



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

**MODELOS DE TURING:  
ANÁLISE DA ESTABILIDADE DOS MODELOS  
DE SCHNAKENBERG E DE GIERER E MEINHARDT**

JOCIANE CASTRO DA SILVA  
QUELE DAIANE FERREIRA RODRIGUES

**MODELOS DE TURING:  
ANÁLISE DA ESTABILIDADE DOS MODELOS  
DE SCHNAKENBERG E DE GIERER E MEINHARDT**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao  
colegiado de Matemática da Universidade Federal  
do Amapá, como parte das exigências para  
a obtenção do título de Licenciatura Plena em  
Matemática, sob a orientação do Prof<sup>o</sup>. DR.  
JOSÉ WÁLTER CÁRDENAS SOTIL.

JOCIANE CASTRO DA SILVA  
QUELE DAIANE FERREIRA RODRIGUES

**MODELOS DE TURING:  
ANÁLISE DA ESTABILIDADE DOS MODELOS  
DE SCHNAKENBERG E DE GIERER E MEINHARDT**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado pela comissão avaliadora do Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá. Composta pelos integrantes abaixo-relacionados:

**AVALIADORES:**

---

Profº. Dr. José Walter Cárdenas Sotil (Orientador)  
Universidade Federal do Amapá

---

Profº. Dr. Erasmo Senger  
Universidade Federal do Amapá

---

Profº. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco  
Universidade Federal do Amapá

Avaliado em: 10/03/2011

Macapá-AP  
2011

Eu, Jociane Castro, dedico este trabalho à minha mãe, Dona Graça e a minha filha, Raquel.

Eu, Quele Daiane, dedico este trabalho aos meus pais, Sr Lopes e Sr<sup>a</sup> Marlene e ao meu namorado e grande companheiro Rômulo Lima.

# Agradecimentos

Eu, Jociane Castro, quero agradecer primeiramente a Deus que me iluminou durante essa caminhada.

Aos meus familiares, em especial a minha mãezinha *Dona Graça*, que com seu apoio incondicional, me deu a oportunidade de concluir esse sonho. A minha filha *Raquel* que mesmo sem saber me deu forças para continuar.

Aos meus professores, à eles a minha eterna gratidão pelos conhecimentos a mim concedidos durante esses quatro anos.

À Quele, minha companheira neste trabalho, e sua família, pois me receberam em sua casa durante nossa jornada. Enfim, aos meus amigos/irmãos de turma, que muitas vezes me ajudaram, mesmo sem perceber, nas horas mais difíceis.

A todas essas pessoas o meu MUITO OBRIGADA.

Eu, Quele Daiane, agradeço primeiramente à Deus, por Ele ter me dado forças para enfrentar todas as dificuldades e hoje poder estar realizando este sonho.

Agradeço ao *Profº Dr. Walter Cárdenas*, por ter aceitado o convite para ser nosso orientador, pela sugestão do tema, pela dedicação e compreensão em todos os momentos, homem sábio com quem aprendi muitas coisas, um professor que pretendo ter como exemplo para minha vida profissional.

Gostaria de estender meus agradecimentos ao *Profº Dr. Guzmán Chamilco*, o qual ministrou aula desde o primeiro semestre para minha turma, onde desfrutei de grande conhecimento, e hoje o mesmo compõe a banca examinadora. Agradeço também ao *Profº Dr. Erasmo Senger* por ter aceitado o convite para participar da banca e pela grande contribuição nestes quatros anos de curso.

À minha parceira neste trabalho, *Jociane*, pela amizade, companheirismo e de-

sempenho dedicados a esse trabalho.

À minha família, especialmente aos meus pais *Raimundo Lopes Rodrigues* e *Maria Marlene Lopes Ferreira*, pelo apoio dado durante esses quatro anos de curso, pois não foram fáceis. Aos meus irmãos: *Danielle, Railane e Ramon* por terem me ajudado em todas as circunstâncias, por estarem do meu lado. E também à toda minha família que sempre confiou em mim.

Sem dúvida não poderia faltar os agradecimentos àquele que sempre me ajudou nos momentos mais difíceis, nos conteúdos perdidos para prova, nas dúvidas, enfim, nos momentos onde eu imaginava que não daria conta de continuar, ao meu namorado e grande parceiro, *Rômulo Lima da Gama e sua família*, o meu muito Obrigada!

Agradeço aos meus *amigos* pelo incentivo e por sempre compreenderem minhas ausências, agradeço aos professores do colegiado de matemática pela grande contribuição na minha formação e os demais professores do colegiado de física e pedagogia que fazem parte deste momento.

Encerro agradecendo as pessoas que sem dúvida levarei para sempre em meu coração, pelos momentos vividos, pelas trocas de conhecimento e pela amizade que será eterna. Muito obrigada: ***Turma de Matemática de 2007.***

*“Escolha um trabalho que você ame e não  
terás que trabalhar um único dia em sua  
vida”*

(Freud)

# Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso abordamos o estudo da estabilidade dos modelos de Schnakenberg e de Gierer e Meinhardt. Estes modelos são reações homogêneas do tipo dos modelos de Turing os quais tem a propriedade de que o termo difusivo induz instabilidades, comportamento diferente a outras aplicações em que o termo difusivo estabiliza as equações. Os dois tipos de modelos são definidos por funções que dependem dos termos de ação e reação e de interações não lineares entre estes termos. Cada modelo é adimensionalizado, reduzindo o número de parâmetros da equação. Neste trabalho analisamos a estabilidade sem o termo difusivo, isto é, não consideramos nesta análise os efeitos espaciais do modelo. Para cada modelo identificamos os pontos de equilíbrio ou estacionários do sistema, isto é os pontos onde as curvas convergem quando o tempo  $t$  vai para infinito. Estes pontos de equilíbrio determinados teoricamente coincidem com simulações numéricas realizadas no Winplot, onde as trajetórias feitas pelas reações culminam ou se afastam do ponto de equilíbrio, ou seja, no ponto estacionário. Finalmente analisamos a estabilidade ao redor destes pontos de equilíbrio e determinamos as regiões de convergência e divergência no espaço dos parâmetros dos sistemas adimensionalizados. Simulações numéricas feitas no Winplot dos retratos de fase confirmam os resultados teóricos.

**Palavras-chave:** Modelos de Turing, Modelo de Schnakenberg, Modelos de Gierer e Meinhardt, Reações homogêneas, Adimensionalização, Ponto Estacionário, Estabilidade.



# Resumen

En este Trabajo se estudia la estabilidad de los modelos de Schnakenberg Gierer y Meinhardt. Estos modelos son reacciones homogéneas, casos particulares de modelos de Turing, en los cuales la componente difusiva induce inestabilidad al sistema. Este es un comportamiento diferente a otras aplicaciones donde la componente difusiva estabiliza las ecuaciones. Los dos tipos de modelos son definidos por funciones que dependen de las variables de acción y reacción y de las interacciones no lineales entre estas variables. Cada modelo es adimensionalizado lo cual permite reducir el número de parámetros de la ecuación. Se examinó la estabilidad sin el término difusivo, es decir, no consideramos en este análisis los efectos espaciales en el modelo. Para cada modelo se identifican los puntos de equilibrio o estacionarios, es decir, los puntos donde las curvas convergen cuando el tiempo  $t$  tiende a infinito. Estos puntos de equilibrio determinados teóricamente coinciden con simulaciones numéricas realizadas en el Winplot, donde las trayectorias seguidas por las reacciones convergen o divergen en el punto estacionario. Finalmente, se analiza la estabilidad en torno de estos puntos de equilibrio y se determinan las áreas de convergencia y divergencia en el espacio de parámetros de los sistemas adimensionalizados. Las simulaciones de las orbitas realizadas en el Winplot confirman los resultados teóricos.

**Palabras-Clave:** Turing, Modelo de Schnakenberg, Modelo de Gierer y Meinhardt, Reacciones homogéneas, Adimensionalización, Punto Estacionario, Estabilidad.

# Lista de Figuras

|     |                                                                                                                                                                       |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Campo vetorial do sistema de Schnakenberg sem termos difusivos, com $a = 0,4$ ; $b = 0,6$ e $\lambda = 1$ . O ponto estacionário é $(u_0; v_0) = (1; 0,6)$ . . . . .  | 22 |
| 2.2 | Campo vetorial do sistema de Schnakenberg sem termos difusivos, com $a = 0,05$ ; $b = 0,6$ e $\lambda = 1$ . O ponto estacionário é $(u_0; v_0) = (0,65; 1,420)$ .    | 23 |
| 2.3 | Gráfico da função Implícita no sistema de Schnakenberg . . . . .                                                                                                      | 28 |
| 3.1 | Campo vetorial do sistema de Gierer e Meinhardt, sem termos difusivos, com $a = 2$ ; $b = 3$ e $\lambda = 1$ . O ponto estacionário é $(u_0; v_0) = (1; 1)$ . . . . . | 35 |
| 3.2 | Campo vetorial do sistema de Gierer e Meinhardt sem termos difusivos, com $a = 0,3$ ; $b = 3$ e $\lambda = 1$ . O ponto estacionário é $(u_0; v_0) = (0,43; 0,18)$ .  | 36 |
| 3.3 | Gráfico da Função Implícita no sistema de Gierer e Meinhardt. . . . .                                                                                                 | 39 |

# Sumário

|                                                                       |             |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Resumo</b>                                                         | <b>viii</b> |
| <b>Resumen</b>                                                        | <b>ix</b>   |
| <b>Lista de Figuras</b>                                               | <b>x</b>    |
| <b>1 Introdução</b>                                                   | <b>12</b>   |
| 1.1 Vida e Obras de Alan Mathison Turing . . . . .                    | 12          |
| <b>2 Modelo de Turing proposto por Schnakenberg</b>                   | <b>14</b>   |
| 2.1 Adimensionalização das Equações de Schnakenberg . . . . .         | 15          |
| 2.2 Pontos de Equilíbrio ou Pontos Estacionários . . . . .            | 20          |
| 2.3 Análise da Estabilidade em torno do Ponto de Equilíbrio . . . . . | 23          |
| <b>3 Modelo de Turing sugerido por Gierer e Meinhardt</b>             | <b>29</b>   |
| 3.1 Adimensionalização das Equações Gierer e Meinhardt . . . . .      | 30          |
| 3.2 Pontos de Equilíbrio ou Pontos de Estabilidade . . . . .          | 33          |
| 3.3 Análise da Estabilidade ao redor do ponto de equilíbrio . . . . . | 36          |
| <b>Considerações Finais</b>                                           | <b>39</b>   |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                                     | <b>42</b>   |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Vida e Obras de Alan Mathison Turing

O editor da revista superinteressante, descreve que o jovem Alan Turing demonstrou um enorme interesse pela ciência. Enquanto estava na escola, escreveu a sua mãe: "Parece que eu sempre quero extrair coisas novas até mesmo do que é mais comum na natureza". Com frequência os matemáticos mostram desde cedo o seu talento; logo que Turing aprendeu a ler e escrever, ele fatorava números de hinos religiosos e desenhava bicicletas anfíbias.

Em 1937, publicou um artigo sobre as Máquinas Computáveis que teve uma importância enorme para a matemática pura: nele, provava que existiam cálculos impossíveis de serem feitos. Mas também trazia uma aplicação prática que ninguém, na época, percebeu. Turing imaginara uma máquina capaz de fazer todos os cálculos possíveis, desde que lhe dessem as instruções adequadas. O artigo não fazia menção a chips ou processadores continha apenas fórmulas matemáticas. Mas a descrição era exatamente daquilo que, mais tarde, mudaria o mundo com o nome de computador.

Por falar em mudar o mundo, naquele momento surgia um austríaco obcecado por impor suas idéias ao planeta: Adolf Hitler. Um de seus trunfos era uma máquina chamada Enigma um sistema de engrenagens capaz de embaralhar as letras das mensagens antes da transmissão por telégrafo. Os alemães consideravam esse código indecifrável. Caberia a Turing, convocado em 1939 pelo exército britânico, decifrá-lo.

O mecanismo de Turing foi proposto num artigo intitulado, 'The Chemical Basis

of Morphogenesis', publicado em 1952, onde o matemático Alan Turing mostrou que um sistema de morfogênese, que reagem e se difundem, pode produzir padrões espaciais estáveis a partir de uma distribuição inicial uniforme. Turing é também conhecido como o inventor da Máquina de Turing e do Teste de Turing, e a sua investigação sobre as relações entre máquinas e a natureza, criou a área da inteligência artificial.

O interesse de Turing na Biologia centrou-se na estrutura física dos organismos vivos, em particular no problema da morfogênese, ou seja, a razão que leva os organismos a desenvolverem determinadas formas. Os milhões de células num organismo 'sabem' que forma devem tomar e Turing queria saber como.

*"No sentido estrito do termo, os sistemas de reação-difusão são sistemas envolvendo componentes localmente transformados em outros através de reações químicas e transportados no espaço por difusão. Eles surgem, naturalmente, em química e engenharia química, mas também servem de referência para o estudo de uma ampla gama de fenômenos encontrados para além da esfera estrita da ciência química, tais como meio ambiente e ciências da vida." (Nicolis and De Wit, 2007)*

A proposta de Turing é de que, sob condições bem específicas, os produtos químicos podem reagir de tal forma a produzir estados estacionários espacialmente não homogêneos.

No trabalho será desenvolvido para o caso de apenas duas espécies químicas  $A$  e  $B$ , onde nos capítulos a frente serão adimensionalizadas, e estudaremos seus pontos de equilíbrio e sua estabilidade. As equações de movimento se escrevem:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = F(A, B) + D_A \nabla^2 A$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = G(A, B) + D_B \nabla^2 B$$

## Capítulo 2

# Modelo de Turing proposto por Schnakenberg

Schnakenberg propôs as seguintes funções no modelo de Turing:

$$F(A, B) = k_1 - k_2A + k_3A^2B \quad (2.1)$$

$$G(A, B) = k_4 - k_3A^2B \quad (2.2)$$

Logo, o sistema completo fica:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = k_1 - k_2A + k_3A^2B + D_A \nabla^2 A \\ \frac{\partial B}{\partial t} = k_4 - k_3A^2B + D_B \nabla^2 B \end{cases} \quad (2.3)$$

onde todas as constantes são positivas.

Neste sistema a substância  $A$  diminui seu crescimento com o termo  $-k_2A$ .  $B$  ativa a produção de  $A$  com o termo  $k_3A^2B$ ,  $B$  diminui seu crescimento com o termo  $-k_3A^2B$ .

Para analisar o estado final do sistema, nas próximas seções adimensionalizaremos as equações e estudamos os pontos de equilíbrio e sua estabilidade.

## 2.1 Adimensionalização das Equações de Schnakenberg

Vamos adimensionalizar as equações da reação de Schnakenberg em uma dimensão espacial:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B + D_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} & \text{(a)} \\ \frac{\partial B}{\partial t} = k_4 - k_3 A^2 B + D_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} & \text{(b)} \end{cases} \quad (2.4)$$

Nestas equações temos duas variáveis independentes  $x$  e  $t$ .

Considerando  $0 < x < L$ , a escala da variável  $x$  será  $L$ , isto é:

$$[x] = L \quad (2.5)$$

Em geral, o símbolo  $[ \cdot ]$  denotará a escala.

Adimensionalizamos a variável  $x$ , por:

$$\tilde{x} = \frac{x}{[x]} = \frac{x}{L} \quad (2.6)$$

A escala  $[t]$  da variável independente  $t$  depende das equações. Como os termos  $\frac{\partial A}{\partial t}$  e  $D_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$  da equação (2.4 (a)) devem ser das mesmas unidades.

Temos que:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} \right] &= \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right] \\ \Rightarrow \frac{[A]}{[t]} &= D_A \frac{[A]}{[x]^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{[t]} &= \frac{D_A}{L^2} \end{aligned}$$

Portanto, a escala de  $t$  é dada por:

$$[t] = \frac{L^2}{D_A} \quad (2.7)$$

Adimensionalizamos a variável independente  $t$  como:

$$\tilde{t} = \frac{t}{[t]} = \frac{D_A}{L^2} t \quad (2.8)$$

De (2.8), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{D_A}{L^2} t \right)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad (2.9)$$

De (2.9) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

De (2.6):

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{L} \right) = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \quad (2.11)$$

De (2.11) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{L} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{L} \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}} \end{array} \right.$$



pelo qual  $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{1}{L} \frac{\partial A}{\partial \tilde{x}} \right) = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2}$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases} \quad (2.12)$$

Substituindo (2.10) e (2.12) em (2.3) temos:

$$\begin{cases} \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B + \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}} = k_4 - k_5 A^2 B + \frac{D_B}{L^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Multiplicando as equações por  $\frac{L^2}{D_A}$  temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = \frac{k_1 L^2}{D_A} - \frac{k_2 L^2}{D_A} A + \frac{k_3 L^2}{D_A} A^2 B + \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}} = \frac{k_4 L^2}{D_A} - \frac{k_3 L^2}{D_A} A^2 B + \frac{D_B}{D_A} \frac{\partial^2 B}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Fatorando  $\frac{k_2 L^2}{D_A}$  resulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = \frac{k_2 L^2}{D_A} \left[ \frac{k_1}{k_2} - A + \frac{k_3}{k_2} A^2 B \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}} = \frac{k_2 L^2}{D_A} \left[ \frac{k_4}{k_2} - \frac{k_3}{k_2} A^2 B \right] + \frac{D_B}{D_A} \frac{\partial^2 B}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Denotando:

$$\gamma = \frac{k_2 L^2}{D_A} \quad (2.13)$$

$$d = \frac{D_B}{D_A} \quad (2.14)$$

$[A] = \text{escala de } A;$

$[B] = \text{escala de } B;$

$u = \frac{A}{[A]}, \text{ adimensionalização de } A;$

$v = \frac{B}{[B]}, \text{ adimensionalização de } B.$

Temos,

$$\begin{cases} [A] \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ \frac{k_1}{k_2} - [A]u + \frac{k_3}{k_2} [A]^2 [B]u^2v \right] + [A] \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} \\ [B] \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ \frac{k_4}{k_2} - \frac{k_3}{k_2} [A]^2 [B]u^2v \right] + d [B] \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Dividindo a 1ª equação por  $[A]$  e a 2ª por  $[B]$  teremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ \frac{k_1}{k_2 [A]} - u + \frac{k_3}{k_2} [A] [B]u^2v \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ \frac{k_4}{k_2 [B]} - \frac{k_3}{k_2} [A]^2 u^2v \right] + d \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Impondo na 2ª equação,

$$\frac{k_3}{k_2} [A]^2 = 1$$

Então, temos que:

$$[A] = \sqrt{\frac{k_2}{k_3}} \quad (2.15)$$

De (2.15) e impondo na 1ª equação,

$$\frac{k_3}{k_2} [A] [B] = 1$$

Obtemos então:

$$[B] = \sqrt{\frac{k_2}{k_3}} \quad (2.16)$$

Fazendo ainda,

$$a = \frac{k_1}{k_2 [A]} = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{k_3}{k_2}} \quad (2.17)$$

$$b = \frac{k_4}{k_2 [B]} = \frac{k_4}{k_2} \sqrt{\frac{k_3}{k_2}} \quad (2.18)$$

Resulta,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma [a - u + u^2 v] + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma [b - u^2 v] + d \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Teremos provado a seguinte propriedade:

**Propriedade 1** *As equações adimensionalizadas do sistema de Schnakenberg são dadas por:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma (a - u + u^2 v) + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma (b - u^2 v) + d \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases} \quad (2.19)$$

onde:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{D_A}{L^2} t, \quad \gamma = \frac{k_2 L^2}{D_A}, \quad a = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{k_3}{k_2}}, \quad b = \frac{k_4}{k_2} \sqrt{\frac{k_3}{k_2}} \quad \text{e} \quad d = \frac{D_B}{D_A}.$$

Além de (2.19) ter a vantagem das variáveis serem todas adimensionalizadas, este sistema apresenta um menor número de parâmetros. Isto permite analisar melhor a estabilidade deste sistema.

Em duas dimensões se  $[x] = [y] = L$  todos os cálculos são similares e a adimensi-

análise das equações resultam:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma (a - u + u^2 v) + \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma (b - u^2 v) + d \nabla^2 v \end{cases} \quad (2.20)$$

Onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}$$

## 2.2 Pontos de Equilíbrio ou Pontos Estacionários

Desconsiderando os efeitos difusivos na reação de Schnakenberg, em (2.20), temos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma (a - u + u^2 v) \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma (b - u^2 v) \end{cases} \quad (2.21)$$

Para determinar os valores estacionários do sistema (2.21), deve-se determinar  $(u_0; v_0)$  tal que:

$$\begin{cases} f(u_0; v_0) = 0 \\ g(u_0; v_0) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Onde:

$$\begin{cases} f(u; v) = \gamma (a - u + u^2 v) \\ g(u; v) = \gamma (b - u^2 v) \end{cases} \quad (2.23)$$

De (2.22) e (2.23), temos:

$$\begin{cases} \gamma(a - u + u^2v) = 0 & (c) \\ \gamma(b - u^2v) = 0 & (d) \end{cases} \quad (2.24)$$

De (2.24 (d)) temos:

$$v = \frac{b}{u^2} \quad (2.25)$$

Substituindo (2.25) em (2.24 (c)) resulta:

$$\begin{aligned} a - u + u^2 \frac{b}{u^2} &= a - u + b = 0 \\ \therefore u &= a + b \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.25), temos:

$$v = \frac{b}{(a + b)^2}$$

Logo, o ponto estacionário  $(u_0; v_0)$  é definido por:

$$(u_0; v_0) = \left(a + b; \frac{b}{(a + b)^2}\right) \quad (2.27)$$

Para cada valor de  $a > 0$  e  $b > 0$  em (2.27), definimos um ponto estacionário  $(u_0; v_0)$  com  $u_0 > 0$  e  $v_0 > 0$ .

**Exemplo 1** Se  $a=0,4$  e  $b=0,6$ , o ponto estacionário definido por (2.27) é:

$$(u_0; v_0) = \left( (0,4 + 0,6) ; \frac{0,6}{(0,4 + 0,6)^2} \right) = (1 ; 0,6)$$

O gráfico da Figura 2.1 mostra o campo vetorial  $(u; v)$  do sistema (2.21) com  $a = 0,4$  e  $b = 0,6$  e  $\gamma = 1$ . Na figura 2.1, observa-se que as curvas após um certo tempo atingem o

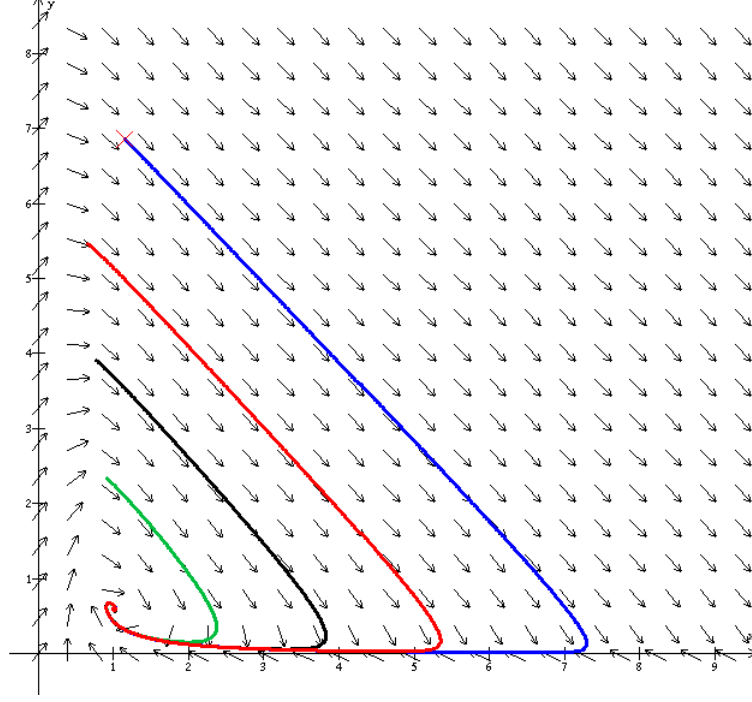


Figura 2.1: Campo vetorial do sistema de Schnakenberg sem termos difusivos, com  $a = 0,4$ ;  $b = 0,6$  e  $\lambda = 1$ . O ponto estacionário é  $(u_0; v_0) = (1; 0,6)$

ponto  $(u_0; v_0)$ , o qual é o ponto estacionário do sistema.

Observa-se que as curvas ficam próximas em torno do ponto estacionário  $(u_0; v_0)$ , isto é, o sistema é estável em torno do ponto de equilíbrio  $(u_0; v_0) = (1 ; 0,6)$

**Exemplo 2** Se  $a=0,05$  e  $b=0,6$ ; o ponto estacionário definido por (2.27) é:

$$(u_0; v_0) = \left( (0,05 + 0,6) ; \frac{0,6}{(0,05 + 0,6)^2} \right) = (0,65 ; 1,420)$$

A Figura 2.2 mostra o retrato de fase  $(u; v)$  do sistema (2.21) para  $a = 0,05$  e  $b = 0,6$ . Observa-se que  $(u_0; v_0)$  é um ponto estacionário, entretanto, em torno deste ponto tem-se curvas que se afastam. Logo, o sistema é instável em torno de  $(u_0; v_0)$ .

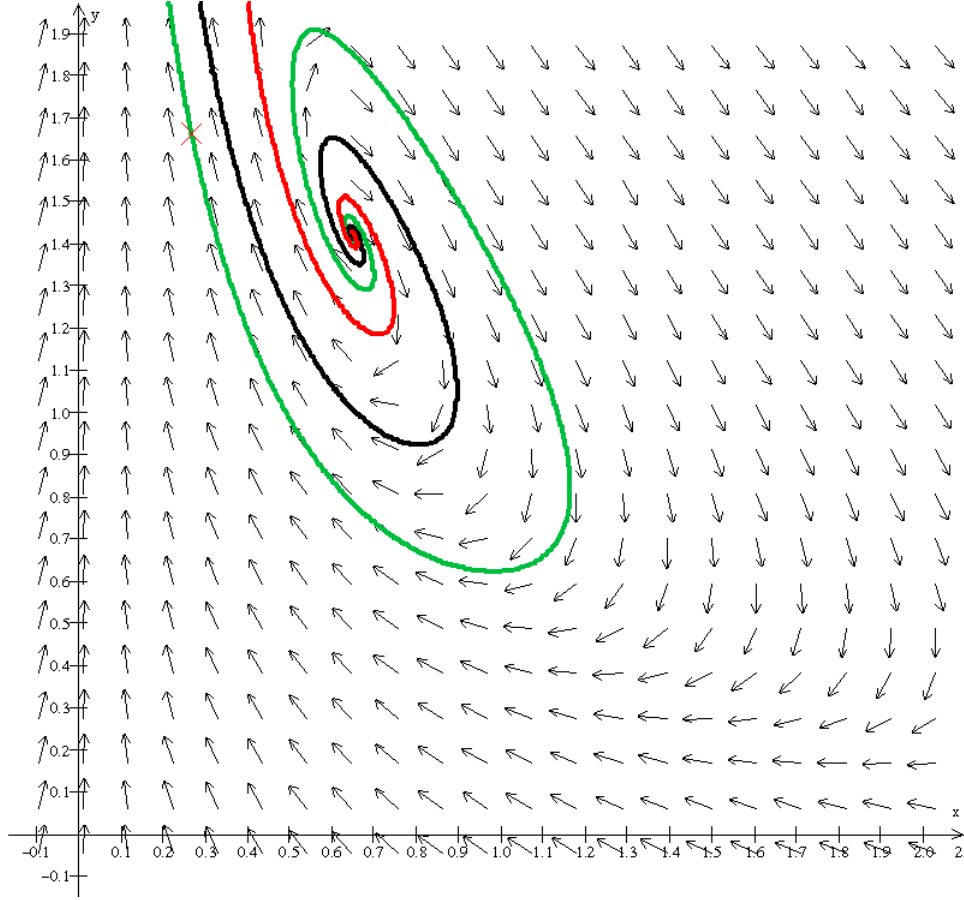


Figura 2.2: Campo vetorial do sistema de Schnakenberg sem termos difusivos, com  $a = 0,05$ ;  $b = 0,6$  e  $\lambda = 1$ . O ponto estacionário é  $(u_0; v_0) = (0,65; 1,420)$

## 2.3 Análise da Estabilidade em torno do Ponto de Equilíbrio

Na seção 2.2 observa-se os valores de  $a$  e  $b$  para os quais o sistema é estável, e outros valores nos quais o sistema é instável.

Vamos analisar no plano  $(b, a)$  as regiões de estabilidade e as regiões de instabilidade.

Para analisar a estabilidade, determinaremos o Jacobiano do sistema.

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

Calculando as derivadas parciais:

- $f_u = \frac{\partial}{\partial u} f = \frac{\partial}{\partial u} (a - u + u^2 v) = -1 + 2uv$

- $f_v = \frac{\partial}{\partial v} f = \frac{\partial}{\partial v} (a - u + u^2 v) = u^2$
- $g_u = \frac{\partial}{\partial u} g = \frac{\partial}{\partial u} (b - u^2 v) = -2uv$
- $g_v = \frac{\partial}{\partial v} g = \frac{\partial}{\partial v} (b - u^2 v) = -u^2$

Logo,

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} -1 + 2uv & u^2 \\ -2uv & -u^2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Para analisar a estabilidade no ponto  $(u_0; v_0) = \left(a + b; \frac{b}{(a + b)^2}\right)$ , deve-se calcular os autovalores de  $J(u, v)$ . Se os autovalores tem parte real negativa, o ponto de equilíbrio  $(u_0; v_0)$  será estável.

Lembrando,  $\lambda$  é autovalor de  $J(u, v)$  se,

$$\det(J(u, v) - \lambda I) = 0 \quad (2.29)$$

Em geral, consideremos a matriz:  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ , os autovalores de  $A$  verificam:

$$\det(J(u, v) - \lambda I) = 0$$

Logo,

$$\det = \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{pmatrix}$$

Isto implica que,  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$  Como,

$$\text{traço}(A) = a + d$$

$$\det(A) = ad - bc$$



então, os autovalores  $\lambda$  da matriz  $A$  verificam,

$$\lambda^2 - \text{traço}(A) + \det(A) = 0 \quad (2.30)$$

Aplicando a fórmula de Báshkara temos,

$$\lambda = \frac{\text{traço}(A) \pm \sqrt{[\text{traço}(A)]^2 - 4 \det(A)}}{2} \quad (2.31)$$

a) Se  $\det(A) > 0$ , então:

$$[\text{traço}(A)]^2 - 4 \det(A) < [\text{traço}(A)]^2 \quad (2.32)$$

As seguintes possibilidades ocorrem:

*i)*

$$[[\text{traço}(A)]^2 - 4 \det(A)] < 0 \quad (2.33)$$

então  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes complexas conjugadas.

*ii)*

$$[[\text{traço}(A)]^2 - 4 \det(A)] > 0 \quad (2.34)$$

De (2.32) e (2.34) temos:

$$\sqrt{[\text{traço}(A)]^2 - 4 \det(A)} < |\text{traço}(A)| \quad (2.35)$$

b) Se  $\det(A) > 0$  e  $\text{traço}(A) < 0$ , verifica-se:

*i)* Se (2.33) é verificada, os autovalores da matriz  $A$  são complexos conjugados com parte real negativa pois,

$$R_e(\lambda) = \frac{\text{traço}}{2} < 0$$

*ii)* Se (2.34) é verificada, então:

$$\frac{\text{traço}(A) + \sqrt{[\text{traço}(A)]^2 - 4 \det(A)}}{2} < \frac{\text{traço}(A) + \text{traço}(A)}{2} < \text{traço}(A) < 0$$

e

$$\frac{\text{traço}(A) - \sqrt{[\text{traço}(A)]^2 - 4\det(A)}}{2} < 0$$

em ambos os casos, temos que  $R_e(\lambda) = \frac{\text{traço}}{2} < 0$ .

Teremos provado a seguinte propriedade:

**Propriedade 2** *Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Se  $\text{traço}(A) < 0$  e  $\det(A) > 0$ , então os autovalores de  $A$  tem parte real negativa.*

De (2.28) temos para a matriz  $J(u_0; v_0)$ :

$$\begin{aligned} \text{traço}(J(u_0; v_0)) &= -1 + 2u_0v_0 - u_0^2 \\ \det(J(u_0; v_0)) &= (-1 + 2u_0v_0)(-u_0^2) - (-2u_0v_0)(u_0^2) \\ &= u_0^2 - 2u_0^3v_0 + 2u_0^3v_0 \\ &= u_0^2 \end{aligned}$$

A condição  $\det(J(u_0; v_0)) = u_0^2 > 0$  é sempre verificada. Já a condição de  $\text{traço}(J(u_0; v_0)) < 0$  é verificada se,

$$-1 + 2u_0v_0 - u_0^2 < 0 \tag{2.36}$$

Substituindo  $(u_0; v_0)$  de (2.27) em (2.36)

$$-1 + 2(a+b)\frac{b}{(a+b)^2} - (a+b)^2 < 0$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{2b}{(a+b)} - (a+b)^2 < 0$$

Como  $a+b > 0$ , pois  $a > 0$  e  $b > 0$ , temos:

$$-a - b + 2b - (a+b)^3 < 0$$

$$\Rightarrow b - a < (a+b)^3$$

Logo, temos provado a seguinte propriedade:

**Propriedade 3** *O ponto de equilíbrio  $(u_0; v_0) = \left(a + b; \frac{b}{(a + b)^2}\right)$  é:*

i) Estável, se

$$b - a < (a + b)^3 \quad (2.37)$$

ii) Instável, se

$$b - a > (a + b)^3 \quad (2.38)$$

iii) Ponto Sela, se

$$b - a = (a + b)^3$$

No **Exemplo 1**, temos que  $a = 0,4$  e  $b = 0,6$ , logo:

$$b - a = 0,6 - 0,4 = 0,2$$

$$(a + b)^3 = (0,4 + 0,6)^3 = 1$$

$$\therefore b - a < (a + b)^3$$

Logo, da **Propriedade 3**, temos que o ponto de equilíbrio  $(1; 0,6)$  é estável.

No **Exemplo 2**, temos que  $a = 0,05$  e  $b = 0,6$ :

$$b - a = 0,6 - 0,05 = 0,55$$

$$(a + b)^3 = (0,05 + 0,6)^3 = 0,27$$

$$\therefore b - a > (a + b)^3$$

E o ponto de equilíbrio  $(0,65; 1,420)$  é instável.

Na Figura 3.3 se apresenta o gráfico da função implícita.

$$(a + b)^3 - (b - a) = 0$$

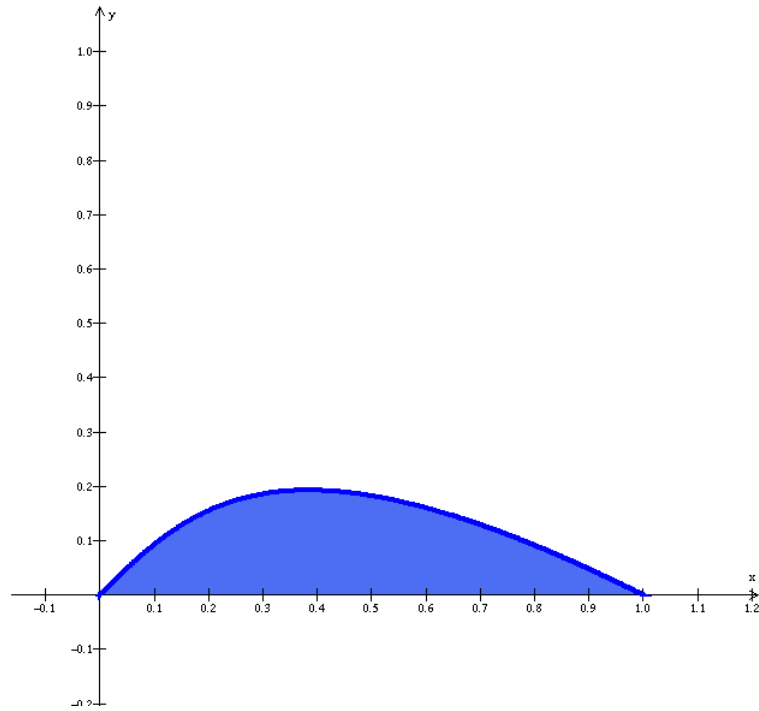


Figura 2.3: Gráfico da função Implícita no sistema de Schnakenberg

A região sombreada  $((a + b)^3 - (b - a) = 0)$  refere-se aos pontos de instabilidade. Os pontos fora da região sombreada no 1º quadrante ( $a > 0; b > 0$ ) refere-se a pontos de equilíbrio estáveis.

## Capítulo 3

# Modelo de Turing sugerido por Gierer e Meinhardt

Este é um outro modelo de interação entre duas espécies, conhecido como uma reação *ativação-inibição*. Gierer e Meinhardt escreveram as funções  $F$  e  $G$  com:

$$F(A, B) = k_1 - k_2 A + k_3 \frac{A^2}{B} \quad (3.1)$$

$$G(A, B) = k_4 A^2 - k_5 B \quad (3.2)$$

Logo, o sistema completo fica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} = k_1 - k_2 A + k_3 \frac{A^2}{B} + D_A \nabla^2 A \\ \frac{\partial B}{\partial t} = k_4 A^2 - k_5 B + D_B \nabla^2 B \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{array} \quad (3.3)$$

Neste sistema a substância  $A$  atua como ativador na equação (3.3 (b)). Com o termo  $k_4 A^2$ .  $B$  inibe a substância  $A$  na reação (3.3 (a)) com o termo  $k_3 \frac{A^2}{B}$ .

Para analisar o estado final do sistema, nas próximas seções adimensionalizaremos as equações e estudamos os pontos de equilíbrio e sua estabilidade.

### 3.1 Adimensionalização das Equações Gierer e Meinhardt

Considerando uma dimensão espacial as equações de Gierer e Meinhardt, se escrevem:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = k_1 - k_2 A + k_3 \frac{A^2}{B} + D_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\ \frac{\partial B}{\partial t} = k_4 A^2 - k_5 B + D_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.4)$$

Considerando (2.5) a (2.12) da Seção 2, obtemos de (3.4):

$$\begin{cases} \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = k_1 - k_2 A + k_3 \frac{A^2}{B} + \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}} = k_4 A^2 - k_5 B + \frac{D_B}{L^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Multiplicando ambas equações por  $\frac{L^2}{D_A}$  temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = \frac{k_1 L^2}{D_A} - \frac{k_2 L^2}{D_A} A + \frac{k_3 L^2}{D_A} \frac{A^2}{B} + \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{D_A}{L^2} \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}} = \frac{k_4 L^2}{D_A} A - \frac{k_5 L^2}{D_A} B + \frac{D_B}{D_A} \frac{\partial^2 B}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Fatorando  $\frac{k_5 L^2}{D_A}$  em ambas equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = \frac{k_5 L^2}{D_A} \left[ \frac{k_1}{k_5} - \frac{k_2}{k_5} A + \frac{k_3}{k_5} \frac{A^2}{B} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial B}{\partial \tilde{t}} = \frac{k_5 L^2}{D_A} \left[ \frac{k_4}{k_5} A^2 - B \right] + \frac{D_B}{D_A} \frac{\partial^2 B}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Denotando:

$$\gamma = \frac{k_5 L^2}{D_A} \quad (3.5)$$

$$d = \frac{D_B}{D_A} \quad (3.6)$$

$[A] = \text{escala de } A;$

$[B] = \text{escala de } B;$

$u = \frac{A}{[A]}, \text{ adimensionalização de } A;$

$v = \frac{B}{[B]}, \text{ adimensionalização de } B.$

Temos,

$$\begin{cases} [A] \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ \frac{k_1}{k_5} - \frac{k_2}{k_5} [A] u + \frac{k_3}{k_5} \frac{[A]^2}{[B]} \frac{u^2}{v} \right] + [A] \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} \\ [B] \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ \frac{k_4}{k_5} [A]^2 u^2 - [B] v \right] + d [B] \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação por  $[A]$  e a segunda por  $[B]$  teremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ \frac{k_1}{k_5 [A]} - \frac{k_2}{k_5} u + \frac{k_3}{k_5} \frac{[A]}{[B]} \frac{u^2}{v} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ \frac{k_4}{k_5} \frac{[A]^2}{[B]} u^2 - v \right] + d \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Desejamos que,

$$\frac{k_3}{k_5} \frac{[A]}{[B]} = 1 \quad (3.7)$$

e

$$\frac{k_4}{k_5} \frac{[A]^2}{[B]} = 1 \quad (3.8)$$

Dividindo (3.8) por (3.7), temos:

$$\frac{\frac{k_4}{k_5} \frac{[A]^2}{[B]}}{\frac{k_3}{k_5} \frac{[A]}{[B]}} = 1$$

então:

$$\begin{aligned}\frac{k_4}{k_3} [A] &= 1 \\ \Rightarrow [A] &= \frac{k_3}{k_4}\end{aligned}\tag{3.9}$$

De (3.7) e (3.9), temos:

$$\begin{aligned}[B] &= \frac{k_3}{k_5} [A] = \frac{k_3}{k_5} \frac{k_3}{k_4} \text{ Logo,} \\ [B] &= \frac{k_3^2}{k_4 k_5}\end{aligned}\tag{3.10}$$

Fazendo,

$$a = \frac{k_1}{k_5 [A]} = \frac{k_1}{k_5} \frac{k_4}{k_3} = \frac{k_1 k_4}{k_3 k_5}\tag{3.11}$$

$$b = \frac{k_2}{k_5}\tag{3.12}$$

e substituindo nas equações temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left[ a - bu + \frac{u^2}{v} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma [u^2 - v] + d \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} \end{cases}$$

Temos provado, portanto, a seguinte propriedade:

**Propriedade 4** *As equações adimensionalizadas do sistema de são dadas por Gierer e Meinhardt:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left( a - bu + \frac{u^2}{v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} u \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma (u^2 - v) + d \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} v \end{cases}\tag{3.13}$$

As equações em (3.13) tem um menor número de parâmetros, o que permite analisar melhor a estabilidade deste sistema.



Em duas dimensões se  $[x] = [y] = L$  todos os cálculos são similares e a adimensionalização das equações resultam:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \gamma \left( a - bu + \frac{u^2}{v} \right) + \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} = \gamma (u^2 - v) + d \nabla^2 v \end{cases} \quad (3.14)$$

Onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}$$

## 3.2 Pontos de Equilíbrio ou Pontos de Estabilidade

Desconsiderando os efeitos difusivos e  $\gamma = 1$ , as equações em (3.14) resultam,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a - bu + \frac{u^2}{v} = f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = u^2 - v = g(u, v) \end{cases} \quad (3.15)$$

Para determinar os pontos estacionários do sistema em (3.15), deve-se determinar  $(u_0, v_0)$  tal que

$$\begin{cases} f(u_0, v_0) = a - bu_0 + \frac{u_0^2}{v_0} = 0 & (c) \\ g(u_0, v_0) = u_0^2 - v_0 = 0 & (d) \end{cases} \quad (3.16)$$

De (3.16 (d)), temos

$$v_0 = u_0^2 \quad (3.17)$$

Substituimos (3.17) em (3.16 (c)) temos,

$$a - bu_0 + \frac{u_0^2}{u_0^2} = 0$$

$$\Rightarrow a - bu_0 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{a+1}{b} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.17) temos,

$$v_0 = \frac{(a+1)^2}{b^2} \quad (3.19)$$

De (3.18) e (3.19) temos a seguinte propriedade,

**Propriedade 5** *O sistema (3.16) tem um ponto de equilíbrio  $(u_0, v_0)$  se*

$$(u_0, v_0) = \left( \frac{a+1}{b}, \frac{(a+1)^2}{b^2} \right) \quad (3.20)$$

*Para cada valor  $a > 0$  e  $b < 0$ , (3.20) define um ponto estacionário  $(u_0, v_0)$  com  $u_0 > 0$  e  $v_0 > 0$*

**Exemplo 3** Se  $a = 2$  e  $b = 3$ , o ponto de equilíbrio definido por (3.20) é

$$(u_0, v_0) = \left( \frac{2+1}{3}, \frac{(2+1)^2}{3^2} \right) = (1, 1)$$

O gráfico da figura 3.1 mostra o campo vetorial  $(u, v)$  do sistema (3.15) com  $a = 2$  e  $b = 3$ . O gráfico mostra que o ponto de equilíbrio  $(u_0, v_0)$  coincide com o valor teórico  $(1; 1)$ . Além mais, observa-se que o ponto  $(u_0, v_0) = (1; 1)$  é estável.

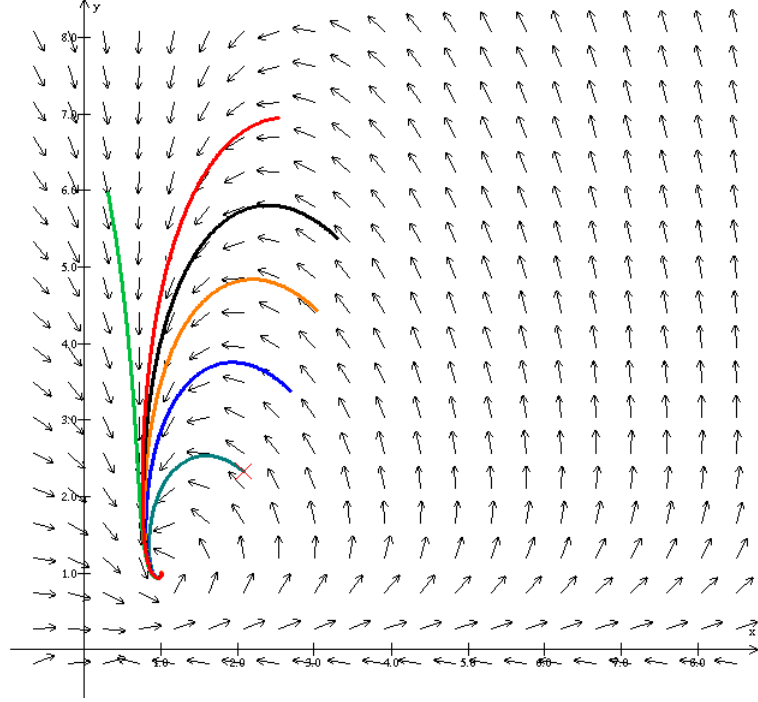


Figura 3.1: Campo vetorial do sistema de Gierer e Meinhardt, sem termos difusivos, com  $a = 2$ ;  $b = 3$  e  $\lambda = 1$ . O ponto estacionário é  $(u_0; v_0) = (1; 1)$

**Exemplo 4** Se  $a = 0.3$  e  $b = 3$  no sistema (3.15) temos de (3.20) que o ponto de equilíbrio é,  $(u_0, v_0) = \left( \frac{0.3+1}{3}, \left( \frac{0.3+1}{3} \right)^2 \right) = (0, 43; (0, 43)^2) = (0, 43; 0, 187)$ .

Na figura 3.2 se apresenta o campo vetorial do sistema (3.15). Observa-se que o ponto de equilíbrio  $(u_0, v_0)$  coincide com o valor teórico  $(0, 43, 0, 18)$ .

Ainda mais, observa-se que o ponto de equilíbrio  $(u_0, v_0) = (0, 43, 0, 18)$  é instável.

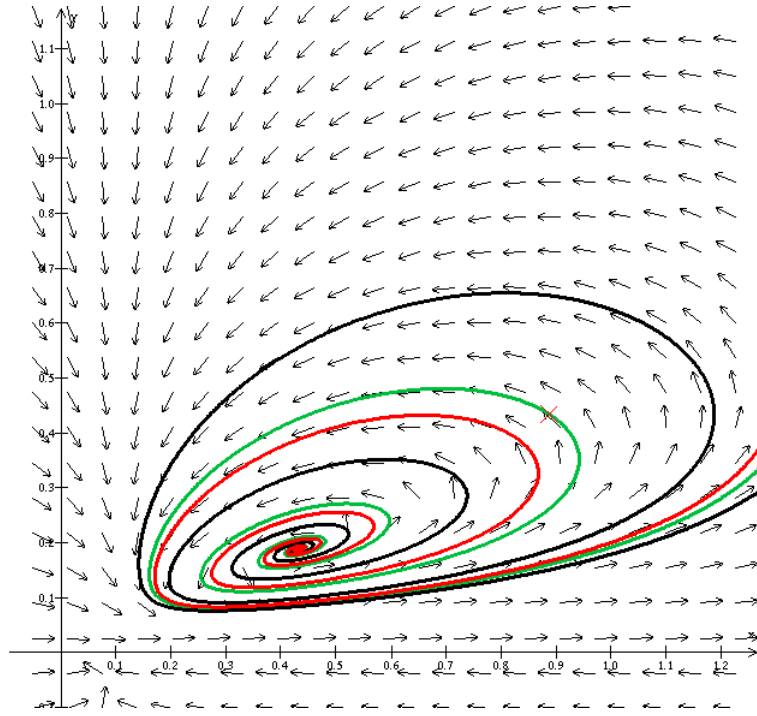


Figura 3.2: Campo vetorial do sistema de Gierer e Meinhardt sem termos difusivos, com  $a = 0,3$ ;  $b = 3$  e  $\lambda = 1$ . O ponto estacionário é  $(u_0; v_0) = (0,43; 0,18)$

### 3.3 Análise da Estabilidade ao redor do ponto de equilíbrio

Na seção 2.3 observa-se valores de  $a$  e  $b$  para os quais os pontos de equilíbrio definidos por (3.20) são estáveis, e outros valores para os quais os pontos de equilíbrio são instáveis.

Vamos analisar no plano  $(b, a)$  as regiões de estabilidade e as regiões de instabilidade.

Como:

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial(a - bu + \frac{u^2}{v})}{\partial u} = -b + \frac{2u}{v}$$

$$f_v = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial(a - bu + \frac{u^2}{v})}{\partial v} = -\frac{u^2}{v^2}$$

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial(u^2 - v)}{\partial u} = 2u$$

$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial(u^2 - v)}{\partial v} = -1$$

O Jacobiano  $J(u, v)$  é:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-b - \frac{2u}{v}\right) & \left(-\frac{u^2}{v^2}\right) \\ 2u & -1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} \text{traço}(J(u, v)) &= -1 - b + \frac{2u}{v} \\ \det(J(u, v)) &= b - \frac{2u}{v} + \frac{2u^3}{v^2} \end{cases}$$

Como  $v_0 = u_0^2$ , temos:

$$\begin{cases} \text{traço}(J(u_0, v_0)) &= -1 - b + \frac{2u_0}{u_0^2} = -1 - b + \frac{2}{u_0} & (e) \\ \det(J(u_0, v_0)) &= b - \frac{2u_0}{u_0^2} + \frac{2u_0^3}{u_0^4} = b - \frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_0} = b > 0 & (f) \end{cases} \quad (3.21)$$

Da propriedade 4, temos que o sistema (3.15) é estável se:

i)  $\text{traço}(J(u_0, v_0)) < 0$ ;

ii)  $\det(J(u_0, v_0)) > 0$ .

De (3.21 (f)) temos que *ii*) é verificada pois,

$$\det(J(u_0, v_0)) = b > 0$$

*i*) é verificada se:

$$\text{traço}(J(u_0, v_0)) < 0$$

$$\begin{aligned} -1 - b + \frac{2}{u_0} < 0 &\Rightarrow -1 - b + \frac{2}{\frac{a+1}{b}} < 0 \Rightarrow -1 - b + \frac{2b}{a+1} < 0 \Rightarrow \frac{2b}{a+1} < b+1 \Rightarrow \\ \frac{2b}{a+1} < a+1 &\Rightarrow \frac{2(b+1-1)}{b+1} < a+1 \Rightarrow 2 - \frac{2}{b+1} < a+1 \Rightarrow -\frac{2}{b+1} < a-1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(b+1)(a-1) > -2$$

Logo, temos a seguinte propriedade

**Propriedade 6** *O ponto de equilíbrio do sistema (3.16),  $(u_0, v_0) = \left(\frac{a+1}{b}, \left(\frac{a+1}{b}\right)^2\right)$  é:*

- i) Estável se  $(b+1)(a-1) > -2$ ;*
- ii) Instável se  $(b+1)(a-1) < -2$ ;*
- iii) Ponto sela se  $(b+1)(a-1) = -2$ .*

No exemplo 3 temos que  $a = 2$  e  $b = 3$ , logo

$$(a-1)(b+1) = (2-1)(3+1) = 4 > -2$$

e pela propriedade 6 temos que o ponto de equilíbrio  $(1; 1)$  é estável.

No exemplo 4 temos que  $a = 0.3$  e  $b = 3$ , logo

$$(a-1)(b+1) = (0.3-1)(3+1) = (-0,7)(4) = -2,8 < -2$$

e pela propriedade 6 o ponto de equilíbrio  $(u_0, v_0) = (1.1; 1.21)$  é instável.

Na figura 3.3 se apresenta o gráfico da função implícita

$$(b + 1)(a - 1) + 2 = 0$$

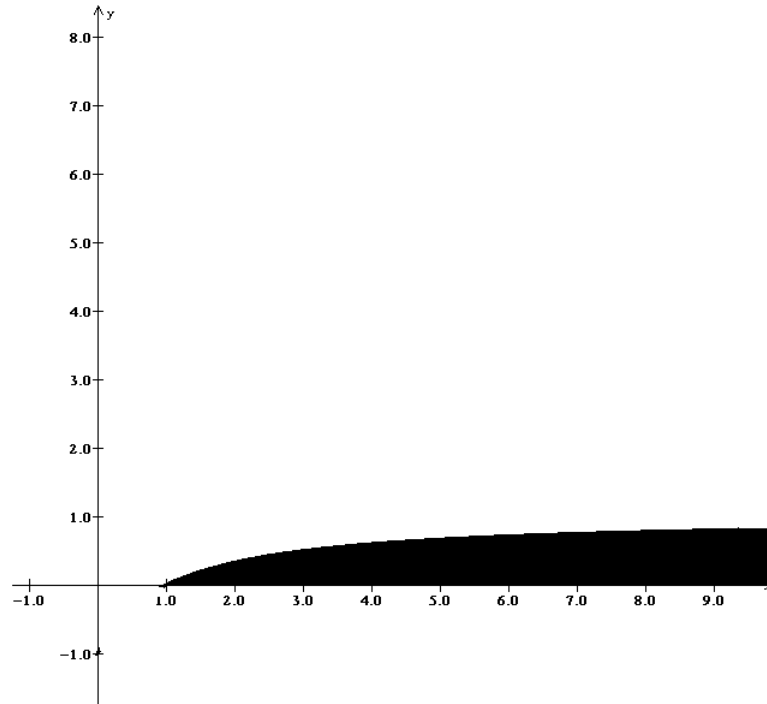


Figura 3.3: Gráfico da Função Implícita no sistema de Gierer e Meinhardt.

A região sombreada refere-se aos valores de  $(a, b)$ , onde os pontos de equilíbrio são instáveis. Os valores  $(a, b)$  fora da região sombreada no 1º quadrante refere-se ao ponto de equilíbrio estáveis.

# Considerações Finais

Neste trabalho os modelos de Turing de ação-reação: de Schnakenberg e de Gierer e Meinhardt são adimensionalizados. Isto nos permite reduzir o número de parâmetros dos sistema facilitando a análise dos pontos de equilíbrio e da estabilidade. No modelo proposto por Schnakenberg as taxas  $k_i$  são constantes e todas positivas, por exemplo  $A$  sendo a concentração do substrato de oxigênio e  $B$  uma enzima. No modelo proposto por Gierer e Meinhardt se descreve o processo ativador-inibidor, por exemplo,  $A$  é o ativador e  $B$  o inibidor.

Nos modelos de Turing, o processo difusivo caracterizado pelo termo Laplaciano é determinante na estabilidade do sistema. Esta estabilidade tem como base a determinação dos pontos de equilíbrio, o qual é determinado eliminando a variação temporal do sistema. Neste trabalho os pontos de equilíbrio dos modelos de Schnakenberg e de Gierer e Meinhardt são determinados. As simulações numéricas realizadas no winplot conferem com o resultado teórico.

O próximo passo é o estudo da estabilidade, o qual tem duas vertentes. A primeira é não considerar o termo difusivo e portanto eliminando a componente espacial do sistema e a segunda considerando este processo difusivo. Neste trabalho foram realizadas a análise da estabilidade dos modelos Schnakenberg e de Gierer e Meinhardt desconsiderando o termo difusivo. A análise em torno do ponto de equilíbrio nos permite determinar as regiões de estabilidade e as regiões de instabilidade do sistema para cada um destes modelos. Estes resultados teóricos são simulados no Winplot escolhendo um ponto na região de estabilidade e outro na região de instabilidade. As simulações mostram claramente as trajetórias convergindo para o ponto de equilíbrio no caso estável e divergindo



para o caso instável.

Em futuros trabalhos pode-se estudar a análise da estabilidade destes modelos de Turing quando se considere o termo difusivo. Contrário aos problemas em mecânica, estruturas e outras aplicações em que o termo difusivo estabiliza o sistema, espera-se que este termo difusivo desestabilize o sistema. Esta é a razão pelo qual Turing chamou a atenção quando publicou seu trabalho em modelos de ação-reação.

# Referências Bibliográficas

- [1] TEIXEIRA, Elisabeth. **As três metodologias**: acadêmica, da ciência e da pesquisa. 4.ed.rev. e ampl. Belém: UNAMA, 2003;
- [2] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo, Ed. Pioneira Thompson, 2003.
- [3] UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Sistema de Bibliotecas. **Normas para a apresentação de documentos científicos**. Curitiba, 2001. 10v;
- [4] VIEIRA, Leociléa A. **Projeto de pesquisa e monografia**: o que é? como se faz? 2.ed. Curitiba: Editora do autor, 2003;
- [5] GOMES, Affonso Guidão, VARRIALE, M.C. **Modelagem de ecossistemas**: uma introdução. Santa Maria - Editora: UFSM, 2<sup>a</sup> ed. 2004;
- [6] BOYCE, W. DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de contorno**. Rio de Janeiro - Editora Guanabara, 2004.