UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

# *SÉRIES DE FOURIER EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS*

MACAPÁ-AP
2011

MARAISA PRISCILA ROSA PACHECO
VANDERLEI GOMES DE ARAÚJO

# *SÉRIES DE FOURIER EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS*

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob orientxação do Prof. Dr.Guzmán Isla Chamilco.

MACAPÁ-AP
2011

MARAISA PRISCILA ROSA PACHECO
VANDERLEI GOMES DE ARAÚJO

# *SÉRIES DE FOURIER EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

---

Prof. Dr.Guzmán Isla Chamilco

---

Prof. Dr.José Walter Cárdenas Sotil

---

Prof. Dr. Erasmo Senger

Avaliado em: 19 /02 /2011

MACAPÁ-AP

2011

A Deus, pela inteligência e perseverança;
A minha mãe, Valdeci das Neves Rosa, pela paciência, ajuda e compreensão;
E a todos os professores e colegas pela dedicação e companheirismo.

(Maraisa P. R. Pacheco).

A Deus pelos momentos de fé e paz;
A Julieta Matos de Oliveira pela luz e sabedoria;
A minha família pelo apoio e compreensão;
Ao professor Guzmán Isla Chamilco por nos orientar.

(Vanderlei G. Araújo)

"Se eu vi mais longe, foi por estar
de pé sobre ombros de gigantes."

(Isaac Newton)

# Resumo

Este trabalho irá mostrar como a solução de equações diferenciais parciais se tornaram uma Série de Fourier, dentre estas equações iremos fazer aplicações em três: Equação do Calor, Equação da Onda e Equação de Laplace. Mas para isso iremos primeiro definir o que é uma Série de Fourier destrinchando conceitos que estão relacionados com o mesmo, como por exemplo: produto interno ou escalar; ortogonalidade; norma; convergência; função par e impar e; combinação linear. Cada um desses conceitos irá contribuir para chegar e entender a famosa Série de Fourier. Passando esta etapa iremos aplicar a Série de Fourier nas equações diferenciais parciais citadas acima. Portanto iremos aprender nesta passagem o que é separação de variáveis e como a mesma se transforma em duas equações dife-renciais ordinárias de onde iremos obter a análise do seu parâmetro em uma e o fator integrante em outra, iremos também nesta passagem observar qual o comportamento das funções quando as mesmas estiverem sobre condições inicias e condições de fronteira ou de contorno como também é conhecida. Os gráficos apresentados no trabalho foram gerados no software MAPLE de onde podemos observar e constatar o comportamento das funções com melhor precisão. Logo podemos perceber que a série de Fourier tem muitas aplicações, tais em engenharia elétrica, vibração, análise acústica, óptica, processamento de sinais, processamento de imagem, a mecânica quântica, econometria, etc.

**Palavras - chaves:** Série de Fourier; Equação do Calor; Equação da Onda; Equação de Laplace.

# Lista de Figuras


1.1 Jean-Baptiste Joseph Fourier . . . . . 14

2.1 Gráficos de 1, cos $\frac{\pi t}{L}$, cos $\frac{2\pi t}{L}$, cos $\frac{3\pi t}{L}$, cos $\frac{4\pi t}{L}$, cos $\frac{5\pi t}{L}$ . . . . . 21

2.2 Gráficos de sen $\frac{\pi t}{L}$, sen $\frac{2\pi t}{L}$, sen $\frac{3\pi t}{L}$, sen $\frac{4\pi t}{L}$, sen $\frac{5\pi t}{L}$, sen $\frac{6\pi t}{L}$ . . . . . 21

2.3 A função $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de cossenos de $f$, para $n = 0, 2, 6, 10, 14, 18$ . . . . . 28

2.4 A função $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de senos de $f$, para $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ . . . . . 28

2.5 A função $f(t) = 1$ em $[0, 1]$, e as somas parciais da série de Fourier de senos de $f$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . . . . . 29

2.6 A função $f(t) = t$ em $[0, 1]$, e as somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 0, 1, 3$ . . . . . 31

2.7 A função $f(t) = t$ em $[0, 1]$, e as somas parciais da série de Fourier de senos de $f$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . . . . . 31

3.1 barra metálica unidimensional . . . . . 36

3.2 barra sendo aquecida . . . . . 36

3.3 Solução da equação do calor do exemplo 5 tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$ . . . . . 40

3.4 Solução da equação do calor do exemplo 6 tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$ . . . . . 43

3.5 barra isolada . . . . . 43

3.6 Solução da equação do calor do exemplo 7 tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 10, 20, 50, 100, 300$ . . . . . 47

3.7 ondas periódicas . . . . . 48
3.8 senóide e cossenóide . . . . . 49
3.9 comprimento de onda . . . . . 49
3.10 onda transversal . . . . . 51
3.11 harmônicos gerados na corda do violino . . . . . 52
3.12 Solução do problema da corda elástica tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$ . . . . . 56
3.13 Solução do problema da corda elástica tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$ . . . . . 59
3.14 Região onde é resolvido o problema de Dirichlet . . . . . 62
3.15 Solução da equação de Laplace do Exemplo 11 tomando apenas 3 termos não nulos da série . . . . . 65
3.16 Solução da equação de Laplace do Exemplo 12 tomando apenas 3 termos não nulos da série . . . . . 68
3.17 Solução da equação de Laplace do Exemplo 13 tomando apenas 3 termos não nulos da série . . . . . 70

# Lista de Tabelas

2.1 Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares . . . . . 32

3.1 tabela de condutividade . . . . . 48

# Sumário

**Resumo** **vi**

**Lista de Figuras** **vii**

**Lista de Tabelas** **ix**

**1 Introdução** **14**

1.1 História de Fourier . . . . . 14

1.2 Séries de Fourier . . . . . 16

1.3 Aplicações das Séries de Fourier . . . . . 16

**2 Teorias de Séries de Fourier** **18**

2.1 Produto Interno e Norma . . . . . 18

2.2 Ortogonalidade . . . . . 18

2.3 Convergência . . . . . 22

2.4 Séries de Fourier . . . . . 23

2.5 Função Par e Função Ímpar . . . . . 25

2.6 Combinação linear . . . . . 31

**3 Aplicações: Interpretações Físicas.** **33**

3.1 Equação do Calor . . . . . 34

3.1.1 Equações do Calor em uma Barra . . . . . 35

3.1.2 Extremidades a Temperaturas Fixas . . . . . 36

3.1.3 Barra Isolada nos Extremos . . . . . 43

3.2 Equação da Onda . . . . . 48

3.2.1 Corda Elástica com Extremidades Presas . . . . . 52

3.2.2 Com Velocidade Inicial Nula . . . . . 53

3.2.3 Com Deslocamento Inicial Nulo . . . . . 56
3.2.4 Caso Geral . . . . . 59
3.3 Equação de Laplace num Retângulo . . . . . 61
3.3.1 Apenas $k(y)$ Não Nula . . . . . 62
3.3.2 Apenas $h(y)$ Não Nula . . . . . 65
3.3.3 Caso Geral . . . . . 68

**Considerações Finais** **71**

**Referências Bibliográficas** **72**

# Capítulo 1

# Introdução

## 1.1 História de Fourier

Figura 1.1: Jean-Baptiste Joseph Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 de março de 1768 - Paris, 16 de maio de 1830) foi um matemático e físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas séries de Fourier e a sua aplicação aos problemas da condução do calor. A Transformada de Fourier foi designada em sua homenagem.

Jean-Baptiste Joseph Fourier foi o 12º filho dos 15 que teve seu pai, um alfaiate em Auxerre. Ele ficou orfão muito jovem, pois a sua mãe morreu quando ele tinha nove anos e o seu pai no ano seguinte. Ele foi internado na escola militar de Auxerre, um colégio beneditino, onde inicialmente mostrou ter talento para a literatura, mas aos treze anos começou a interessar-se pela matemática. Aos catorze anos já tinha lido os seis volumes do Curso de Matemática de Étienne Bézout e em 1783 recebeu o primeiro prémio pelo seu estudo da Mecânica Geral de Charles Bossut.

Em 1787 decidiu seguir a carreira religiosa e entrou na abadia beneditina de St. Benoit-sur-Loire. No entanto, persistiu no seu interesse pela matemática e manteve correspondência com o professor de matemática de Auxerre e enviou um manuscrito a Jean-Étienne Montucla em Paris. Abandonou a abadia em 1789, sem chegar a fazer os votos religiosos, e visitou Paris onde apresentou um artigo à Academia Real de Ciências francesa sobre as suas pesquisas para a solução de equações numéricas, assunto que o interessou para o resto da vida. Em 1790 tornou-se professor de matemática na escola militar de Auxerre (onde já tinha estudado). Em 1793, seduzido pelos ideais republicanos, envolveu-se na política juntando-se ao Comité Revolucionário de Auxerre.

Fourier tentou demitir-se do comité revolucionário depois do terror gerado pela Revolução Francesa, com o qual não estava de acordo. Mas nessa altura ele já estava demasiado envolvido na Revolução para poder abandonar a sua atividade política. Esta atividade era extremamente complicada pelas diferentes facções revolucionárias que se debatiam violentamente entre elas. O próprio Fourier terminou preso em Julho de 1794, depois de ter defendido em Orléans uma destas facções. Temendo pela sua vida, sobretudo depois da morte de Robespierre condenado à guilhotina, Fourier terminou por ser libertado devido a novas mudanças políticas numa época extremamente conturbada.

Ele tinha, até ser preso, continuado a ensinar matemática em Auxerre, mas no final de 1794 é nomeado para estudar na École Normale de Paris. Esta instituição foi fundada pela república com o objetivo de ensinar professores e abriu em Janeiro de 1795. Nesta escola, onde demonstrou ser um dos alunos mais brilhantes, Fourier tem como professores Joseph-Louis de Lagrange, Pierre Simon Laplace e Gaspard Monge, os maiores físicos-matemáticos da época. Ele começou então a ensinar primeiro no Collège de France e depois na École Polytechnique sob a direção de Lazare Carnot e Gaspard Monge, e iniciou uma atividade mais séria em investigação matemática, mantendo excelentes contatos com Lagrange, Laplace e Monge.

Ele voltou a ser preso por razões políticas, mas depois de apelos de seus alunos e professores, e também talvez por uma certa acalmia política, voltou a ser libertado. Em 1795 ele voltou a ensinar na École Polytechnique e em 1797 sucedeu a Lagrange ao ser nomeado para a cátedra de Análise e Mecânica nesta escola. Ele ficou conhecido pelas suas aulas excepcionais, devido ao seu grande dom para a oratória que já lhe tinha trazido reconhecimento em política.

## 1.2 Séries de Fourier

As séries de Fourier tem como idéia principal a periodicidade, ou seja, o seu gráfico se repete a cada período. E como a função seno e cosseno são periódicos, com periodicidade $2\pi$ e valor máximo de amplitude igual a 1, com a diferença do cosseno ser deslocada de $\frac{\pi}{2}$ relação ao seno. Tecnicamente, diz-se que as funções seno e cosseno diferem na FASE e a diferença de fase entre elas é de $\frac{\pi}{2}$.

Foi isso que Fourier descobriu, no início do século 19. Segundo ele, qualquer função periódica, por mais complicada que seja, pode ser representada como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente.

Logo, qualquer função $f(x)$ pode, segundo Fourier, ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno da seguinte forma geral:

$$f(x) = a_0 + a_1\text{sen}(x) + a_2\text{sen}(2x) + a_3\text{sen}(3x) + ... + b_1\cos(x) + b_2\cos(2x) + b_3\cos(3x) + ...$$

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2$, etc, são as amplitudes de cada onda componente do desenvolvimento em série.

Fourier foi o primeiro a estudar sistematicamente tais séries infinitas, após investigações preliminares de Euler, D'Alembert, e Daniel Bernoulli. Ele aplicou estas séries à solução da equação do calor, publicando os seus resultados iniciais em 1807 e 1811, e publicando a sua Théorie analytique de la chaleur em 1822, sem contar as equações da onda e de Laplace, onde suas séries são bem aplicadas. De um ponto de vista moderno, os resultados de Fourier são algo informais, em boa parte devido à falta de uma notação concisa de funções e integrais nos inícios do século XIX. Mais tarde, Dirichlet e Riemann expressaram os resultados de Fourier com grande precisão e rigor formal.

## 1.3 Aplicações das Séries de Fourier

Hoje a análise de Fourier é uma das técnicas matemáticas com maior número de aplicações práticas. Além de ser utilizada extensivamente em cálculo numérico nas áreas mais diversas das ciências aplicadas e engenharias, a análise de Fourier constitui ainda a base do processamento de sinais. Tem por isso um papel central nas telecomunicações modernas e também no processamento de imagens digitais. Como curiosidades: é utilizando análise de Fourier que se retira a voz das canções para fazer karaoke e também

que se faz a compressão de imagens em formato JPEG.

# Capítulo 2

# Teorias de Séries de Fourier

## 2.1 Produto Interno e Norma

Seja $CP[a,b]$ o conjunto das funções reais contínuas por partes

$$f : [a,b] \to \mathcal{R}$$

considerando idênticas duas funções que diferem uma da outra apenas em um número finito de pontos.

(a) Definimos o **produto escalar** ou **interno** das funções $f$ e $g$ pertencentes a $CP[a,b]$, como $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

(b) Para todo vetor $f \in CP[a,b]$, definimos a **norma** de $f$ denotada por $\|f\|$ como sendo $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$

**Proposição 1.**

(a) Para todos os $f$, $g \in CP[a,b]$, $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$.

(b) Para todos os $f_1, f_2, g \in CP[a,b]$, $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$;

(c) Para todos os $f$,$g$, $\in CP[a,b]$ e todo escalar $a$, $\langle af, g\rangle = a\langle f,g\rangle$;

(d) Para todos os $f, \in CP[a,b]$,$\| f \| \geq 0$ e $f = 0$ se, e somente se,$\| f \| = 0$.

## 2.2 Ortogonalidade

**Definição 2.** Seja $CP[a,b]$. Dizemos que um subconjunto não vazio $X$ de $CP[a,b]$ é **ortogonal** se para todo par $f$ e $g$ de elementos distintos de $X$, $\langle f,g\rangle = 0$ . Neste caso

dizemos que os elementos de $X$ são **ortogonais**.

Esta definição nos ajudará a achar os coeficientes da série de fourier: $a_0, a_m, b_m$. Para isso considere as propriedades da ortogonalidades dos senos e cossenos:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = 0$ (para todos os $n, m > 0$)

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n \neq m \\ \pi, & \text{se} \quad n = m \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n \neq m \\ \pi, & \text{se} \quad n = m \end{cases}$

**Exemplo 1.** Seja $L$ um número real maior que zero. Seja $CP[-L, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[-L, L]$ em $\mathcal{R}$ com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^{L} f(t)g(t)dt.$$

Vamos mostrar que o conjunto

$$\{1, \cos\frac{\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{\pi t}{L}, \cos\frac{2\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{L}, ..., \cos\frac{n\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, ...\}$$

é ortogonal. Como as funções do conjunto, exceto a primeira, são funções cujas primitivas

são periódicas de período igual a $2L/n$, então a integral de $-L$ a $L$ destas funções é igual a zero e portanto elas são ortogonais à função constante 1.

$$\langle \cos\frac{n\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L} \rangle = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi t}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L} dt$$

Seja $s = \dfrac{\pi t}{L}$, então $dt = \dfrac{L}{\pi} ds$, substituindo em $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi t}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L} dt$ temos:

$$= \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ns \operatorname{sen} ms ds \tag{2.1}$$

Usando a propriedade: $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$ em (2.1) temos,

$$= \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\text{sen}(m+n)s + \text{sen}(m-n)s]ds$$

$$= \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(m+n)sds + \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(m-n)sds$$

$$= -\frac{L}{2\pi(m+n)}\cos(m+n)s\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{L}{2\pi(m-n)}\cos(m-n)s\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{L}{2\pi(m+n)}\Big[\cos(m+n)\pi - \cos(m+n)(-\pi)\Big] - \frac{L}{2\pi(m-n)}\Big[\cos(m-n)\pi - \cos(m-n)(-\pi)\Big]$$

Usando a propriedade: $\cos(-t) = \cos(t)$ temos,

$$= -\frac{L}{2\pi(m+n)}\Big[\cos(m+n)\pi - \cos(m+n)\pi\Big] - \frac{L}{2\pi(m-n)}\Big[\cos(m-n)\pi - \cos(m-n)\pi\Big]$$

$$= -\frac{L}{2\pi(m+n)} \times 0 - \frac{L}{2\pi(m-n)} \times 0 = 0$$

Para $m \neq n$ temos que

$$\langle \cos\frac{n\pi t}{L}, \cos\frac{m\pi t}{L}\rangle = \int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ns\cos msds$$

**Dica:**

Considere a propriedade: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ temos,

$$= \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]ds$$

$$= \frac{L}{2\pi(m+n)}\text{sen}(m+n)s|_{-\pi}^{\pi} + \frac{L}{2\pi(m-n)}\text{sen}(m-n)s|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle \text{sen}\frac{n\pi t}{L}, \text{sen}\frac{m\pi t}{L}\rangle = \int_{-L}^{L}\text{sen}\frac{n\pi t}{L}\text{sen}\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}\, ns\,\text{sen}\, msds$$

**Dica:**

Considere a propriedade: $\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$ temos,

$$= \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]ds = 0$$

GRÁFICOS DO EXEMPLO 1

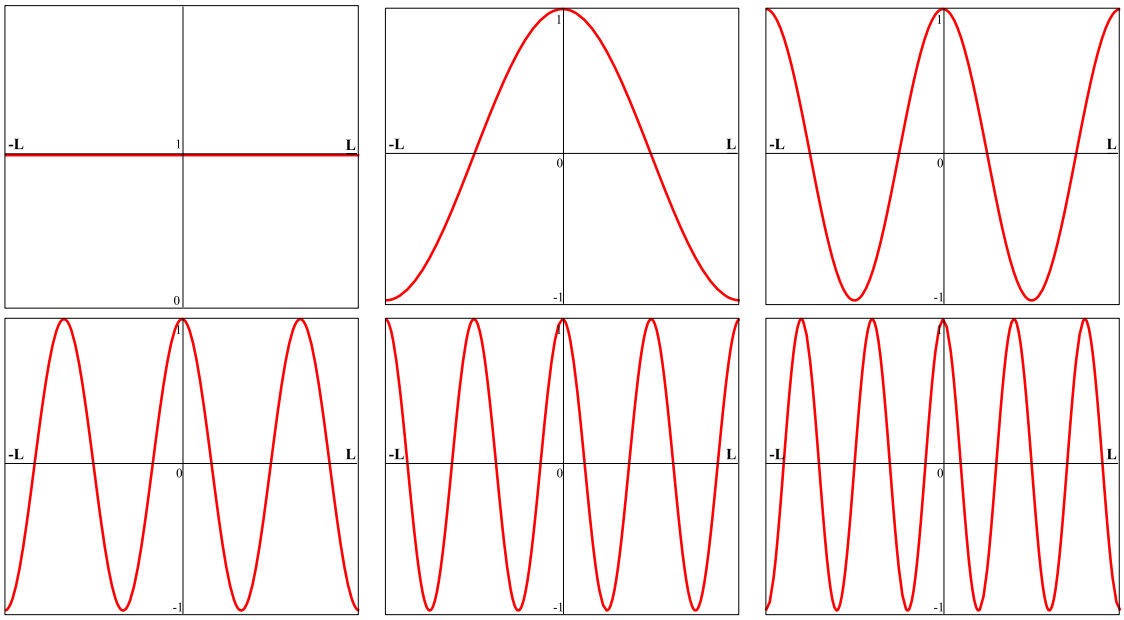


Figura 2.1: Gráficos de 1, $\cos\frac{\pi t}{L}$, $\cos\frac{2\pi t}{L}$, $\cos\frac{3\pi t}{L}$, $\cos\frac{4\pi t}{L}$, $\cos\frac{5\pi t}{L}$

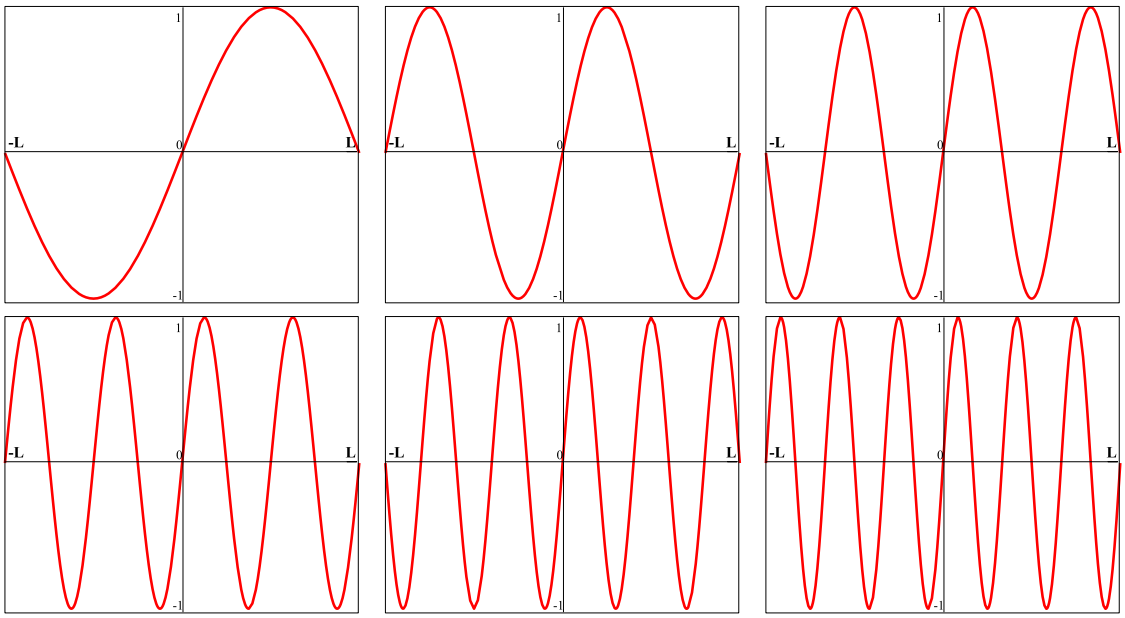


Figura 2.2: Gráficos de sen $\frac{\pi t}{L}$, sen $\frac{2\pi t}{L}$, sen $\frac{3\pi t}{L}$, sen $\frac{4\pi t}{L}$, sen $\frac{5\pi t}{L}$, sen $\frac{6\pi t}{L}$

## 2.3 Convergência

**Definição 3.**

(a) Uma **sequência de funções** $\{f_m\} = \{f_0, f_1, f_2, ...., f_m, ....\}$ de $CP[a,b]$ converge para uma função $f$ de $CP[a,b]$ se $\lim_{m\to\infty} \|f_{m-f}\| = 0$.

Neste caso escrevemos

$$\lim_{m\to\infty} f_m = f.$$

(b) Uma **série de funções** $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ de $CP[a,b]$ converge para uma função $f$ de $CP[a,b]$ se o limite da sequência das somas parciais converge para $f$, ou seja,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} f_n = f.$$

Em outras palavras a definição (**3.b**) nos diz que a série de Fourier converge uniformemente para uma certa função $f(x)$ (necessariamente periódica) no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

**Proposição 2.** Se uma sequência de funções $\{f_m\}$ de $CP[a,b]$ converge para uma função $f$ de $CP[a,b]$, então esta função é única a menos dos seus valores em um número finito de pontos.

*Demonstração ver em* [5]

**Proposição 3.**

(a) Se uma sequência de funções $\{f_m\}$ de $CP[a,b]$ converge para uma função $f$ de $\mathcal{V}$, então para todo vetor $g$ de $\mathcal{V}$ a sequência de números reais $\{\langle f_m, g\rangle\}$ converge para $\langle f, g\rangle$. Ou seja, se $\lim_{m\to\infty} f_m = f$ , então

$$\lim_{m\to\infty} \langle f_m, g\rangle = \langle \lim_{m\to\infty} f_m, g\rangle.$$

(b) Se uma série de funções $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ de $CP[a,b]$ converge para uma função $f$ de $CP[a,b]$, então, para toda função $g$ de $CP[a,b]$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \langle f_m, g\rangle = \langle \sum_{m=0}^{\infty} f_m, g\rangle.$$

*Demonstração ver em* [5]

**Proposição 4.** Seja $CP[ab]$, o espaço das funções contínuas por partes no intervalo $[a, b]$. Seja $\{g_0, g_1, g_2, ..., g_n, ...\}$ um subconjunto de $\mathcal{V}$ de vetores ortogonais não nulos.

$$\text{Se} \quad f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \, g_m, \quad \text{então} \quad c_m = \frac{\langle f, g_m \rangle}{\| g_m \|^2}, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, 3...$$

*Demonstração ver em* [5]

## 2.4 Séries de Fourier

**Exemplo 2.** Seja $L$ um número real maior que zero. Seja $CP[-L, L]$ o conjunto das funções contínuas por partes do intervalo $[-L, L]$ em $\mathcal{R}$ com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^{L} f(t)g(t)dt.$$

Já mostramos no Exemplo 1 que o conjunto

$$\{1, \cos\frac{\pi t}{L}, \text{sen}\frac{\pi t}{L}, \cos\frac{2\pi t}{L}, \text{sen}\frac{2\pi t}{L}, ..., \cos\frac{n\pi t}{L}, \text{sen}\frac{n\pi t}{L}, ...\}$$

é ortogonal.

Vamos aplicar a Proposição 4 a este conjunto. Para isto vamos calcular as normas dos seus elementos.

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-L}^{L} dt = 2L$$

$$\langle \cos\frac{n\pi t}{L}, \cos\frac{n\pi t}{L} \rangle = \int_{-L}^{L} \cos^2\frac{n\pi t}{L} dt =$$

Por substituição temos:

seja $s = \dfrac{\pi t}{L}$,então $dt = \dfrac{L}{\pi} ds$ segue

$$= \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ns ds = \tag{2.2}$$

Usando a relação fundamental 1 da trigonometria

$\cos^2(ns) + \text{sen}^2(ns) = 1$, temos:

$$\text{sen}^2(ns) = 1 - \cos^2(ns) \tag{2.3}$$

Usando cosseno da soma de dois arcos

$\cos(2ns) = \cos^2(ns) - \text{sen}^2(sn)$, temos:

$$\cos^2(ns) = \cos(2ns) + \text{sen}^2(ns) \tag{2.4}$$

Substituindo (2.3) em (2.4), temos:

$$\cos^2(ns) = \frac{\cos(2ns) + 1}{2} \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) em (2.2), temos:

$$\frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1 + \cos 2ns]ds = \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2ns\, ds + \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ds$$

seja $u = 2ns$, então $ds = \dfrac{du}{2n}$ segue

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-2n\pi}^{2n\pi}\cos(u)du = \frac{1}{4n\pi}(\text{sen}(u)|_{-2n\pi}^{2n\pi}) = \frac{1}{4n\pi}(2\,\text{sen}(2n\pi)) = 0$$

$$\frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ds = \frac{L}{2\pi}(\pi - (-\pi)) = \frac{2\pi L}{2\pi} = L$$

$$\text{Portanto} \quad \langle \cos\tfrac{n\pi t}{L}, \cos\tfrac{n\pi t}{L}\rangle = \int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi t}{L}dt = L$$

**Análogo ao anterior**:

$$\langle \text{sen}\frac{n\pi t}{L}, \text{sen}\frac{n\pi t}{L}\rangle = \int_{-L}^{L}\text{sen}^2\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^2 ns ds = \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1 - \cos 2\,ns]ds = L$$

Assim, para toda função $f \in CP[-L, L]$ que possa ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\frac{m\pi t}{L}, \tag{2.6}$$

teremos que os coeficientes da série serão dados por

$$a_m = \frac{\langle\, f, \cos\dfrac{m\pi t}{L}\,\rangle}{\|\cos\dfrac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, ... \tag{2.7}$$

$$b_m = \frac{\langle\, f, \text{sen}\dfrac{m\pi t}{L}\,\rangle}{\|\text{sen}\dfrac{m\pi t}{L}\|^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt, \quad \text{para } m = 1, 2, ... \tag{2.8}$$

A série (2.6) com os coeficientes dados acima é chamada **Séries de Fourier**.

**Teorema 5.** Seja $L$ um número real maior que zero. Para toda função $f$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[-L, L]$, a *série de Fourier* de $f$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, ...$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt, \quad \text{para } m = 1, 2, ...$$

converge para $f$ na norma $\| f \| = (\int_{-L}^{L}(f(t))^2\,dt)^{\frac{1}{2}}$. Ou seja, podemos escrever

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}.$$

## 2.5 Função Par e Função Ímpar

Se uma função $f \in CP[-L, L]$ é par, isto é, $f(-t) = f(t)$, para todo $t \in [-L, L]$, e pode ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L},$$

então os coeficientes obtidos no exemplo 2 são dados por:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, ...$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt = 0 \quad \text{para } m = 1, 2, ...$$

Analogamente, se uma função $f \in CP[-L, L]$ é ímpar , isto é, $f(-t) = -f(t)$, para todo $t \in [-L, L]$, e pode ser escrita como a série

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L},$$

então os coeficientes obtidos no Exemplo 2 são dado por:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt = 0 \quad \text{para } m = 0, 1, 2, ...$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt, \quad \text{para } m = 1, 2, ...$$

**Corolário 6.** Seja $L$ um número real maior que zero. Para toda função $f$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[0, L]$, a **série de Fourier de cossenos** de$f$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L},$$

e a **série de Fourier de senos** de $f$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L},$$

em que

$$a_m = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, ...$$

$$b_m = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt, \quad \text{para } m = 1, 2, ...$$

converge para $f$ na norma $\| f \| = (\int_0^L (f(t))^2\,dt)^{\frac{1}{2}}$.

**Observação:** Se a função $f(x)$ for par então os coeficientes $b_m$ se anulam formando a série de fourier de cossenos e se a função $f(x)$ for ímpar os coeficientes $a_m$ se anularam formando a série de fourier de senos. Graficamente tanto uma como a outra se aproximam da função dada.

**Exemplo 3.** Seja $L$ um número real maior que zero. Considere a função $f_{c,d}^{(0)} : [0, L] \to \mathcal{R}$ dada por

$$f_{c,d}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad cL \leq x \leq dL, \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } 0 \leq c < d \leq 1. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e de cossenos de $f_{c,d}^{(0)}$ . Para a série de cossenos temos que

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} dt = 2(d-c),$$

$$a_m = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} \cos\frac{m\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{m\pi}\,\text{sen}s\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}, \quad \text{para} \quad m = 1, 2...$$

Assim a série de Fourier de cossenos de $f$ é

$$f_{c,d}^{(0)}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi t}{L} = (d-c) + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\, m\pi d - \text{sen}\, m\pi c}{m}\cos\frac{m\pi t}{L}.$$

Observe que a série de Fourier de cossenos da função constante igual a 1, $f_{0,1}^{(0)}$ tem somente o primeiro termo diferente de zero que é igual a 1.

Para a série de senos temos que para m = 1, 2,...,

$$b_m = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\text{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} \text{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt = -\frac{2}{m\pi}\cos s\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}$$

Assim, a série de Fourier de senos de $f_{c,d}^{(0)}$ é dada por

$$f_{c,d}^{(0)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\,\text{sen}\frac{m\pi t}{L} = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\pi c - \cos m\pi d}{m}\,\text{sen}\frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função constante igual a 1, $f_{0,1}^{(0)}$ os termos de índice par são iguais a zero e neste caso a série de senos de $f_{0,1}^{(0)}$ é dada por

$$f_{0,1}^{(0)} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1}\text{sen}\frac{(2m-1)\pi t}{L}.$$

GRÁFICOS DO EXEMPLO 3

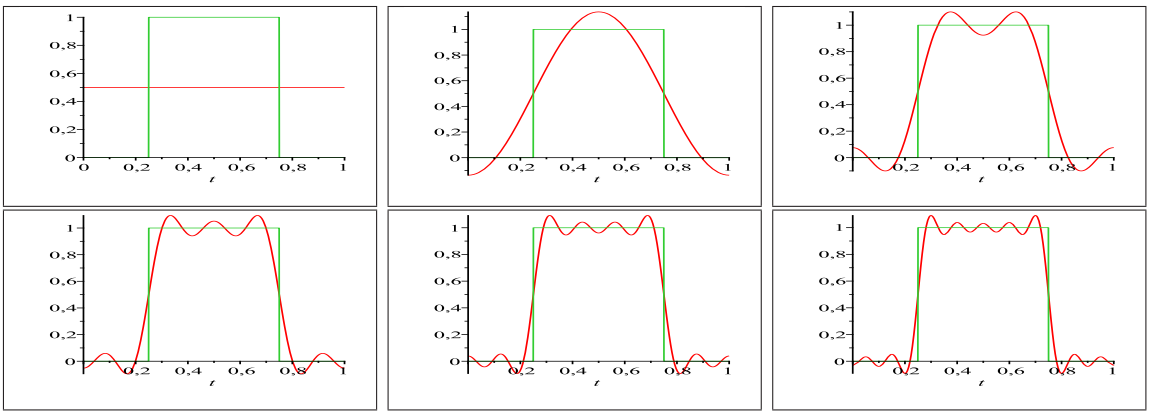

Figura 2.3: A função $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de cossenos de $f$, para $n = 0, 2, 6, 10, 14, 18$

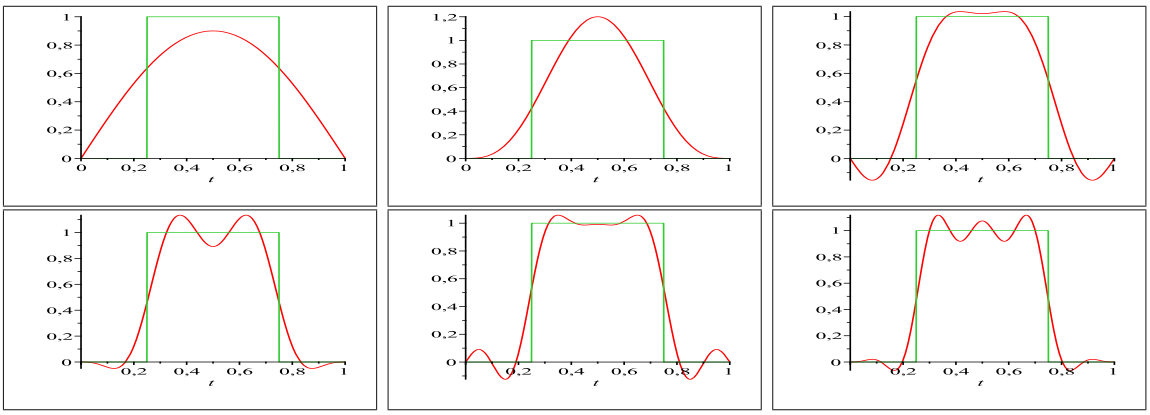

Figura 2.4: A função $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ definida por $f(t) = 1$, se $t \in [1/4, 3/4]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da série de Fourier de senos de $f$, para $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

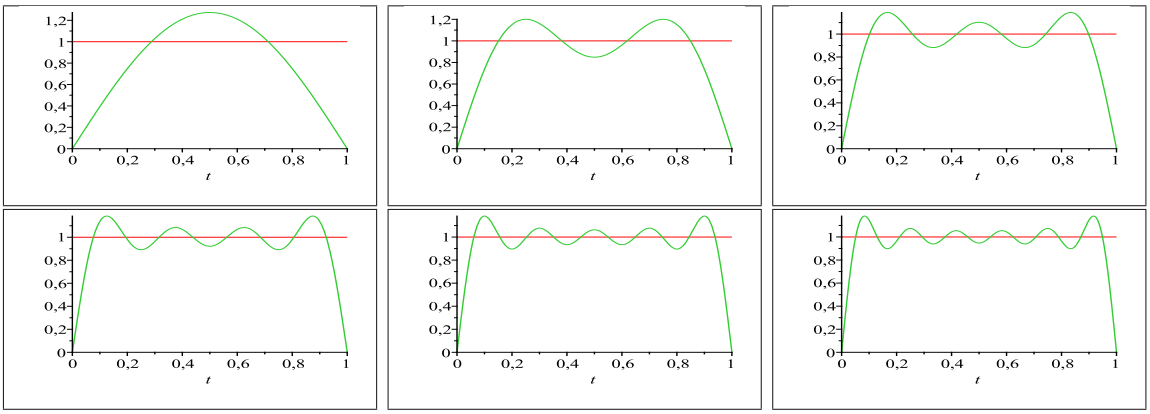

Figura 2.5: A função $f(t) = 1$ em $[0, 1]$, e as somas parciais da série de Fourier de senos de $f$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

**Exemplo 4.** Considere a função $f^{(1)}_{c,d} : [0, L] \to \mathcal{R}$ dada por

$$f^{(1)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t, & \text{se} \quad c\,L \leq t \leq dL, \quad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } 0 \leq c < d \leq 1. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e de cossenos de $f^{(1)}_{c,d}$. Para a série de cossenos temos que

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} dt = 2(d^2 - c^2)$$

$$a_m = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} t\cos\frac{m\pi t}{L}\,dt = \frac{2L}{m^2\pi^2}\int_{m\pi c}^{m\pi d} s\cos s\,ds$$

$$= \frac{2L}{m^2\pi^2}\,(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s)\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}$$

Assim a série de Fourier de cossenos de $f$ é

$$f^{(1)}_{c,d}(t) = \frac{a_0}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos\frac{m\pi t}{L} = \frac{L(d^2 - c^2)}{2} + \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s)\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}}{m^2}\cos\frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função $f_{c,d}^{(1)}(t) = t$, para $0 \leq t \leq 1$ $f_{0,1}^{(1)}$ temos que

$$a_m = \frac{2L}{m^2\pi^2}\left((-1)^m - 1\right).$$

Assim os termos de índice par são iguais a zero e neste caso a série de cossenos de $f_{0,1}^{(1)}$ é dada por

$$f_{0,1}^{(1)}(t) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi t}{L},$$

Para a série de senos temos que para $m = 1, 2, ...,$

$$b_m = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\mathrm{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{cL}^{dL} t\,\mathrm{sen}\frac{m\pi t}{L}\,dt = \frac{2L}{m^2\pi^2}\int_{m\pi c}^{m\pi d} s\,\mathrm{sen}\,s ds$$

$$= \frac{2L}{m^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}$$

Assim, a série de Fourier de senos de $f_{c,d}^{(1)}$ é dada por

$$f_{c,d}^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L} = \frac{2L}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big|_{m\pi c}^{m\pi d}}{m}\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L}$$

Observe que para a função $f(t) = t$, para $0 \leq t \leq 1$, $f_{0,1}^{(1)}$, temos que

$$b_m = \frac{2L}{m^2\pi^2}\left(-\cos m\pi\right) = \frac{(-1)^{m+1}\,2L}{m\pi}$$

e neste caso a série de senos de $f_{0,1}^{(1)}$ é dada por

$$f_{0,1}^{(1)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L} = \frac{2L}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L}$$

GRÁFICOS DO EXEMPLO 4

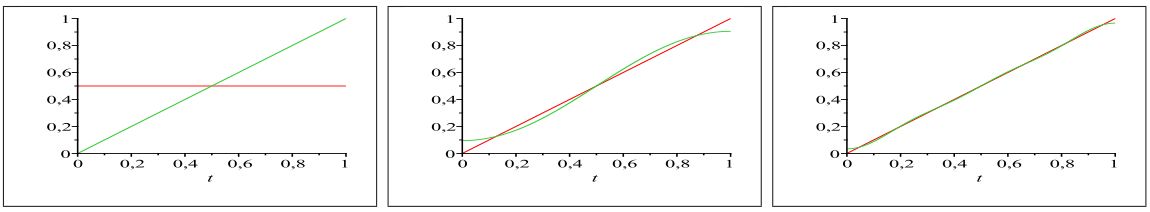


Figura 2.6: A função $f(t) = t$ em $[0, 1]$, e as somas parciais da série de Fourier de cossenos para $n = 0, 1, 3$

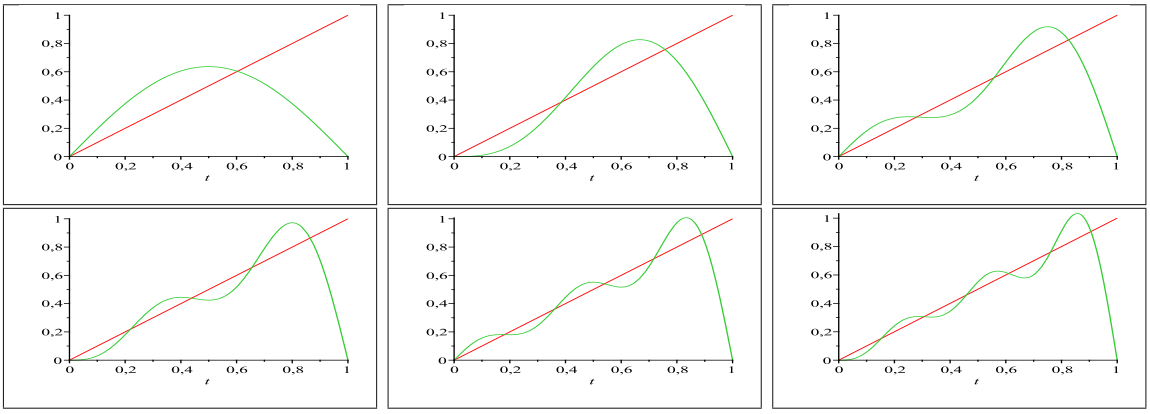


Figura 2.7: A função $f(t) = t$ em $[0, 1]$, e as somas parciais da série de Fourier de senos de $f$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

## 2.6 Combinação linear

Com os coeficientes das funções destes dois exemplos podemos determinar as séries de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas. Isto por que os coeficientes das séries dependem linearmente das funções, ou seja,

$$a_m(\alpha f + \beta g) = \alpha\, a_m\,(f) + \beta\, a_m\,(g) \qquad \text{e} \qquad b_m\,(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\, b_m\,(f) + \beta\, b_m\,(g).$$

Por exemplo, a função

$$f(t) = \begin{cases} t & , \text{ se } \; 0 \leq t \leq \frac{L}{2} \\ L - t, & \text{ se } \; \frac{L}{2} \leq t \leq L \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$f = f^{(1)}_{0\,,\,\frac{1}{2}} + f^{(0)}_{\frac{1}{2}\,,\,1} - f^{(1)}_{\frac{1}{2}\,,\,1}.$$

Assim os coeficientes $a_m$ e $b_m$ podem ser calculados como

$$a_m\,(f) = a_m\left(f^{(1)}_{0\,,\,\frac{1}{2}}\right) + L\,a_m\left(f^{(0)}_{\frac{1}{2}\,,\,1}\right) - a_m\left(f^{(1)}_{\frac{1}{2}\,,\,1}\right)$$

$$b_m\,(f) = b_m\left(f^{(1)}_{0\,,\,\frac{1}{2}}\right) + L\,b_m\left(f^{(0)}_{\frac{1}{2}\,,\,1}\right) - b_m\left(f^{(1)}_{\frac{1}{2}\,,\,1}\right)$$

| | | |
|---|---|---|
| $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ | $a_m = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(t)\cos\dfrac{m\pi t}{L}\,dt$ | $b_m = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(t)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{m\pi t}{L}\,dt$ |
| $f^{(0)}_{c,d}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL \leq t \leq dL \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ | $a_0 = 2(d-c)$ <br> $a_m = \frac{2}{m\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$ | $b_m = -\dfrac{2}{m\pi}\cos s\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$ |
| $f^{(1)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL \leq t \leq dL \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ | $a_0 = 2(d^2 - c^2)$ <br> $a_m =$ <br> $\frac{2L}{m^2\pi^2}\,(\mathrm{sen}\,s + \cos s)\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$ | $b_m =$ <br> $\frac{2L}{m^2\pi^2}\,(-\cos s + \mathrm{sen}\,s)\Big\vert_{m\pi c}^{m\pi d}$ |

Tabela 2.1: Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares

# Capítulo 3

# Aplicações: Interpretações Físicas.

**Condições de Contorno e Iniciais**

Uma diferença importante entre EDO's e EDP's é a informação suplementar necessária para a unicidade da solução. Por exemplo, na solução geral de uma EDO linear de ordem $n$ aparecem $n$ constantes arbitrárias: podemos determinar essas constantes impondo condições iniciais, isto é, fixando os valores da solução e de suas derivadas até a ordem $(n-1)$ em um determinado ponto. A situação para as EDP's é fundamentalmente diferente: mesmo no caso linear, a solução geral, quando é possível achá-la, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes, de modo que existe um grau de generalidade muito maior em relação à forma da solução. No caso das EDP's o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procuramos soluções definidas em um aberto $\Omega \subseteq R^n$; é natural substituir os extremos do intervalo (caso $n = 1$) pelo bordo $\partial\Omega$ da região $\Omega$. Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (condições de contorno) temos um problema de valores de contorno ou simplesmente problema de contorno. Condições de contorno aparecem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários (isto é, independentes do tempo); encontraremos muitas vezes condições do tipo:

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \ x \in \partial\, \Omega \tag{3.1}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes dadas, $f$ é uma função dada em $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada de $u$ na direção normal a $\partial\Omega$. No caso em que $\beta = 0$, a condição (3.1) é conhecida como condição de Dirichlet; no caso em que $\alpha = 0$, temos uma condição de Neumann. Como generalizar o conceito de condições iniciais (no caso de EDO's) para EDP's ?

Como no caso de EDP's temos mais de uma variável dependente (por exemplo, $x$ e $t$), é natural fixar uma das variáveis (por exemplo, $t = 0$) e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo $u(x, 0) = f(x)$ e $ut(x, 0) = g(x)$, $f$ e $g$ funções dadas). Observe que no caso $n = 2$ com variáveis $x$, $t$ isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva $t = 0$; analogamente, no caso $n = 3$, com variáveis $x$, $y$, $t$, fixar $t = 0$ significa olhar a solução (e suas derivadas normais, se for o caso) ao longo da superfície (plano) $t = 0$. Podemos então generalizar o conceito de condições iniciais impondo o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva (se $n = 2$) ou superfície (se $n = 3$) inicial, o problema correspondente é um problema de Cauchy ou de valor inicial.

## 3.1 Equação do Calor

Em física existem três formas de transmissão de calor: transmissão por condução; transmissão por convecção e transmissão por radiação. Mas a que se encaixa no nosso trabalho é a **transmissão por condução**.

**Transmissão por condução:** É o processo pelo qual o calor flui de uma região de temperatura mais elevada para outra de temperatura mais baixa, dentro de um meio (sólido, líquido ou gasoso) ou entre meios diferentes em contatos físicos diretos. Nesta forma de transmissão de calor, a energia é transmitida pela comunicação molecular direta, ou seja, devido ao aumento de energia cinética proporcionado por uma excitação térmica qualquer numa região de um corpo (extremidade de uma barra), os elétrons que adquirem maior energia, tornam-se mais velozes e com maiores órbitas, chocam-se com elétrons vizinhos que adquirem energia térmica dos elétrons que deram o choque de modo que se forma uma cadeia na transmissão da energia consequentemente do calor, isto acontece por todo o corpo.

De acordo com leis gerais da teoria do calor temos a seguinte equação que governa a temperatura $u$ em função do tempo e da posição no espaço:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\, div(\bigtriangledown u)$$

designada por equação do calor e onde $k$ é uma constante positiva denominada constante de difusão térmica. Informalmente $-k$ grad $u$ representa o fluxo de calor pela Lei de

Fourier e por outro lado a variação de temperatura é proporcional à divergência do fluxo de calor, o que não vem ao caso.

Com o único objetivo de simplicidade de exposição, e apesar de os métodos envolvidos serem trivialmente generalizáveis a dimensões superiores, vamos apenas considerar o caso do espaço unidimensional; $u$ representará a temperatura num filamento e será função de $x$, a posição no referido filamento, e de $t$, variável que representará o tempo.

### 3.1.1 Equações do Calor em uma Barra

(I). $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$

(II). $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0$ Condição de Contorno (C.C)

(III). $u(x,0) = f(x)$ Condição Inicial (C.I)

**Comentário:**

**1.** A Equação Diferencial Parcial (EDP) (**I**) é conhecida como **"Equação do calor unidimensional"**, ela descreve a **variação da temperatura** em um corpo, ao longo da **direção** $x$, em uma função do **tempo** $t$.

**2.** A função $u = u(x,t)$ representa a temperatura de uma barra metálica na posição $x$ e no instante $t$.

**3.** A constante "$\alpha$" é a **condutividade térmica do metal**. Ou seja, entre duas substâncias, a que tiver condutividade maior conseguirá transferir uma quantidade maior de calor, para uma mesma diferença de temperatura.

**4.** Se pretendermos obter uma solução particular do problema, teremos que conhecer uma **condição inicial (C.I)** sobre $t$ e duas **condições de fronteira ou contorno (C.F.)** sobre $x$.

**5.** A condição inicial corresponderá a temperatura inicial em $t = 0$, isto é, $u(x,0) = f(x)$.

**6.** As condições de fronteira ou condições de contorno corresponde normalmente a temperatura da barra em cada extremidade, isto é, em $x = 0$ e $x = L$: $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$.

Para ilustra temos a figura abaixo que se aplica ao caso unidimensional, quando há

gradiente de temperatura apenas na direção $x$.

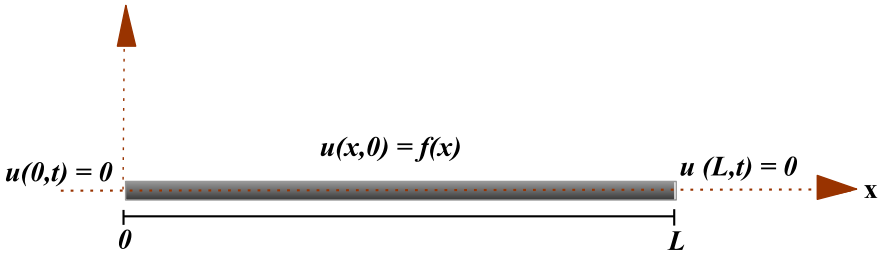


Figura 3.1: barra metálica unidimensional

### 3.1.2 Extremidades a Temperaturas Fixas

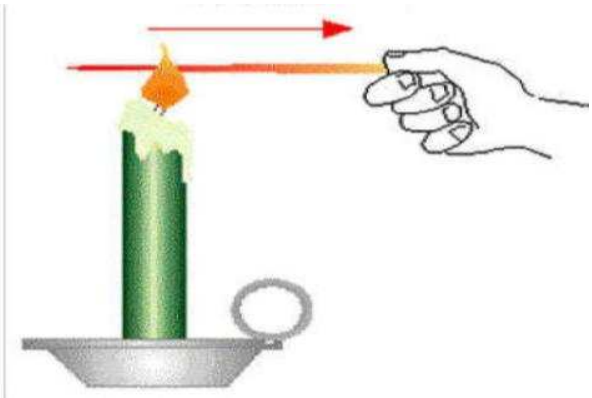

Figura 3.2: barra sendo aquecida

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1, \ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Vamos inicialmente resolver o problema com $T1 = T2 = 0$, que chamamos de condições homogêneas.

**Condições Homogêneas**

Considere-se uma barra de comprimento L e constante de difusão térmica $\alpha$. Estas são duas constantes positivas do sistema. Considere-se ainda que a barra está isolada exceto nas suas duas extremidades $x = 0$ e $x = L$. Estas extremidades são postas em contato com um reservatório de calor à temperatura de 0 graus. Seja a $f(x)$ a distribuição inicial de temperatura. Temos então as seguintes condições de DIRICHLET:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos usar um método chamado separação de variáveis. Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de $x$ por uma função de $t$, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$\alpha^2 X''(x)\,T(t) = X(x)\,T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de $x$, enquanto o segundo depende apenas de $t$. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) &= 0,\ X(0) = 0,\ X(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) &= 0 \end{cases}$$

A primeira equação pode ter como soluções,

**Se** $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1\, e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

**Se** $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2$.

**Se** $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que $\lambda < 0$, mais que isso $\lambda$ tem ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

Assim a segunda equação diferencial tem solução

$$T(t) = C_2\, e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t}, \;\; n = 1, 2, 3...$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)\, T(t) = c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$ Assim pelo Corolário 6 na página 23 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ \ n = 1, 2, 3...$$

Observe que quando $t$ tende a mais infinito a solução tende a zero.

**Exemplo 5.** Vamos considerar uma barra de $40\,cm$ de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperatura de $0^0$ e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ \ 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & se\ \ 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, u}{\partial\, t} = \dfrac{\partial^2\, u}{\partial\, x^2} \\ u(x, 0) = f(x),\ \ 0 < x < 40 \\ u(0, t) = 0,\ \ u(40, t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{40}\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\,t}$$

em que $c_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$c_n = \frac{1}{20}\int_0^{40} f(t)\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{40})\,dx$$

$$= c_n\left(f^{(1)}_{0,1/2}\right) + 40\,c_n\left(f^{(0)}_{1/2,1}\right) - c_n\left(f^{(1)}_{1/2,1}\right)$$

$$= \frac{80}{n^2\pi^2}\,(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{80}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{80}{n^2\pi^2}\,(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}$$

$$= \frac{160\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\quad n = 1, 2, 3...$$

Portanto a solução é

$$u(x,t) = \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\,e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\,t}$$

$$= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\,e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}\,t}$$

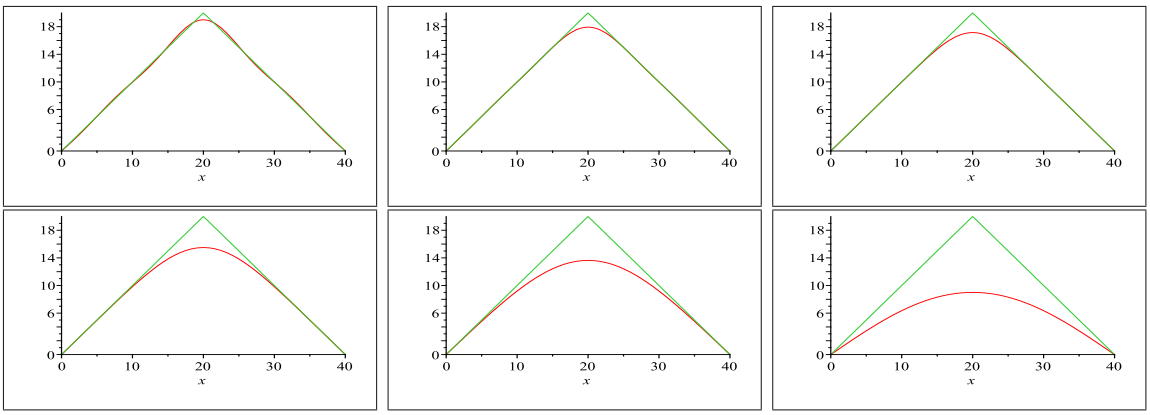


Figura 3.3: Solução da equação do calor do exemplo 5 tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0\,,10\,,20\,,50\,,100\,,300$

Condições Não Homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ \ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ \ u(40,t) = T_2 \end{cases}$$

Observe que uma função somente de $x$ tal que a segunda derivada é igual a zero satisfaz a equação do calor. Assim,

$$u(x,t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}\,x$$

satisfaz a equação do calor e as condições de fronteira $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$. O que sugere como solução do problema inicial

$$u(x,t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}\,x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}\,t}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que

$$f(x) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}\, x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

ou

$$f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}\, x = + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de$f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}\, x$. Assim pelo Corolário 6 na página 23 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{L}\, x \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3...$$

Observe que quando t tende a mais infinito a solução tende a solução

$$v(x,t) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L}\, x$$

chamada **solução estacionária**.

**Exemplo 6.** Vamos considerar uma barra de $40cm$ de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de $10^0$ C e $30^0$ C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 2x, & se \;\; 0 \leq x < 20 \\ 70 - x, & se \;\; 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \;\; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 10, \;\; u(40,t) = 30 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = 10 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \text{sen} \frac{n\pi x}{40} \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\, t}$$

em que $c_n$ são os coeficientes da série de senos de

$$f(x) - 10 + x/2 = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & se \;\; 0 \leq x < 20 \\ 60 - \frac{3}{2}x, & se \;\; 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

ou seja,

$$c_n = \frac{3}{2}\, c_n\left(f^{(1)}_{0,1/2}\right) + 60 c_n\left(f^{(0)}_{1/2,1}\right) - \frac{3}{2}\, c_n\left(f^{(1)}_{1/2,1}\right)$$

$$= \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\, cos\, s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_0^{n\pi/2} - \frac{120}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \frac{120}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \operatorname{sen} s\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}$$

$$= \frac{240}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi}{2}\cos(n\pi/2) + \operatorname{sen}(n\pi/2)\right) + \frac{120}{n\pi}\cos(n\pi/2)$$

$$= \frac{240 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3...$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

$$= 10 + \frac{x}{2} + \frac{240}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\, n^2 \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{1600}t}$$

Observe que quando $t$ tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária $v(x,t) = 10 + \frac{x}{2}$.

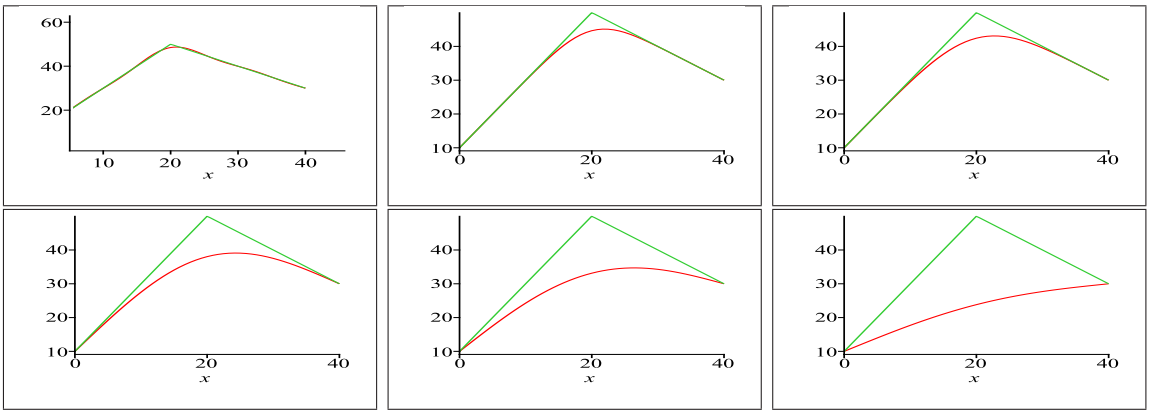


Figura 3.4: Solução da equação do calor do exemplo 6 tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0\,,10\,,20\,,50\,,100\,,300$

### 3.1.3 Barra Isolada nos Extremos

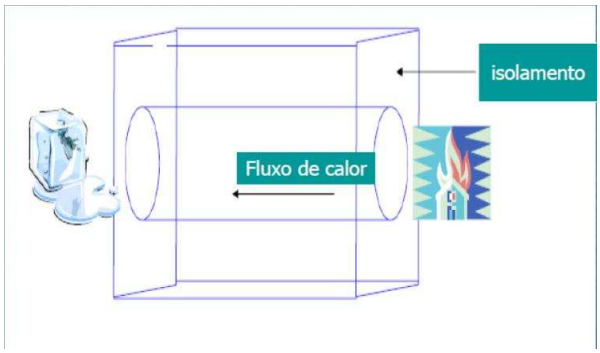


Figura 3.5: barra isolada

Vamos agora considerar o caso em que a barra se encontra isolada, sendo portanto nulo o fluxo de calor nas extremidades da barra. Esta condição traduz-se pelas relações

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,L) = 0$$

que substituem a imposição de temperatura constante do problema anterior. Obtemos assim o problema da equação de calor com condições fronteira de NEUMANN:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de $x$ por uma função de $t$, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0 \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) &= 0 \end{cases}$$

A primeira equação pode ter como soluções,

**Se** $\lambda > 0$ **:** $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

**Se** $\lambda = 0$ **:** $X(x) = C_1 + C_2$.

**Se** $\lambda < 0$ **:** $X(x) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X'(x) = 0$ e $X'(x) = 0$ implicam que $\lambda \leq 0$, mais que isso $\lambda$ tem ter valores dados por

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Assim a segunda equação diferencial tem solução

$$T(t) = C_2\, e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t}, \quad n = 1, 2, 3...$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)\,T(t) = c_n \cos\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t}$$

Mais que isso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\, t}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de cossenos de $f(x)$ Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dx, \;\; c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \;\; n = 1, 2, 3...$$

Observe que a solução tende a $v(x,t) = c_0$, quando $t$ tende a mais infinito, ou seja, a temperatura da barra vai tender a ficar constante e igual ao valor médio da temperatura

inicial.

**Exemplo 7.** Vamos considerar uma barra de $40cm$ de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades também isoladas, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = f(x), \ 0 < x < 40 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{40}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\, t}$$

em que $c_n$ são os coeficientes da série de cossenos de $f(x)$, ou seja,

$$c_0 = \frac{1}{40}\int_0^{40} f(t)\, dx = 10,$$

$$c_n = \frac{1}{20}\int_0^{40} f(t)\cos\frac{n\pi x}{40}\, dx$$

$$= 80\,\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2\pi^2} \quad n = 1, 2, 3...$$

Portanto a solução é dada por

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 10 + \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^{n\,2}}{n} \cos\frac{n\pi x}{40}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\,t} \\
&= 10 + \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n - 2}{4n^2} \cos\frac{n\pi x}{20}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}\,t} \\
&= 10 - \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{20}\, e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{400}\,t}
\end{aligned}
$$

Observe que a solução tende a $v(x,t) = 10$, quando $t$ tende a mais infinito.

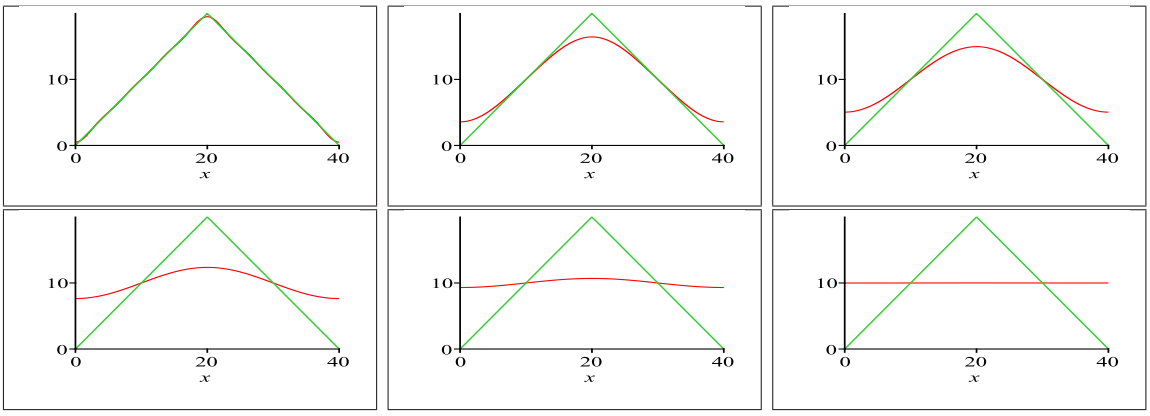


Figura 3.6: Solução da equação do calor do exemplo 7 tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0\,, 10\,, 20\,, 50\,, 100\,, 300$

| Material | Condutividade térmica $[J/s/(m.K)]$ ou $[W/(m.K)]$ |
|---|---|
| Prata | 426 |
| Cobre | 398 |
| Alumínio | 237 |
| Tungstênio | 178 |
| Ferro | 80,3 |
| Vidro | 0,72 - 0,86 |
| Água | 0,61 |
| Madeira (pinho) | 0,11 - 0,14 |
| Fibra de vidro | 0,046 |
| Ar | 0,026 |

Tabela 3.1: tabela de condutividade

## 3.2 Equação da Onda

Para entendermos como funciona a equação da onda precisaremos primeiro relembramos alguns conceitos físicos.

**Ondas:** É uma perturbação que se propaga transmitindo energia cinética e potencial sem transporte de matéria.

**Ondas Periódicas:** São abalos sucessivos que se repetem em tempos iguais.

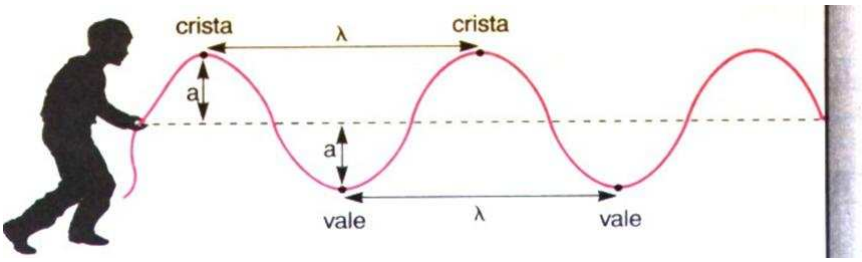


Figura 3.7: ondas periódicas

Um único abalo é denominado de PULSO DE ONDA.

**Período:** é o tempo decorrido numa oscilação.

**Frequência:** é o número de oscilações por unidade de tempo.

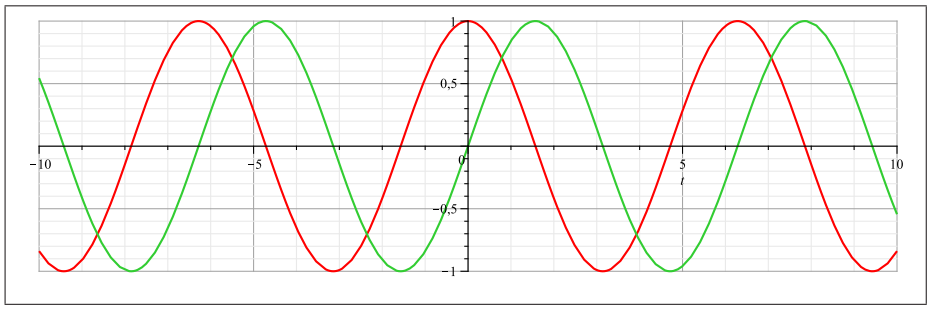


Figura 3.8: senóide e cossenóide

$f = \dfrac{1}{T}$ ou $T = \dfrac{1}{f}$; $f$ = frequência e $T$ = período.

**Comprimento de onda** ($\lambda$)**:** É a distância percorrida pela onda durante uma oscilação, ou seja, distância entre valores repetidos num padrão de onda.

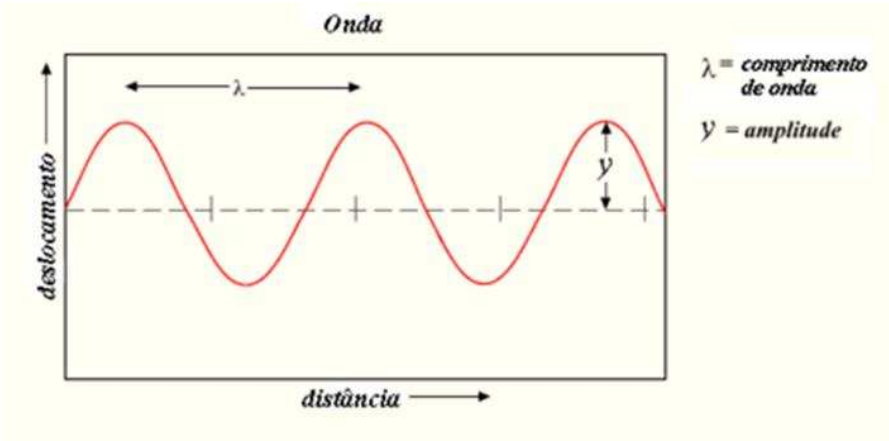


Figura 3.9: comprimento de onda

**Velocidade de propagação:**

$V = \dfrac{\lambda}{T}$ ou $V = \lambda f$

**Reflexão:** Quando uma onda volta para a direção de onde veio, devido à batida em material reflexivo.

**Refração:** A mudança da direção das ondas, devido a entrada em outro meio. A velocidade da onda varia, pelo que o comprimento de onda também varia, mas a frequência permanece sempre igual, pois é característica da fonte emissora.

**Interferência:** Adição ou subtração das amplitudes das ondas, depende da fase das

ondas em que ocorre a superposição.

**Ondas estacionárias:** São ondas que permanecem no mesmo lugar, como as vibrações em uma corda de violino. Quando uma corda é deformada, a perturbação propaga-se por toda a corda, refletindo-se nas suas extremidades fixas. Da interferência das várias ondas pode resultar uma onda estacionária, ou seja, um padrão de oscilação caracterizado por sítios (os nodos) onde não há movimento. Os nodos resultam da interferência (destrutiva) entre a crista e o ventre de duas ondas. Nos anti-nodos, onde o deslocamento é máximo, a interferência dá-se entre duas cristas ou dois ventres de onda. Cada padrão de oscilação corresponde a uma determinada frequência a que se chama um harmónico. As frequências de vibração variam com o comprimento da corda e com as suas características (material, tensão, espessura), que determinam a velocidade de propagação das ondas. À frequência mais baixa a que a corda vibra chama-se frequência fundamental.

**Isotropia:** É a propriedade que caracteriza as substâncias que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada.

**Homogeneidade:** Significa que num determinado meio, as suas propriedades mantêm-se em toda a sua extensão.

### Classificação das Ondas

Iremos classificar a onda segundo a aplicação da Série de Fourier:

• Quanto à natureza:

**Onda mecânica:** É aquela que necessita de um meio material para se propagar.

• Quanto às direções de propagação e vibração:

**Onda transversal:** É aquela cuja direção de propagação é perpendicular à direção de vibração.

• Quanto à dimensão:

**Onda unidimensional:** É aquela que se propaga ao longo de uma linha. Exemplo: onda na corda ou, na mola.

### Equação da onda

A equação da onda é aquela que modela a propagação de ondas em um meio homogêneo e isotrópico e não-dissipativo ou ainda, é uma equação de derivadas parciais que descreve a propagação de uma onda:

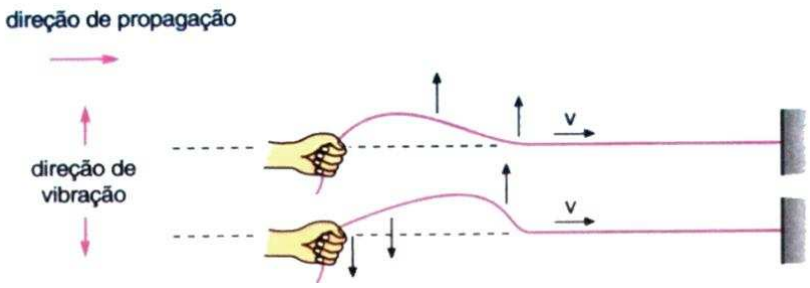


Figura 3.10: onda transversal

$$u_{tt} = \alpha^2 \Delta u \quad \textbf{ou} \quad \nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Onde:

- $\alpha$ é a velocidade de propagação.
- $u$ é uma função da posição e do tempo que descreve o comportamento da onda;
- $v$ é a velocidade da onda;
- $t$ é o instante temporal.

**$u$ geralmente é dado por:**

$u = Asin(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} - wt)$

Onde:

- $A$ é a amplitude da onda;
- $w = 2\pi f$ é a frequência angular;
- $f$ é a frequência de oscilação da onda;
- $t$ é o instante temporal.
- $r$ é a posição.
- $k$ é o vetor de onda.

Para o vetor de onda temos as seguintes relações:

$\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k_x} + \overrightarrow{k_y} + \overrightarrow{k_z}$

$$\overrightarrow{k_n} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$\lambda_n$ é o comprimento de onda medido na direção $n$. Para um sistema de coordenadas cartesiano com três dimensões $n = x$ ou $y$ ou $z$.

### 3.2.1 Corda Elástica com Extremidades Presas

Consideremos uma corda esticada e com suas duas extremidades fixas. Provocando uma perturbação na corda, a onda transversal incidente e a refletida nas extremidades darão origem à onda estacionária na corda.

As vibrações da corda pertubarão o ar da região ao seu redor, dando origem às ondas sonoras que teram a mesma frequência de oscilação dos pontos da corda.

As extremidades fixas da corda sempre serão nós. Entre elas haverá a formação de n ventres. Haverá portanto diferentes modos de vibração ou diferentes harmônicos.

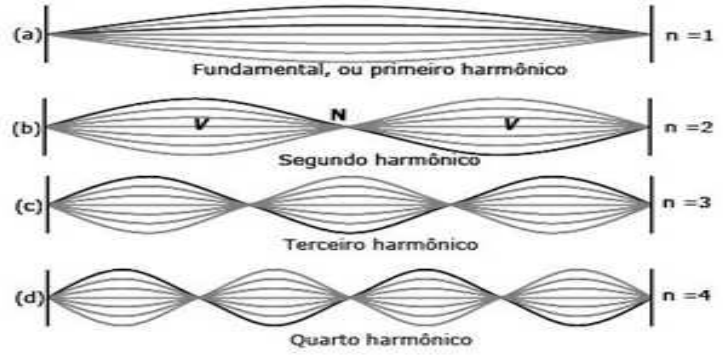


Figura 3.11: harmônicos gerados na corda do violino

Este tipo de situação é representado pelo sequinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \quad \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = \ 0, \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas.

### 3.2.2 Com Velocidade Inicial Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < L \\ u(0,t) = \ 0, \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de $x$ por uma função de $t$, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

Que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de $x$, enquanto o segundo depende apenas de $t$. isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \ X(0) = 0, \ X(L) = 0 \\ T''(t) - \alpha^2 \lambda T(t) &= 0, \ T'(0) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra e tem solução somente se

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

A segunda equação diferencial com a condição inicial tem solução

$$T(t) = C_2 \cos\frac{an\pi t}{L}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{an\pi t}{L}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{an\pi t}{L}$$

São soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $f(x)$. Assim pelo Corolário 6 na página 20 se a função $f(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[0,L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx, \;\; n = 1, 2, 3...$$

Observe que a solução $u_{x,t}$ para cada $x$ periódica com período $\dfrac{2L}{a}$.

**Exemplo 8.** Vamos considerar uma corda de $40\,cm$ de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ \ 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & se\ \ 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ \ 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = \ \ 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{an\pi t}{20}.$$

em que $c_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$, ou seja,

$$c_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40}\, dx$$

$$= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \ n = 1, 2, 3...$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} cos \frac{n\pi t}{20}.$$

$$= \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{40} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{20}.$$

GRÁFICOS DO EXEMPLO 8

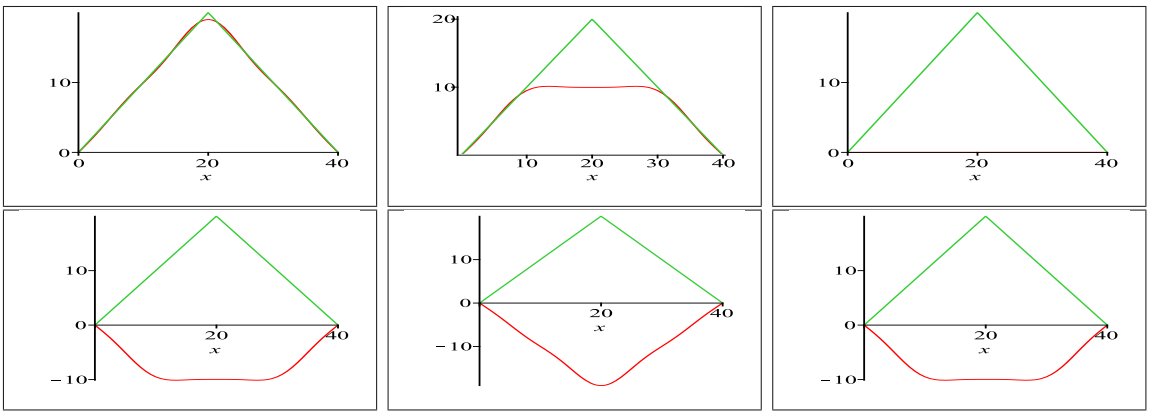


Figura 3.12: Solução do problema da corda elástica tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0\,,5\,,10\,,15\,,20\,,25$

### 3.2.3 Com Deslocamento Inicial Nulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \;\; 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \;\; u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de $x$ por uma função de $t$, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de $x$, enquanto o segundo depende apenas de $t$. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) & = & 0,\ X(0) = 0,\ X(L) = 0 \\ T''(t) - \alpha^2\lambda\ T(t) & = & 0, T(0) = 0 \end{cases}$$

A primeira equação com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra e tem solução somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2},\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

ou seja, a solução da primeira equação com as condições de fronteiras tem solução

$$X(x) = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

A segunda equação diferencial com a condição inicial tem solução

$$T(t) = C_2 \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L},\ \ n = 1, 2, 3, ...$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x,t) = X(x)T(t) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{an\pi t}{L}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, temos que ter

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Está é a série de Fourier de senos de $g(x)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $g(x)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[0L]$, então os coeficientes são dados por

$$\frac{an\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx \;\; n = 1, 2, 3...$$

**Exemplo 9.** Vamos considerar uma corda de $40\,cm$ de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, sem deslocamento inicial mas com uma velocidade inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & se \;\; 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & se \;\; 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \;\; 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0, \;\; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \;\; 0 < x < 40 \\ u(0,t) = \; 0, \;\; u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{20}$$

em que $\dfrac{n\pi}{20} c_n$ são os coeficientes da série de senos de $g(x)$, ou seja,

$$\frac{n\pi}{20} c_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} g(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \, dx$$

$$= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \;\; n = 1, 2, 3...$$

$$c_n \;\; = \frac{4800 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}}{n^3\pi^2}, \;\; n = 1, 2, 3...$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{3200}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20}.$$

$$= \frac{3200}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{20}.$$

GRÁFICOS DO EXEMPLO 9

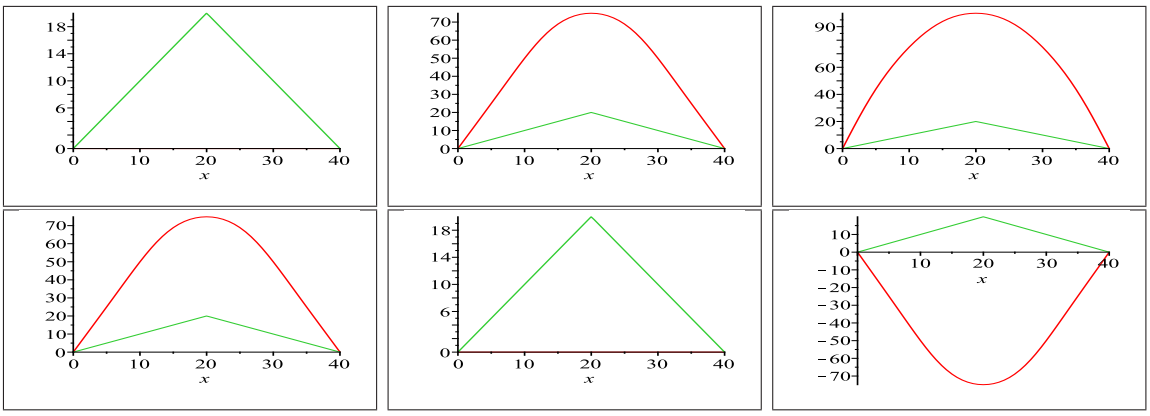

Figura 3.13: Solução do problema da corda elástica tomados apenas 3 termos não nulos da série, para $t = 0\,,5\,,10\,,15\,,20\,,25$

### 3.2.4 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \quad a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0 < x < L \\ u(0,t) = \ 0, \ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Como dissemos antes a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ não nulas, ou seja,

$$u(x,t) = u^{(f)}(x,t) + u^{(g)}(x,t).$$

**Exemplo 10.** Vamos considerar uma corda de $40\,cm$ de comprimento, presa nos lados, com coeficiente $a = 2$, com deslocamento inicial $f(x)$ e com uma velocidade inicial $g(x)$ dados por

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x, & se\ \ 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & se\ \ 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = \ 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} \cos \frac{n\pi t}{20} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n\, sen\, \frac{n\pi x}{40}\, sen\, \frac{n\pi t}{20}$$

em que $c_n$ e $\frac{n\pi}{20}\, d_n$ são os coeficientes da série de senos de $f(x)$ e de $g(x)$ , respectivamente, ou seja,

$$c_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40}\, dx$$

$$= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3...$$

$$\frac{n\pi}{20}\, d_n \ = \frac{1}{20} \int_0^{40} g(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40}\, dx$$

$$= \frac{160 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n = 1, 2, 3...$$

$$d_n = \frac{3200 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3\pi^3},\ n = 1, 2, 3...$$

Portanto a solução é dado por

$$u(x,t) = \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{20} + \frac{3200}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{20}$$

$$= \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{20}$$

$$+ \frac{3200}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{40}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi t}{20}$$

## 3.3 Equação de Laplace num Retângulo

Pode ser usada para descrever a temperatura $u = u(x,y)$ em uma região plana retangular como por exemplo, uma placa metálica. Embora inicialmente a temperatura varie em função da fonte de calor, após um determinado tempo a temperatura se estabiliza, quando ocorre um processo estacionário. Resolver uma equação de Laplace, depende fortemente da topologia (forma geométrica) da região sobre a qual a função $u = u(x,y)$ está definida.

Vamos considerar o problema de valor de contorno em um retângulo gerado pela equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Este problema é chamado **problema de Dirichlet**. A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ e $k(y)$ não nulas.

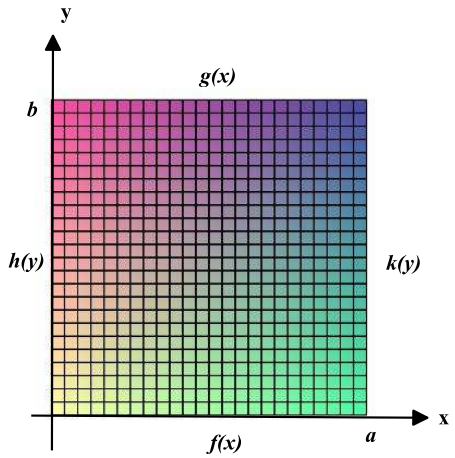


Figura 3.14: Região onde é resolvido o problema de Dirichlet

### 3.3.1 Apenas $k(y)$ Não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de $x$ por uma função de $t$, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de $x$, enquanto o segundo depende apenas de $t$. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(0) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \ Y(0) = 0, \ Y(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, ...$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1 sen \frac{n\pi y}{b}, \ n = 1, 2, 3, ...$$

A primeira equação diferencial com a condição $X(0) = 0$ tem soluçao

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(a, y) = k(y)$, temos que ter

$$k(y) = u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $k(y)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $k(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \, dy \ \ n = 1, 2, 3...$$

**Exemplo 11.** Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & se\ \ 0 \leq y \leq 1 \\ 2-y, & se\ \ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2}$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, ou seja,

$$c_n \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2} = \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}\, dx$$

$$= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ \ n = 1, 2, 3...$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}},\ \ n = 1, 2, 3...$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh} \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

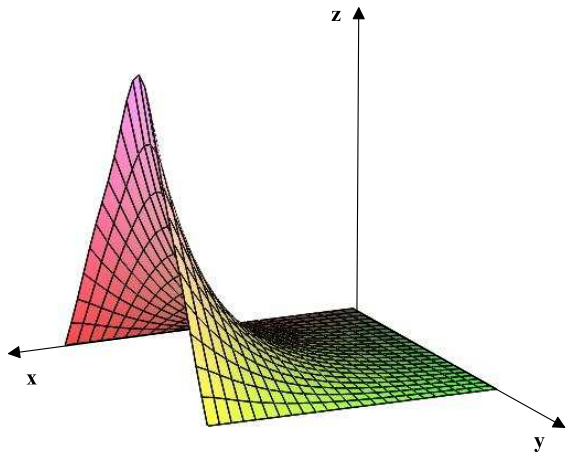


Figura 3.15: Solução da equação de Laplace do Exemplo 11 tomando apenas 3 termos não nulos da série

### 3.3.2 Apenas $h(y)$ Não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = k(y),\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de $x$ por uma função de $t$, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

O primeiro membro depende apenas de $x$, enquanto o segundo depende apenas de $t$. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(a) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \ Y(0) = 0, \ Y(b) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação com as condições de fronteira tem solução somente se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, para $n = 1, 2, 3, ...$ e neste caso a solução é da forma

$$Y(y) = C_1 sen \frac{n\pi y}{b}, \ n = 1, 2, 3, ...$$

A primeira equação diferencial com a condição $X(a) = 0$ tem soluçao

$$X(x) = C_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} - e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{C}_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções da forma

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

Além disso, pode-se provar que também séries

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi(x-a)}{b}$$

são soluções.

Mas para satisfazer a condição inicial $u(0, y) = h(y)$, temos que ter

$$h(y) = u(0, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $h(y)$. Assim pelo Corolário 6 na página 11 se a função $h(y)$ pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, $CP[0, L]$, então os coeficientes são dados por

$$-c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\, dy \;\; n = 1, 2, 3...$$

Podemos evitar o sinal de menos se escrevemos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi(a-x)}{b}$$

e neste caso

$$c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\, dy \;\; n = 1, 2, 3...$$

**Exemplo 12**. Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = 0, \;\; u(x, 2) = 0, \;\; 0 < x < 3 \\ u(0, y) = 0, \;\; u(3, y) = k(y), \;\; 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & se \;\; 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & se \;\; 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}(3-x)\right)$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, ou seja,

$$c_n \operatorname{senh}\left(\frac{3n\pi}{2}\right) = \int_0^2 h(y) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\, dx$$

$$= \frac{8 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \;\; n = 1, 2, 3...$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}}, \quad n = 1, 2, 3...$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh} \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2}$$

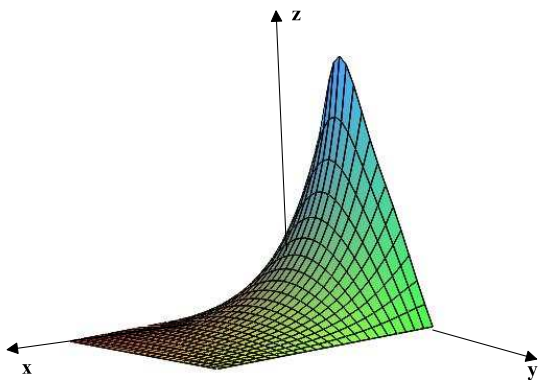


Figura 3.16: Solução da equação de Laplace do Exemplo 12 tomando apenas 3 termos não nulos da série

### 3.3.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x), \ u(x,b) = g(x), \ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y), \ u(a,y) = k(y), \ 0 < y < b \end{cases}$$

Como dissemos anteriormente a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$ e $k(y)$ não nulas, ou seja,

$$u(x,y) = u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y).$$

**Exemplo 13.** Vamos considerar a equação de Laplace num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = k(y) = \begin{cases} y, & se\ \ 0 \leq y \leq 1 \\ 2-y, & se\ \ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \left( \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} + \operatorname{senh} \frac{n\pi(3-x)}{2} \right)$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja,

$$c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) = \int_0^2 k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}\, dx$$

$$= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ \ n = 1,2,3...$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{\operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})\, n^2\pi^2},\ \ n = 1,2,3...$$

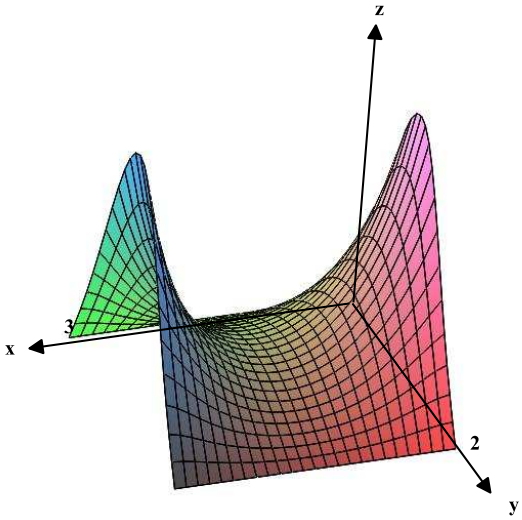


Figura 3.17: Solução da equação de Laplace do Exemplo 13 tomando apenas 3 termos não nulos da série

# Considerações Finais

O presente trabalho tem como objetivo geral mostrar a importância da série de Fourier nas aproximações de funções trigonométricas convergentes, nas EDPs (equação do calor e equação da onda) prosseguindo com uma análise da equação de Laplace em uma chapa metálica bidimensional.

O primeiro passo para o desenvolvimento do trabalho foi conhecer um pouco da história de Jean-Baptiste Joseph Fourier e da série de Fourier e as inúmeras aplicações, como retirar a foz das canções para fazer karaokê.

Com uma análise das definições de produto interno, norma de um vetor, funções pares e ímpares e as funções periódicas ortogonais senos e cossenos definiu-se os coeficientes da série de Fourier que são usados para aproximar as funções dadas. Através de uma função convergente pode-se aproximar com a série de Fourier, encontrando o coeficiente da série.

Dando sequência no trabalho com os coeficientes das séries de Fourier de funções elementares podemos encontrar e determinar a série de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas.

A terceira etapa do presente trabalho é aproximar as EDP (equação do calor e equação da onda) com a série de Fourier. Para aproximar a equação do calor com a série de Fourier procedeu-se da seguinte forma atribui-se a condição homogênea, os valores da EDP na condição de contorno e igual a zero, e o método da separação das variáveis. O mesmo método foi atribuído para equação da onda, considerando a velocidade inicial nula, usando método da separação das variáveis e deslocamento inicial nulo. Com isso obtemos uma equação geral da onda.

A análise da equação de Laplace num retângulo, descreve a temperatura de uma chapa metálica, foi feito através do problema de Dirichlet. Observou - se diferentes deformações na chapa retangular quando a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções não nulas.

Os gráficos foram gerados com software matemático MAPLE foi de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho, através dele podemos gerar os gráficos e observar o comportamento da aproximação da série de Fourier com a referida funções convergentes. Observamos o comportamento de uma barra metálica apos ser aquecida e uma onda presa nos extremos e comportamento de uma chapa metálica retangular após ser aquecida.

Observou - se com desenvolvimento deste trabalho que a série de Fourier e de extrema importância para ramo da ciência, pois através dela podemos explicar diversos fenômenos da natureza a série de Fourier e uma técnica matemática com maior número de aplicações.

# Referências Bibliográficas


[1] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edition, 2002.

[2] Djairo Guedes de Figueiredo. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[3] Donald Kreider, Donald R. Ostberg, Robert C. Kuller,and Fred W. Perkins. Introdução à Análise Linear. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1972.

[4] Erwin Kreiszig. Matemática Superior. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.

[5] Reginaldo J. Santos. Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2007.

[6] http://www.seara.ufc.br/tintim/matematica/fourier/fourier1.htm. .

[7] http://fatosmatematicos.blogspot.com/2010/07/fatos das funcoes pares e impares parte 15.html. .

[8] http://www.perdiamateria.eng.br/Nomes/Fourier.htm .

[9] http://pt.wikipedia.org/wiki/Jean Baptiste Joseph Fourier. .

[10] www.cpdee.ufmg.br/.../Aula Cap201720Nilson20-20Series20de20Fourier.pdf .

[11] http://www.cin.ufpe.br/ jds/metodoscomputacionais/Fourier6 .

[12] www.deetc.isel.ipl.pt/matematica/mat/aulas/eq.calor.pdf .

[13] www.ebah.com.br/transporte/de/calor/doc/a64006.html .

[14] http://pt.wikipedia.org/wiki/Lei/de/Fourier .

[15] mtm.ufsc.br/daniel/matap/calor/dif/fin1.pdf .

[16] www.fisicaevestibular.com.br/exe/acu/8.htm .

[17] ww2.unime.it/weblab/awardarchivio//ondas.htm .