injetora e sobrejetora.*

*Notação*: Se A e B são conjuntos, denotamos por:

$$Inj(A, B),\ Sur(A, B) \text{ e } Bij(A, B)$$

os conjuntos das aplicações injetoras, sobrejetoras e bijetoras, respectivamente. Então,

$$Bij(A, B) = Inj(A, B) \cap Sur(A, B) \subseteq Inj(A, B) \cup Sur(A, B) \subseteq B^A.$$

no caso $A = B$, o conjunto $Bij(A, A)$ é escrito como:

$$S_A = Bij(A, A)$$

e os elementos em $S_A$ chamam-se as permutações de A, isto é, $S_A$ é o conjunto de todas as permutações em A.

Capítulo 2

# A Construção dos Números Naturais

Neste capítulo iremos considerar que os números naturais podem ser ordenados em uma sequência, em que cada elemento tem um "sucessor", permitindo, assim, construir um conjunto que satisfaça os axiomas de Peano.

## 2.1 Axiomática de Peano

Peano considera três entes primitivos: *número natural, zero e sucessor*, correlacionados por cinco axiomas. Indicaremos por $\sigma(n)$ o "*sucessor*" do número $n$ e, para indicar o zero utiliza-se o símbolo 0.

Os axiomas apresentados são o seguinte:

1. 0 é um número natural.

2. Todo número natural $n$ tem um "sucessor" $\sigma(n)$.

3. 0 não é "sucessor" de nenhum número.

4. Se $\sigma(n) = \sigma(m)$, então $n = m$

5. Considere $S$ um conjunto de números naturais tal que:

   **(a)** $0 \in S$

   **(b)** Se $n \in S$, implicar $\sigma(n) \in S$.

   Então, $S$ é o conjunto de todos os números naturais.

Os axiomas de Peano sustentam-se nas ideias intuitivas de conjunto e função, em que o conceito primitivo de sucessor indica uma função, isto é, cada número associa-se a outro; e, de acordo com o princípio de indução, essa função está definida em todo $\mathbb{N}$.

Assim sendo, podemos refrasear os axiomas de Peano. A saber:

Considere que existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $\sigma$: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

**P1.** Existe um elemento $0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \notin \text{Im}\ (\sigma)$.

**P2.** A função $\sigma$ é injetora.

**P3.** Considere $A$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

**(i)** $0 \in A$.

**(ii)** Se $n \in A$, implicar $\sigma\ (n) \in A$.

Então $A = \mathbb{N}$.

Denotaremos por $\mathbb{N}^+$ o conjunto dos números naturais diferentes de zero. Observe que $\sigma(0) \in \mathbb{N}^+$ e, de acordo com P.2, tem-se que $0 \neq \sigma(0)$; provando que $\mathbb{N}^+$ é não-vazio, mostrando ainda, que todo natural diferente de zero é sucessor de algum número.

**Proposição 2.1.1.** $Im(\sigma) = \mathbb{N}^+$

***Demonstração:*** *Considerando o conjunto $A = 0 \cup Im(\sigma)$. Nota-se que, $0 \in A$ e, se $n \in A$, então $\sigma(n) \in A$ (pois $\sigma(n) \in Im(\sigma)$).*

*Pelo axioma P.3 temos que $A = \mathbb{N}$. Desta forma, dado um natural $n \in \mathbb{N}$, como $n \in A$ e $n \neq 0$, tem-se $n \in Im(\sigma)$.*

$\blacksquare$

**Definição 2.1.1.** *Considerando um natural $n \neq 0$, o número natural $m$ tal que $\sigma(m) = n$ denomina-se o antecessor de $n$, e $n$ denomina-se o sucessor de $m$.*

## 2.2 Operações com Números Naturais

Mostraremos que é possível definir as operações Soma e Produto no conjunto dos números naturais, demonstraremos ainda, as propriedades dessas operações.

### 2.2.1 Soma de Números Naturais

**Definição 2.2.1.** *Considere $n$ um natural não nulo, o número natural $m$ tal que $\sigma(m) = n$ denomina-se o antecessor de $n$, e $n$ denomina-se o sucessor de $m$.*

Designamos $m + n$ a adição de todo par de números $m$, $n \in \mathbb{N}$, Considere um $m$ arbitrariamente fixado, indicaremos $m+n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. De acordo com o axioma de Indução, a adição $m + n$ está definida para todo par de números naturais.

**Definição 2.2.2.** *Considere $m \in \mathbb{N}$ um número natural dado. Então:*

**(i)** $m + 0 = m$.

**(ii)** $m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$.

Com isso, é possível somar $m$ com 0, a segunda condição nos permite somar $m$ com o sucessor de 0, com o sucessor do sucessor de 0. Somando $m$ a todos os números naturais. Temos:

**Proposição 2.2.1.** *Considere $m \in \mathbb{N}$ um número natural. Então, a soma $m + n$ está definida para todo número natural $n$.*

***Demonstração:*** *Considere $A$ o conjunto de naturais $n$, no qual a soma $m + n$ está definida. De acordo com a condição (i) da definição, tem-se que,*

$$0 \in A,$$

*e da condição (ii) tem-se que, se a soma $m + n$ está definida, então, $m + \sigma(n)$ também define-se em $A$. Ou seja, se, $n \in A$, então $\sigma \in A$.*

*De fato: temos que,*

$$0 \in A \text{ e se } n \in A, \text{ então } \sigma(n) \in A,$$

*pois,*

$$m + \sigma(n) = \sigma(m + n),$$

*Portanto, por indução temos que $A = \mathbb{N}$, como $m$ é arbitrário,*

$$A = \mathbb{N}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$

*ou seja $m + n$ está definida para todo par $(m, n)$ de números naturais.*

■

**Proposição 2.2.2.** *Para toda terna $m$, $n$, $p$ de números naturais arbitrários, são verdadeiras as afirmações:*

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

***Demonstração:*** *Considere $S$ o conjunto dos números naturais $p$ tais que,*
$m + (n + p) = (m + n) + p$
*para todo par de naturais $m$, $n$. Devemos provar que $S = \mathbb{N}$, temos que:*

$$m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0.$$

*Portanto,*

$$0 \in S.$$

*Supondo a validade para $p \in S$,ou seja:*

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

*Mostraremos também para*

$$\sigma\ (p) \in S.$$

*De fato:*

$m + (n + \sigma(p)) = m + \sigma(n + p) = \sigma(m + (n + p)) = \sigma((m + n) + p) =$
$= (m + n) + \sigma(p).$

■

**Proposição 2.2.3.** *Para qualquer número natural $m$, tem-se que:*

$$m + 0 = m = 0 + m.$$

***Demonstração:*** *Considere* $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 0 + m = m\}$. *Logo,* $0 \in A$.

*Se* $0 + m = m$. *Temos que:*

$$0 + \sigma(m) = \sigma(0 + m) = \sigma(m)$$

*Portanto, por hipótese de indução, temos que:*

$$A = \mathbb{N}.$$

**Definição 2.2.3** (Elemento neutro aditivo)**.** *O número natural e que satisfaz*

$$e + n = n + e = n,$$

*para todo natural n é dito elemento aditivo.*

*Afirmação: É fácil ver que* $0 = e$, *é o elemento neutro multiplicativo, pois:*

$$0 + n = n + 0 = n,$$

*Portanto, 0 é elemento neutro aditivo.*

**Proposição 2.2.4.** *O neutro aditivo é único.*

***Demonstração:*** *Suponha u um elemento neutro e consideremos a soma,*

$$0 + u,$$

*como,*

$$u, \text{ é neutro},$$

*por hipótese, temos,*

$$0 + u = 0.$$

*Como provamos que 0 é neutro da soma, verifica-se que:*

$$0 + u = u,$$

*Portanto, temos que:*

$$0 = u.$$

*Assim,* 0 *é o único elemento neutro para a operação soma.*

Para demonstrar a próxima proposição introduziremos o elemento 1.

**Definição 2.2.4.** *Indicaremos por 1 o número natural que é o sucessor de 0, isto é,* $1 = \sigma(0)$.

**Proposição 2.2.5.** *Para qualquer natural m, tem - se, que* $\sigma(m) = 1 + m$.

***Demonstração:*** *Considere o conjunto:*

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid \sigma(m) = 1 + m\}.$$

*Note que* $0 \in A$, *pois* $\sigma(0) = 1 + 0 = 1$. *Suponha que* $m \in A$. *Mostraremos que:*

$$\sigma(m) \in A.$$

*como,*

$$\sigma(m) = 1 + m$$

*consequentemente,*

$$\sigma(\sigma(m)) = \sigma(1 + m) = 1 + \sigma(m).$$

*ou seja:*

$$\sigma(m) \in A.$$

*pelo Princípio de indução, temos que:*

$$A = \mathbb{N}.$$

■

**Proposição 2.2.6.** *Para quaisquer m, n de números naturais, tem-se que:*

$$m + n = n + m.$$

***Demonstração:*** *Considere o conjunto:*

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid m + n = n + m, \forall\ n\ \mathbb{N}\}.$$

*Note que* $0 + n = n + 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*,daí* $0 \in A$*. Suponha agora que* $m \in A$*. Provaremos que* $\sigma(m) \in A$*. Temos:*

$n + \sigma(m) = \sigma(n + m) = \sigma(m + n) = 1 + m + n = \sigma(m) + n.$

*Desta forma, do axioma P.3 segue, que:*

$$A = \mathbb{N}.$$

■

**Proposição 2.2.7** (Lei do Cancelamento da Soma)**.** *Para toda terna* $a, b, c$ *de números naturais, se* $a + c = b + c$*, então* $a = b$*.*

***Demonstração:*** *Considere*

$$A = \{z \in \mathbb{N} / \text{ se } a + z = b + z \text{ então } a = b\}.$$

*obviamente* $0 \in A$*. Considere então* $m \in A$*. Mostraremos que* $\sigma(m) \in A$*.*

*Se* $a + \sigma(m) = b + \sigma(m)$*, então* $\sigma(a + m) = \sigma(b + m)$*. Como* $\sigma$ *é injetora, vem que* $a + m = b + m$*. Como* $m \in A$*, segue que* $a = b$*.*

*Pelo principio de indução decorre que*

$$A = \mathbb{N}.$$

■

### 2.2.2 Produto de Números Naturais

**Definição 2.2.5.** *Considere* $m \in \mathbb{N}$ *um natural dado, então:*

**(i)** $m \cdot 0 = 0.$

**(ii)** $m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m.$

**Observação 2.2.1.** *Em (ii) acima faça* $n = 0$*, daí* $m \cdot \sigma(0) = m \cdot 0 + m$

$$m \cdot 1 = 0 + m$$
$$m \cdot 1 = m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

∎

**Proposição 2.2.8.** *Considere $m \in \mathbb{N}$ um número natural dado. Então, o produto $m \cdot n$ está definido para todo número naturais $n \in \mathbb{N}$.*

***Demonstração:*** *Considere $A$ como sendo o conjunto de números $n$ para os quais o produto $m \cdot n$ está definido, isto é,*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n \; está \; definido\}$$

*Conforme (i) da definição 2.2.4 temos que $m \cdot 0 = 0$, ou seja, $0 \in A$.*

*Suponha que $m \cdot n$ está bem definido. Daí $m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m$ está bem definida, pois a soma $m \cdot n + m$ está bem definida.*

*Portanto, $\sigma(n) \in A$, e pelo princípio de indução*

$$A = \mathbb{N}$$

∎

**Proposição 2.2.9.** *Para todo natural $n$ vale que*

$$1 \cdot n = n = n \cdot 1.$$

***Demonstração:***

**(i)** $1 \cdot n = n$, *de fato:*

*Considere $A$ como sendo o conjunto formado por todos os naturais $m$ tais que $1 \cdot n = n$, isto é,*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot n = n\}.$$

*Note que da definição 2.2.4, condição (i) segue que $1 \cdot 0 = 0$, basta tomar $m$ = 1, assim 0 $\in A$. Temos também que 1 $\in A$, pois $1 \cdot 1 = 1$ σ(0) $= 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.*

*Suponha que $1 \cdot n = n$. Daí $1 \cdot$ $\sigma(n) = 1 \cdot n + 1 = n + 1 = \sigma(n)$.*

*Portanto,*

$$\sigma(n) \in A.$$

*Logo,*

$$A = \mathbb{N}.$$

**(ii)** $n \cdot 1 = n$, *de fato;*

*De forma análoga tome*

$$A = \{\ n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1 = 1\}.$$

*daí conforme condição (i) da definição 2.2.4 tome m = 0, logo,* $0 \cdot 0 = 0$, *isto é, 0* $\in \mathbb{N}$. *Temos que* $1 \cdot 1 = 1 \cdot\ \sigma(0)\ = 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$, *isto é,*

$$1 \in A.$$

*Suponha que* $1 \cdot n = n$, *daí*

$\sigma(n) \cdot 1 = (n+1) \cdot 1 = (n+1) \cdot \sigma(n)\ = (n+1) \cdot 0 + (n+1) = 0 + (n+1) = \sigma(n).$

*Logo,* $\sigma(n) \in A$.

*Portanto,*

$$A = \mathbb{N}.$$

■

**Definição 2.2.6** (Elemento neutro multiplicativo)**.** *O número natural e que satisfaz* $e \cdot n = n \cdot e = n$, *para todo natural n é dito elemento multiplicativo.*

*Afirmação: É fácil ver que 1 = e, é o elemento neutro multiplicativo, pois:*

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n.$$

*Portanto, 1 é elemento neutro multiplicativo.*

**Proposição 2.2.10.** *O elemento neutro multiplicativo é único.*

***Demonstração:*** *Considere 1, 1' dois números naturais tais que,*

$$1 \cdot m = m = m \cdot 1 \ \text{ e } 1' \cdot m = m \cdot 1'$$

*para todo número natural m. daí* $1 = 1 \cdot 1'$ *pois 1' é o elemento neutro, por outro lado* $1 \cdot 1' = 1'$, *pois 1 é também elemento neutro, logo* $1 = 1 \cdot 1' = 1'$, *portanto 1 = 1'.*

■

**Proposição 2.2.11.** *Considere a terna m, n, p de naturais, então:*

$$(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p.$$

***Demonstração:*** *Considere o seguinte conjunto*

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid (m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p\}.$$

*Daí note que*

$$(m+n) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = m \cdot 0 + n \cdot 0,$$

*isto é, 0* $\in A$.

*Note também*

$$(m+n) \cdot 1 = (m+n) \cdot \sigma(0) = (m+n) \cdot 0 + (m+n) = m + n = m \cdot 1 + n \cdot 1.$$

*logo 1* $\in \mathbb{N}$

*Suponha que* $(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$. *Daí,*

$(m + n)\ \sigma(p) = (m+n) \cdot p + (m+n) = m \cdot p + n \cdot p + m + n =$
$= m \cdot p + m + n \cdot p + n = m\ \sigma(p) + n,$

*Logo,*

$$A = \mathbb{N}.$$

**Proposição 2.2.12.** *Considere m, n dois naturais, então:*

$$m \cdot n = n \cdot m$$

***Demonstração:*** *Considere*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n = n \cdot m, \forall\ m \in \mathbb{N}\}.$$

*Daí* $m \cdot 0 = 0 \cdot m$, *logo* $0 \in A$, *e vale também* $m \cdot 1 = 1 \cdot m$, *isto é,* $1 \in A$. *Suponha que* $m \cdot n = n \cdot m$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$. *Daí,*

$$m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m = n \cdot m + 1 \cdot m = (m+1) \cdot m = \sigma(n) \cdot m,$$

*isto é,* $\sigma \in A$.

*Portanto,*

$$A = \mathbb{N}.$$

■

**Observação 2.2.2.** *Como consequência da* ***proposição 2.2.12****. Vale para toda terna* $m$, $n$, $p$ *de naturais que:* $p(m+n) = p \cdot m + p \cdot n$.

***Demonstração:*** *Imediato.*

**Proposição 2.2.13.** *Considere* $m$, $n$ *dois naturais, então* $m \cdot n = n \cdot m$.

***Demonstração:*** *Considere*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n = n \cdot m, \forall\ m \in \mathbb{N}\}.$$

*daí* $m \cdot 0 = 0 \cdot m$, *logo* $0 \in A$, *e vale também* $m \cdot 1 = 1 \cdot m$, *isto é,* $1 \in A$. *Suponha que* $m \cdot n = n \cdot m$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$. *Daí*

$$m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m = n \cdot m + 1 \cdot m = (m+1) \cdot m = \sigma(n) \cdot m,$$

*isto é,* $\sigma \in A$.

*Portanto,*

$$A = \mathbb{N}.$$

■

**Proposição 2.2.14.** *Para toda terna* $m$, $n$, $p$ *de naturais, tem-se*

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p).$$

***Demonstração:*** *Considere o seguinte conjunto*

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid (m \cdot n)p = m \cdot (n \cdot p)\}.$$

*daí* $(m \cdot n)0 = 0 = m \cdot 0 = m(n \cdot 0)$, *isto é*, $0 \in A$, *temos também que*

$$(m \cdot n) \cdot 1 = (m \cdot n) \cdot \sigma(0) = (m \cdot n) \cdot 0 + m \cdot n = 0 + m \cdot n = m \cdot n = m(n \cdot 1),$$

*ou seja,* $1 \in A$*. Suponha que* $(m \cdot n)p = m(n \cdot p)$*, para algum* $p \in \mathbb{N}$*. Daí,*

$$(m \cdot n) \cdot \sigma(p) = (m \cdot n)p + m \cdot n = m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n = m \cdot (np \cdot n) = m \cdot (n \cdot \sigma(p)).$$

*Logo* $\sigma(p) \in A$*.*

*Portanto,*

$$A = \mathbb{N}.$$

■

## 2.3 Relação de Ordem sobre $\mathbb{N}$

**Definição 2.3.1.** *Dados* $m, n$ *dois números naturais quaisquer, diz-se que* $m$ *é menor do que ou igual a* $n$*, que simbolizamos por* $m \leq n$*, se existe algum natural* $r$ *tal que* $m + r = n$*. Ou seja,*

$$m \leq n \text{ se existi } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } m + r = n$$

**Proposição 2.3.1.** *Para quaisquer* $a$ *e* $b$ *números naturais, verifica-se apenas uma das condições:*

**(i)** $a = b$*;*

**(ii)** *Existe* $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$*, tal que* $b = a + x$*.*

**(iii)** *Existe* $y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$*, tal que* $a = b + y$*.*

***Demonstração:*** *Primeiro mostraremos que não podem ocorrer duas condições simultaneamente. De fato, se ocorrem (i) e (ii), segue que* $a = a + x$ *ou* $a + 0 = a + x$*. Da proposição 2.2.14, vem que* $x = 0$*, uma contradição.*

*Similarmente, não podem ocorrer (i) e (iii).*

*Suponhamos, então, que ocorrem (ii) e (iii).*

*Então, $b = a + x = (b + y) + (y + x)$. Como acima, $y + x = 0$. Como $x \neq 0$, vem que $x = \sigma(x')$, para algum $x' \in \mathbb{N}$. Então, $y + x = y + \sigma(x') = \sigma\ (y + x') = 0$, e está na imagem de $\sigma$, o que contradiz a proposição 2.1.1.*

*Provaremos agora que deve acontecer uma das três condições. Considere então "a" um natural dado, e*

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid \text{ou } z = a + x, \text{ para algum } x \neq 0, \text{ ou } a = z + y \text{ para algum } y \neq 0\}.$$

*Obviamente, $0 \in A$, pois ou $0 = a$ ou $0 \neq a$ e, neste último caso, segue que $a = 0 + a$; isto é, 0 verifica a última condição.*

*Considere então $m \in A$, e mostraremos que $\sigma(m) \in A$. Se $m = a$, então*

$$\sigma(m) = \sigma(a) = a + 1,$$

*e verifica-se a segunda condição. Considere então $m \in A$, e mostraremos que $\sigma(m) \in A$. Se $m = a$, então $\sigma(m) = \sigma(a) = a + 1$, e verifica-se a segunda condição. Se $m = a + x$, então $\sigma(m) = \sigma(a + x) = a + \sigma(x)$, e novamente a segunda condição. Suponhamos, então, que $a = m + y$. Como $y \neq 0$, vem que $y = \sigma(y')$, para algum $y' \in \mathbb{N}$. Logo $a = m + y = m + \sigma(y') = m + y' + 1 = m + 1 + y' = \sigma(m) + y'$ Se $y' = 0$, vale a primeira condição para $\sigma(m)$. Se $y' \neq 0$, vale a terceira condição. Pelo princípio de indução, temos que $A = \mathbb{N}$. Suponhamos, então, que $a = m + y$. Como $y \neq 0$, vem que $y = \sigma(y')$, para algum $y' \in \mathbb{N}$. Logo,*

$$a = m + y = m + \sigma(y') = m + 1 + y' = \sigma(m) + y'$$

*Se $y' = 0$, vale a primeira condição para $\sigma(m)$. Se $y' \neq 0$, vale a terceira condição.*

*Pelo princípio de indução, temos que*

$$A = \mathbb{N}.$$

∎

**Proposição 2.3.2.** *A relação $\leq$, é uma relação de ordem sobre $\mathbb{N}$.*

***Demonstração:***

**(i)** *Note que $a = a$ para qualquer natural $a$, daí $a \leq a$, ou seja, a relação é reflexiva.*

**(ii)** *Considere $a$ e $b$ dois naturais tais que $a \leq b$ e $b \leq a$. Suponha que $a \neq b$, daí pela* ***proposição*** 2.3.1 *$a < b$ ou $b < a$. Se $a < b$ como $b \leq a$ e $a \neq b$ segue que $b < a$, contradição. Para o caso em que $b < a$ o raciocínio é análogo.*

**(iii)** *Considere $a, b$ e $c$ números naturais tais que $a \leq b$ e $b \leq c$. Assim, existem naturais $r, s$ satisfazendo $b = a + r$ e $c = b + s$, segue-se $c = a + (r + s)$, isto é, $a \leq b$.*

**Proposição 2.3.3.** *Para toda terna $a, b$ e $c$ de naturais valem:*

**(1)** *Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$.*

**(2)** *Se $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$.*

***Demonstração:***

**(1)** *Por hipótese $a \leq b$, isto é, existe $r$ natural tal que $b = a + r$. Daí $b + c = a + c + r$, então $a + c \leq b + c$.*

**(2)** *Por hipótese $a \leq b$ e $0 \leq c$, isto é, existe $r$ natural tal que $b = a + r$. Daí $b \cdot c = (a + r) \cdot c = a \cdot c + r \cdot c$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$.*

**Proposição 2.3.4.** *Considere $x$ e $y$ dois naturais quaisquer. Então:*

**(i)** *Se $x \neq 0$, $x \geq 1$.*

**(ii)** *$x < \sigma(y)$ se e somente se $x \leq y$.*

**(iii)** *$\sigma(y) \leq x$ se e somente se $y \leq x$.*

***Demonstração:*** *Para (i), suponhamos que $x < 1$. Logo, $1 = x + v$, para algum $v \in \mathbb{N}$ e $v \neq 0$. Como $v \neq 0$, vem que $v = \sigma(v')$, com $v' \in \mathbb{N}$. Substituindo, vem $1 = x + v = x + \sigma(v') = x + v' + 1$. Da lei do cancelamento para a soma, da* ***preposição 2.2.8***, *vem $x + v' = 0$. Como $x \neq 0$, tem-se que $x = \sigma(x')$, com $x' \in \mathbb{N}$. Então,*

$$\sigma(x') + v' = \sigma(x' + v') = 0,$$

*e 0 está na imagem de $\sigma$, o que contradiz a* ***proposição 2.2.1***.

*Para (ii), suponhamos primeiro que $x \leq y$, isto é, $x < y$ ou $x = y$. No primeiro caso, vem que $x = y + r$, com $r \in \mathbb{N}$. Logo,*

$$\sigma(y) = \sigma(x + r) = x + \sigma(r),$$

*e* $x < \sigma(y)$. *No segundo caso, tem-se que* $\sigma(y) = \sigma(x) = x + 1$, *e* $x < \sigma(y)$.

*Reciprocamente, suponhamos que* $x < \sigma(y)$. *Logo,* $\sigma(y) = x + s$, *com* $s \neq 0$. *Fazendo* $s = \sigma(s')$, $s' \in \mathbb{N}$, *tem-se*

$$\sigma(y) = x + s = x + \sigma(s') = \sigma(x + s')$$

*e, consequentemente,* $y = x + s'$. *Portanto,* $x \leq y$.

*Para (iii), suponhamos primeiro que* $y < x$ *e que* $x\sigma(y)$. *De (ii), vem que* $x \leq y$, *um absurdo. Suponhamos agora que* $\sigma(y) \leq x$ *e que* $x \leq y$. *De (ii), segue-se que* $x < \sigma(y)$, *novamente uma contradição.*

**Princípio da Boa Ordem:** Todo Conjunto não-vazio de inteiros não negativos contém um elemento mínimo.

**Demonstração:** Considere $A \subset \mathbb{N}$ um tal conjunto, e suponhamos que A não tenha mínimo. Considere então $B = \{x \in \mathbb{N}/x < y, \ \forall y \in A\}$.Então, $B \cap A = \emptyset$. De fato, suponhamos que exista $x \in (B \cap A)$, então $x < x$, que contradiz a anti- simetria da relação de ordem. Provaremos agora que $B = \mathbb{N}$ o que implica $A = \emptyset$, uma contradição. De fato:

$0 \in B$, pois $0 \leq y$, $\forall\ y \in A$, e se 0 pertencesse a $A$, seria seu elemento mínimo, contrariando a suposição de que $A$ não possui mínimo. Logo, $0 < y$, $\forall y \in A$. Suponhamos agora que $x \in B$, $x \in B$, e mostraremos que $\sigma(x) \in B$. Para todo $y \in A$, tem-se que $x < y$. Logo, pela condição (iii) da **Proposição** 2.3.4, $\sigma(x) < y$. Se $\sigma(x) \in A$, então $\sigma(x)$ seria o elemento mínimo de $A$, novamente contrariando a suposição inicial. Logo $\sigma(x) < y$, $\forall\ y \in A$, e $\sigma(x) \in B$. Pelo princípio de indução temos que $B = \mathbb{N}$.

# Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo formalizar a ideia de que, os Números naturais podem ser obtidos a partir da adição sucessiva de unidades. Num certo sentido, os axiomas de Peano podem ser entendidos como um modelo de que, intuitivamente entendemos que sejam os números naturais, a verificação das propriedades que atribuímos aos números naturais e o fato de podermos definir intrinsecamente as operações de soma e multiplicação, a relação de ordem e também demonstrarmos o teorema Princípio da Boa Ordenação , mostrando ainda, que a axiomática de Peano constitui-se numa modelagem satisfatória dos números naturais.

Vale observar que a descoberta nem sempre diz respeito a um novo objeto, pode ser uma nova maneira de olhar para algo já conhecido por todos. Realmente, o mérito de Peano deve-se mais à descoberta de que seus axiomas são suficientes para caracterizar satisfatoriamente o conjunto dos números naturais do que na própria descoberta dos axiomas os quais podem até ser considerados intuitivamente óbvios e conhecidos no que se diz respeito ao conceito de contar. Correspondendo a isso, as dificuldades do estudante confrontado pela primeira vez com os axiomas de Peano não está tanto no entendimento desses axiomas, senão na compreensão das suas finalidades e usos e também na apreensão das técnicas matemáticas associadas.

# BIBLIOGRAFIA


[1] ABRAMO,Hefez. *Curso de Álgebra*. Vol.1. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2002.

[2] EVARISTO,J. *Introdução à Algebra Abstrata*. 2ª ed., Maceió: Formato Digital, 2010.

[3] FERREIRA, Jamil. *A Construção dos Números*.1ª ed., Rio de Janeiro: SBM (Coleção Textos Univesitários), 2010.

[4] GARCIA, Arnaldo.*elementos da Álgebra*. Projeto Euclides: IMPA. 2002.

[5] Jornal do Professor de Matemática.*Laboratório do Ensino da Matemática*. Maio, 2006. Disponível em http://www.ime.unicamp.br/lem (20/11/2010).

[6] LIMA, E.L. *Análise Real*. vol.1. 9ª ed., Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[7] LIMA, E.L. e outros. *A Matemática do Ensino Médio*. vol.1. 9ª ed., Rio de Janeiro: SBM (Coleção do Professor de Matemática,2006.

[8] MAIER, R.R., *Álgebra I. (Álgebra Abstrata). Textos de Aula*. 1995.

[9] MILIES,C.P.; COELHO,S.P. *Números - Uma Introdução à Matemática*. 3ª ed., São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2001.