UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MODELAGEM MATEMÁTICA EM ECONOMIA E PROPAGANDA DE PRODUTOS

MACAPÁ-AP
2011

SANDRO ROGÉLIO BRABO DE SOUZA

GABRIEL DE CARVALHO SILVA

GEINYSSON CALVO DA SILVA

MODELAGEM MATEMÁTICA EM ECONOMIA E PROPAGANDA DE PRODUTOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ-AP

2011

SANDRO ROGÉLIO BRABO DE SOUZA
GABRIEL DE CARVALHO SILVA
GEINYSSON CALVO DA SILVA

Modelagem Matemática em Economia e Propaganda de Produtos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Prof. Dr. Guzmán Isla Chamilco

Prof. Esp. João Socorro Pinheiro Ferreira.

Avaliado em: ____ /____ /____

MACAPÁ-AP

2011

Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se vêem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê.

(HEBREUS 11:1-3, B. Sagrada.)

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso apresentamos dois modelos matemáticos: Propaganda de Produtos e Economia Aberta. O modelo de Propaganda de Produtos considera as vendas como função de sua taxa de decaimento, do investimento em publicidade, do nível de saturação do produto, da resposta constante e do tempo de investimento em publicidade. Este modelo é descrito por uma equação diferencial de primeira ordem cuja integração é obtida pelo método do fator integrante. A análise teórica e as simulações numéricas no MATLAB, mostram que as vendas dependem da razão da taxa de decaimento e da resposta constante. Quando maior esta taxa, maior serão os benefícios da publicidade, entretanto mesmo que esta razão seja pequena, o investimento em publicidade ajuda a amortecer a queda brusca das vendas. No modelo de Economia Aberta, a produção é uma função do consumo, investimento e injeção externa de capital. Considerando o equilíbrio entre a demanda e a produção e assumindo que o investimento não mude em períodos curtos de tempo, obtém-se uma equação com retardo no tempo. Aplicando a série de Taylor aos termos com retardo, este modelo de Economia Aberta é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática, Propaganda de Produtos, Economia Aberta, Equações diferenciais, Simulações Numéricas.

Resumen

En este Trabajo Final de Curso se presentan dos modelos matemáticos: Publicidad de Productos y Economía Abierta. El modelo de propaganda de productos considera las ventas en función de su tasa de decrecimiento, de la inversión en publicidad, del nivel de saturación del producto, de la respuesta constante y del tiempo de inversión em publicidad. Este modelo es descrito por una ecuación diferencial de primer orden, cuya integración se obtiene por el método del factor integrante. El análisis teórico y las simulaciones numéricas no MATLAB, indican que las ventas dependen de la razón entre la tasa de decrecimiento y la respuesta constante. Cuando mayor esta tasa, mayores son los beneficios de la publicidade. En el caso que esta tasa sea pequeña, la inversión en publicidad ayuda a amortiguar la caida de las vendas. En el modelo de economía abierta la producción es una función del consumo, inversión y inyección externa de capital. Considerando equilibrio entre demanda y producción, y asumiendo que la inversión no cambie en cortos períodos de tiempo, se obtiene una ecuación con retardo en el tiempo. Aplicando série de Taylor a los términos con retardo, el modelo de economia abierta es descrito por una equación diferencial linear de segundo orden con coeficientes constantes.

Palabras clave: Modelos Matemáticos, Publicidad de Productos, Economía Abierta, Ecuaciones Diferenciales, Simulaciones Numéricas.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Equações diferenciais estão presentes em diversos modelos tanto física, quanto da química, biologia, economia, engenharia, etc. Vários fenômenos envolvem a variação de uma quantidade em relação a outra, levando naturalmente a modelos baseados em equações diferenciais. Tais como: variações temporais, por exemplo, a posição de um objeto, a temperatura de um material, a concentração de um agente químico, a concentração de um poluente ou nutriente em um meio, a umidade do ar, o número de habitantes de uma cidade, a densidade de bactérias de uma cultura, a densidade de massa de um gás, o valor de uma mercadoria, o câmbio entre moedas, o produto interno bruto de um país, etc. Além de variações temporais dessas quantidades, ocorrem variações em relação a outras quantidades, como variação de temperatura em relação à posição e variação de densidade de massa de um fluido em relação à temperatura.

As equações diferenciais são expressões matemáticas de certas leis envolvidas em uma modelagem, que podem, por exemplo, ser leis fundamentais, como a segunda lei de Newton, empíricas, como em reações químicas, ou heurísticas, como em dinâmica populacional .[5]

Equações diferenciais simples aparecem em Cálculo I, quando do cálculo de primitivas de funções. Neste caso, dada uma função $g = g(t)$, buscamos uma função $x = x(t)$ tal que

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t)$$

A relativa simplicidade desta equação está no fato de que o lado direito da equação acima não depende da incógnita $g = g(t)$. A derivada de $x = x(t)$ está dada explicitamente em termos de uma função conhecida. Então, a solução pode ser obtida, em princípio, por integração direta. Por outro lado, as equações diferenciais de maior interesse são tais que a derivada da função procurada depende da própria função. Um exemplo é a equação

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x,$$

onde $\lambda > 0$. Geralmente, uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função e cuja equação envolve derivadas dessa função procurada. Mais especificamente, consideramos uma equação da forma

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

onde t é uma variável independente, $F = F(t; x; x_1; ...; x_n)$ é uma função real de $n + 2$ variáveis e $x = x(t)$ é uma variável dependente, que é a função procurada, isto é, incógnita. Esta é uma equação de ordem n, indicando a derivada de ordem mais alta presente na equação.

A equação

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t)$$

pode ser escrita na forma acima tomando

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = g(t) - \frac{dx}{dt}$$

Analogamente, a equação

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x,$$

corresponde a:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \lambda x + \frac{dx}{dt}$$

Ambas são equações de primeira ordem. Outros exemplos são

$$\frac{d^4 x}{dt^4} = \cos(tx), \qquad x^2 \frac{d^3 x}{dt^3} + \cos(t) + t = 0, \qquad \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - 2x\right)^2 = x^2 + 1, \qquad \cos(\frac{dx}{dt}) = \sin(x)$$

que são equações de ordem 4; 3; 2 e 1, respectivamente. Observe que, em cada equação de ordem n, os termos de ordem mais baixa (ou seja, as derivadas de ordem menor que n) podem ou não aparecer explicitamente.

Podemos, também, fazer uma distinção quanto à presença explícita da variável t na equação diferencial. Compare, por exemplo, as equações.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x, \qquad \frac{dx(t)}{dt} = tx$$

À esquerda, a variável t só aparece implicitamente, na derivada de x, enquanto que à direita, a variável t aparece explicitamente no lado direito. Mais geralmente, podemos considerar as equações de duas formas:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \qquad F\left(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

com a variável independente t aparecendo explicitamente ou não. Quando a variável t não aparece explicitamente, temos o que chamamos de equação autônoma. Caso contrário, temos uma *equação não-autônoma* .

A idéia é que equações autônomas modelam fenômenos fechados, sem interferência sazonal externa no sistema. Pode até haver uma influência externa, como a gravidade, mas ela não pode variar com o tempo. Por outro lado, em equações não-autônomas, algum fator externo pode estar enfluenciando o sistema e variando com o tempo. Por exemplo, em modelos em que a radiação solar é importante, a equação diferencial tem que incluir algum mecanismo explicitamente dependente do tempo e relacionado com a variação da radiação segundo a hora do dia e a época do ano. Em geral, a análise de sistemas autônomos é mais simples. Quanto à notação, é claro que ela não é rígida, podemos escrever, por exemplo

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

onde x é a variável independente e $y = y(x)$, a função procurada. A notação apropriada depende do contexto; a variável independente pode denotar o instante de tempo t ou uma posição x, por exemplo, e a incógnita pode ser a posição x de um objeto, a temperatura **T** de um material, a concentração **S** de alguma substância química, o valor **P** de um produto financeiro, etc.

Para simplificar a notação, podemos usar $x'; x''; x'''; x^{(iv)}; x^{(v)}; ...$ para indicar as derivadas, quando a variável independente estiver clara no contexto. Assim, as equações acima podem ser escritas como:

$$x^{(iv)} = cos(tx); x^2 x''' + cost + t = 0; \qquad (x''..2x)^2 = x^2 + 1; \qquad cos(x') = sin(x) :$$

No caso específico da variável independente ser uma variável temporal, é costume, utilizar as notações x' e x'' para indicar as derivadas de primeira e segunda ordem.

Uma equação diferencial do tipo descrito acima é dita ordinária, pois envolve apenas derivadas em relação a uma única variável independente real. Veremos, também, sistemas envolvendo mais de uma equação diferencial ordinária, com uma mesma variável independente. Há, porém, vários outros tipos de equações diferenciais, como parciais, complexas, integro-diferenciais, funcionais, com retardamento, etc. Essas outras equações diferenciais modelam uma gama ainda maior de fenômenos e possuem, em geral, características mais complicadas que as das equações ordinárias, mas hà muitas semelhanças e o entendimento destas é fundamental para o das outras. [5]

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Uma equação diferencial ordinária (EDO) linear de ordem n, é uma equação em que a incógnita e suas derivadas são relacionadas de maneira linear:

$$a_n(t)\frac{d^n u(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2(t)\frac{d^2u(t)}{dt^2} + a_1(t)\frac{du(t)}{dt} + a_0(t)u(t) = F(t) \quad (2.1)$$

No caso em que os coeficientes $a_i(t)$ são constantes, a equação é dita *equação diferencial linear de coeficientes constantes.* O termo do lado direito $F(t)$ é usualmente identificada como *termo forçante.* Se $F(t) \neq 0$, a equação é dita *não homogênea*, e se $F(t) = 0$, a equação é dita *homogênea.*

A importância da equação diferencial linear (2.1) reside em que ela aparece em muitas aplicações em diversas áreas, como Matemática, Geofísica, Economia, Administração, Publicidade ou Marketing, Biologia, Medicina, Astronomia e nas Engenharias. Neste trabalho apresentamos um modelo em publicidade e outro em economia, as quais são descritas por equações diferenciais de primeira e segunda ordem respectivamente.

2.1 EDO linear de primeira ordem.

Fazendo $n = 1$ na EDO (2.1), e considerando uma condição inicial, obtém-se o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} A(t)\dfrac{du(t)}{dt} + B(t)u(t) = F(t), \qquad t_0 < t < T \\ \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

onde, $A(t) \neq 0$ e $t_0 = 0$ para todo $t_0 < t < T$.

Dividido a equação (2.2) por $A(t)$ e fazendo,

$$\alpha(t) \;=\; \frac{B(t)}{A(t)}, \qquad\qquad f(t) = \frac{F(t)}{A(t)}$$

resulta a EDO:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + \alpha(t)u(t) = f(t), \qquad t_0 < t < T \\ \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

2.1.1 EDO linear homogênea

Para resolver a EDO (2.3), determinamos primeiro a solução da EDO linear homogênea:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + \alpha(t)u(t) = 0, \qquad t_0 < t < T \\ \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Multiplicando (2.4) pelo o diferencial dt e considerando que

$$\left(\frac{du(t)}{dt}\right) \cdot dt = du(t)$$

obtem-se:

$$du(t) + \alpha(t)u(t)dt = 0$$

dividindo por u(t) temos:

$$\frac{du(t)}{u(t)} + \alpha(t)dt = 0$$

integrando entre 0 e t resulta,

$$\int_0^t \frac{du(\tau)}{u(\tau)} + \int_0^t \alpha(\tau)d\tau = 0$$

cujo a itegração é:

$$\ln(u(\tau))\,|_0^t + \int_0^t \alpha(\tau)d\tau = 0$$

$$\ln(u(t)) - \ln(u(0)) = -\int_0^t \alpha(\tau)d\tau$$

como $u(0) = u_0$, temos:

$$\ln\left(\frac{u(t)}{u_0}\right) = -\int_0^t \alpha(\tau)d\tau.$$

Aplicando exponencial a ambos os membro da equação temos:

$$\frac{u(t)}{u_0} = e^{-\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}.$$

Portanto a solução da EDO homogênia de (2.4) é:

$$u(t) = u_0 \cdot e^{-\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} \tag{2.5}$$

logo, a equação (2.5) da origem ao método do *fator integrante.*

Método do Fator Integrante.

O fator integrante da EDO linear homogênica (2.4) é a função,

$$\mu(t) = e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}. \tag{2.6}$$

Multiplicando $\mu(t)$ na EDO (2.3) temos:

$$\mu(t).\left[\frac{du(t)}{dt} + \alpha(t)u(t)\right] = 0$$

o qual podemos escrever como:

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)u(t)\right] = 0 \tag{2.7}$$

pois, $\dfrac{d\mu(t)}{dt} = \alpha(t)\dfrac{d\mu(t)}{dt}$ multiplicando (2.7) pelo diferencial dt temos:

$$d\left[\mu(t)u(t)\right] = 0$$

e integrando entre 0 e t

$$\int_0^t d\left[\mu(s)u(s)\right] = 0$$

resulta

$$\mu(t)u(t) - \mu(0)u(0) = 0.$$

Como $\mu(0) = e^{\int_0^0 \alpha(\tau)d\tau} = e^0 = 1$ e $u(0) = u_0$, a solução de (2.5) pelo método do fator integrante é:

$$u(t) = u_0.\mu^{-1}(t)$$

$$u(t) = u_0.e^{-\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}$$

2.1.2 EDO linear não homogênea

Para resolver a EDO linear não homogênia (2.3) usaremos o método do fator integrante, multiplicando a equação (2.3) pela função $\mu(t)$, (2.6)

$$\mu(t)\left[\frac{du(t)}{dt} + \alpha(t)u(t)\right] = \mu(t)f(t)$$

o qual se pode escrever como:

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)u(t)\right] = \mu(t)f(t).$$

Multiplicando pelo diferencial dt, temos:

$$d\left[\mu(t)u(t)\right] = \mu(t)f(t)dt$$

integrando entre 0 e t, tem-se:

$$\int_0^t d\left[\mu(s)u(s)\right] = \int_0^t \mu(s)f(s)ds$$

o qual resulta em,

$$\mu(t)u(t) - \mu(0)u(0) = \int_0^t \mu(s)f(s)ds$$

como $\mu(0) = 1$ e $u(0) = u_0$ o qual resulta em,

$$\mu(t)u(t) = u_0 + \int_0^t \mu(s)f(s)ds.$$

Colocando em evidência $u(t)$, tem-se a solução da EDO não homogênea (2.3)

$$u(t) = \mu^{-1}(t)u_0 + \mu^{-1}(t)\int_0^t \mu(s)f(s)ds \tag{2.8}$$

ou

$$u(t) = \mu^{-1}(t)u_0 + \int_0^t \mu^{-1}(t)\mu(s)f(s)ds. \tag{2.9}$$

Em termo da exponencial, a solução em (2.8) se escreve como:

$$u(t) = e^{-\int_0^t \alpha(\tau)d(\tau)} \left[u_0 + \int_0^t e^{\int_0^s \alpha(\tau)d(\tau)} f(s)ds \right]. \tag{2.10}$$

Se a forçante $f(t)$ tem a forma de uma exponencial, ou função trigonométrica, ou de um polinômio, o termo

$$\int_0^t e^{\int_0^s \alpha(\tau)d(\tau)} f(s)ds$$

é simples de resolver usando as técnicas de integração conhecidas, principalmente integração por partes, isto é conhecido como o Método dos Coeficientes a Determinar. Outra possibilidade é usar o Método de Variação dos Parâmetros.

No caso de $\alpha(t) = \alpha$ ser uma constante, o produto de $\mu^{-1}(t)\mu(s)$ em (2.10) é:

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(t)\mu(s) &= e^{-\int_0^t \alpha d(\tau)} \cdot e^{\int_0^s \alpha d(\tau)} \\ &= e^{-\alpha\left[\int_0^t d(\tau) - \int_0^s d(\tau)\right]} \\ &= e^{-\alpha \int_s^t d(\tau)}. \end{aligned}$$

Tomando $a(t,s) = \alpha \int_s^t d(\tau) = \alpha(t-s)$.

Portanto, a solução em (2.10), para α costante é:

$$u(t) = \mu^{-1}(t)u_0 + \int_0^s \mu^{-1}(t)\mu(s)f(s)ds \tag{2.11}$$

ou

$$u(t) = e^{-\alpha t}u_0 + \int_0^s e^{-\alpha(t-s)} f(s)ds. \tag{2.12}$$

2.2 Equação Diferencial de 2ª Ordem

Fazendo $n = 2$, na EDO (2.1), obtem-se:

$$A(t)\frac{d^2u(t)}{dt^2} + B(t)\frac{du(t)}{dt} + C(t)u(t) = F(t), \qquad t_0 < t < T \tag{2.13}$$

onde, $A(t) \neq 0$, para $t_0 < t < T$. Dividindo a equação (2.13) por A(t) e fazendo

$$p(t) = \frac{B(t)}{A(t)}, \qquad q(t) = \frac{C(t)}{A(t)}, \qquad f(t) = \frac{F(t)}{A(t)}$$

resulta na EDO

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + p(t)\frac{du(t)}{dt} + q(t)u(t) = f(t). \tag{2.14}$$

Para resolver a EDO (2.13) usaremos o *Principío da Superposição.*

2.2.1 Principio de Superposição

Uma equacão diferencial linear de 2ª ordem é homogênea se ela pode ser escrita como:

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0 \tag{2.15}$$

Para a EDO é válido o *princípio da superposicão* que diz que se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são soluções da equação (2.15), então

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) \tag{2.16}$$

também é solução da equação (2.15), para todas as constantes reais c_1 e c_2.

Uma expressão da forma (2.16) é chamada *combinacão linear* de $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Substituindo (2.15) em (2.16) temos:

$$\begin{aligned}
u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) &= \\
&= (c_1u_1(t) + c_2u_2(t))'' + p(t)(c_1u_1(t) + c_2u_2(t))' + q(t)(c_1u_1(t) + c_2u_2(t)) \\
&= c_1u_1''(t) + c_2u_2''(t) + c_1p(t)u_1'(t) + c_2p(t)u_2'(t) + c_1q(t)u_1(t) + c_2q(t)u_2(t) \\
&= c_1\underbrace{(u_1''(t) + p(t)u_1'(t) + q(t)u_1(t))}_{=0} + c_2\underbrace{(u_2''(t) + p(t)u_2'(t) + q(t)u_2(t))}_{=0} \\
&= c_1.0 + c_2.0 = 0
\end{aligned}$$

pois $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são soluções de (2.15).

Considere, agora, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0 \\ \\ u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u_0' \end{cases} \tag{2.17}$$

em que u_0 e u_0' são condições iniciais dadas no problema.

Vamos determinar condições sobre duas soluções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ para que existam constantes c_1 e c_2 tais que $u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ seja solução da equação (2.17).

Substituindo-se $t = t_0$ na solução $u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ e na derivada de $u(t), u'(t) = c_1u_1'(t) + c_2u_2'(t)$ obtemos o sistema de equações lineares,

$$\begin{cases} c_1u_1(t_0) + c_2u_2(t_0) = u_0 \\ \\ c_1u_1'(t_0) + c_2u_2'(t_0) = u_0' \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma:

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_0' \end{bmatrix}.$$

Se a matriz do sistema A é invertível, então para todo par de condições iniciais $(u_0; u_0')$ o sistema tem uma única solução $(c_1; c_2)$ (A solução é $X = A^{-1}B$). Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Ou seja, se

$$detA = \begin{bmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

então para todo par de condições iniciais $(u_0; u_0')$ existe um único par de constantes $(c_1; c_2)$ tal que $u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ é solução do problema de valor inicial (2.17) [6].

2.2.2 EDO com coeficientes constantes

Euler resolveu a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, para os casos em que os coeficientes A, B e C são constantes. O procedimento consiste em obter soluções do tipo exponencial $u(t) = e^{\lambda t}$ para a equação homogênea:

$$Au''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = 0. \tag{2.18}$$

Derivando $u = e^{\lambda t}$ duas vezes temos,

$$u(t) = e^{\lambda t}; \qquad u'(t) = \lambda e^{\lambda t}; \qquad u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

substituindo na equação (2.18), tem-se:

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + B\lambda e^{\lambda t} + Ce^{\lambda t} = 0$$

simplificando,

$$e^{\lambda t}\left[A\lambda^2 + B\lambda + C\right] = 0$$

obtem-se a equação característica:

$$P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C = 0. \tag{2.19}$$

Segue-se que se λ é uma raíz da equação característica, então:

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \qquad \text{onde} \quad \Delta = B^2 - 4AC.$$

Analisamos, a seuguir, os possíveis valores das raízes da equação característica, (2.19), segundo o sinal do discriminante Δ:

CASO I : Para $\Delta > 0$, tem-se raízes reais e distintas. Sejam estas raízes λ_1 e $\lambda_2 \in \Re$, onde, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Logo,

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}; \qquad\qquad u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

são soluções fundamentais, pois

$$\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t}.e^{\lambda_2 t} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \qquad \neq 0$$

para todo $t \in \Re$. Logo, no caso em que a equação característica tem duas raízes reais (distintas) λ_1 e λ_2, tem-se:

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

CASO II: Para $\Delta < 0$, neste caso temos duas raízes complexas conjugadas, isto é,

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A},$$

sendo $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde, $\alpha = \dfrac{-B}{2A}$ e $\beta = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2A} \neq 0$.

Se a equação característica de (2.18) tem duas raízes complexas, então elas são números complexos conjugados, ou seja, se $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ é uma raiz da equação característica (2.19), então, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ também é raiz da equação. Neste caso, pela fórmula de Euler

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} e^{\beta i t} = e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t) + i sen(\beta t)\right] \\ u_2(t) &= e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t} e^{-\beta i t} = e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t) - i sen(\beta t)\right], \end{aligned}$$

são soluções complexa da equação diferencial (2.18).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t} \cdot e^{\lambda_2 t} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = (-2i\beta) e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \forall t \in \Re. \end{aligned}$$

Assim, no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, a solução geral complexa de (2.18) é dada por:

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad \forall \ C_1, \ C_2 \in \mathbf{C}.$$

Vamos encontrar um conjunto fundamental de soluções reais, para isto a solução geral complexa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 e^{(\alpha+\beta i)t} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)t} \\ &= C_1 e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right] + C_2 e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)\right] \\ &= (C_1 + C_2) e^{\alpha t}\cos(\beta t) + (C_1 + C_2) e^{\alpha t} i \sin(\beta t), \end{aligned}$$

tomando $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ e $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2i}$ temos:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= e^{\alpha t} cos(\beta t) \\ u_2(t) &= e^{\alpha t} sen(\beta t) \end{aligned}$$

Vamos mostrar, agora, que se as raízes da equação característica são complexas, então $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são soluções fundamentais de (2.18), isto é, são soluções linearmente independentes:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^{\alpha t}cos(\beta t) & e^{\alpha t}sen(\beta t) \\ e^{\alpha t}[\alpha\cos(\beta t) - \beta sen(\beta t)] & e^{\alpha t}[\alpha sen(\beta t) + \beta cos(\beta t)] \end{vmatrix} \\
&= e^{2\alpha t}\left(\alpha \begin{vmatrix} cos(\beta t) & sen(\beta t) \\ cos(\beta t) & sen(\beta t) \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} cos(\beta t) & sen(\beta t) \\ -sen(\beta t) & cos(\beta t) \end{vmatrix}\right) \\
&= \beta e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \forall \ t \in \Re.
\end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, a solução geral da equação é:

$$u(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2(t) e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

CASO III: Para $\Delta = 0$, neste caso temos duas raízes reais iguais. Se as raízes da equação são iguais, isto é, λ_1 e λ_2, então obtemos somente uma solução. Portanto, no caso em que a equação tem somente uma raiz tem-se,

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$\lambda_1 = \frac{-B}{2A} - \frac{\sqrt{0}}{2A} = \lambda_1 = \frac{-B}{2A}$$

logo a solução

$$u_1(t) = \exp\left(\frac{-B}{2A}t\right).$$

Para determinar uma segunda solução de modo que $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sejam linearmente independentes, considera-se a equação de 2ª ordem,

$$Au''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = 0$$

dividindo a equação por A tem-se,

$$u''(t) + \frac{Bu'(t)}{A} + \frac{Cu(t)}{A} = 0.$$

Seja $u(t)$ uma solução da forma,

$$u(t) = x(t)u_1(t)$$

onde, a função $x(t)$ deve-se determinar. Derivando u(t) tem-se:

$$\begin{aligned} u'(t) &= x(t)u_1'(t) + x'(t)u_1(t) \\ u''(t) &= x(t)u_1''(t) + 2x'(t)u_1'(t) + x''(t)u_1(t) \end{aligned}$$

substituindo na equação principal resulta:

$$x(t)u_1''(t) + 2x'(t)u_1'(t) + x''(t)u_1(t) + \frac{B}{A}\left[x(t)u_1'(t) + x'(t)u_1(t)\right] + \frac{C}{A}\left[x(t)u_1(t)\right] = 0$$

$$x''(t)u_1(t) + x'(t)\left[2u_1(t) + \frac{B}{A}u_1(t)\right] + x(t)\left[u''(t) + \frac{Bu'(t)}{A} + \frac{Cu(t)}{A}\right] = 0$$

$$x''(t)u_1(t) + x'(t)\left[2u_1(t) + \frac{B}{A}u_1(t)\right] = 0.$$

Fazendo $W(t) = x'(t)$, temos

$$W'(t)u_1(t) + W(t)\left[2u_1'(t) + \frac{B}{A}u_1(t)\right] = 0$$

logo, vemos que a equação princial de 2ª ordem se transformou em uma equação diferencial de 1ª ordem de variáveis separáveis.

Integrando temos:

$$W'(t)u_1(t) + W(t)\left[2u_1'(t) + \frac{B}{A}u_1(t)\right] \Longrightarrow W'(t)u_1(t) = -W(t)\left[2u_1'(t) + \frac{B}{A}u_1(t)\right]$$

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = -\frac{2u_1'(t)}{u_1(t)} - \frac{B}{A}$$

$$\int \frac{W'(t)}{W(t)}dt = \int -\frac{2u_1'(t)}{u_1(t)}dt - \int \frac{B}{A}dt + C$$

$$\ln|W| = -2\ln|u_1(t)| - \int \frac{B}{A}dt + C$$

usando a propriedade do logarítimo a equação pode ser escrita como:

$$\ln|W| + \ln|u_1^2(t)| = -\frac{B}{A}t + C \Longrightarrow \ln|W.u_1^2(t)| = -\frac{B}{A}t + C$$

$$W.u_1^2(t) = e^{-\frac{B}{A}t+C} \Longrightarrow W = \frac{e^{-\frac{B}{A}t}}{u_1^2(t)}c_1$$

perceba que $W(t) = x'(t)$, substituindo resulta em:

$$W = \frac{e^{-\frac{B}{A}t}}{u_1^2(t)}c_1 \Longrightarrow x'(t) = \frac{e^{-\frac{B}{A}t}}{u_1^2(t)}c_1$$

integrando,

$$\int x'(t) = c_1 \int \frac{e^{-\frac{B}{A}t}}{u_1^2(t)}dt \Longrightarrow x(t) = c_1 \int \frac{e^{-\frac{B}{A}t}}{u_1^2(t)}dt + c_2$$

como podemos perceber $u(t) = x(t)u_1(t) \Longrightarrow x(t) = \frac{u(t)}{u_1(t)}$, onde vem que

$$\frac{u(t)}{u_1(t)} = c_1 \int \frac{e^{-\frac{B(t)}{A(t)}t}}{u_1^2(t)}dt + c_2 \Longrightarrow u(t) = u_1(t)c_1 \int \frac{e^{-\frac{B}{A}t}}{u_1^2(t)}dt + c_2u_1(t)$$

tomando $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ tem-se:

$$u(t) = u_1(t) \int \frac{e^{-\frac{B}{A}t}}{u_1^2(t)}dt$$

note que $u_1 = e^{-\frac{B}{2A}t}$, logo podemos encontrar $u_2(t)$

$$u_2(t) = e^{-\frac{B}{2A}t} \int e^{-\frac{B}{A}t}u_1^{-2}(t)dt \Longrightarrow u_2(t) = e^{-\frac{B}{2A}t} \int e^{-\frac{B}{A}t}e^{-(-2)\frac{B}{2A}t}dt$$

$$u_2(t) = e^{-\frac{B}{2A}t} \int e^{-\frac{B}{A}t}e^{-(-2)\frac{B}{2A}t}dt \Longrightarrow u_2(t) = e^{-\frac{B}{2A}t} \int dt$$

$$u_2(t) = e^{-\frac{B}{2A}t}t.$$

Portanto a solução geral da equação é:

$$u(t) = C_1e^{-\frac{B}{2A}t} + C_2e^{-\frac{B}{2A}t}t$$

fazendo $\lambda_1 = -\frac{B}{2A}t$

$$u(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_1 t}t$$

A EDO não homogênea (2.13) pode ser resolvida pelo *método dos coeficiente a determinar*, onde a forçante $f(t)$ é uma expressão do tipo *polinomial*, *exponencial*, *trigonométrica ou combinação linear*. Outro método é a *variação de parâmetros*, onde a solução não homogênea é determinada a partir da solução homogênea [7, 10]. Neste trabalho não usaremos a EDO não homogênea, pois o objetivo principal no Modelo de Economia Aberta é sua modelagem, mostrando que uma equação com retardo se escreva como uma EDO de 2ª ordem do tipo (2.13).

Capítulo 3

Um Modelo de Propaganda de Produto

Na venda de bens de consumo, a propaganda ou publicidade (marketing) é uma importante ferramenta para ter um bom rendimento nas vendas de um produto.
Um dos interesses dos publicitários e lojistas consiste em estimar o quão efetiva será uma campanha publicitária. Para isto, analisamos um modelo matemático que relaciona a eficiência da propaganda com o aumento no nível das vendas. Este modelo é baseado no paper de M.L. Vidale e H.B. Wolfe [8], no qual o histórico de vários produtos com e sem investimento em propaganda foram considerados, para modelar e testar os resultados deste modelo.
As seguintes questões ajudam a quantificar os efeitos do investimento em publicidade:

i) Como avaliar a eficiência de uma campanha publicitária?

ii) Como distribuir o orçamento em publicidade entre os diferentes produtos e os meios de comunicação?

iii) Quais são os critérios que determinam o nível do investimento em publicidade?

O conhecimento da eficiência da publicidade nos permite responder as duas últimas questões. O modelo matemático deve portanto estabelecer a relação entre as vendas e a resposta da publicidade. Esta relação permite que o tamanho e alocação ótima do orçamento em publicidade possa ser determinado.
Na análise de campanhas publicitárias, Vidale e Wolfe [8] sugerem que a interação de vendas e publicidade podem ser descritos em termos de três parâmetros:

1. O decaimento constante das Vendas (α)

2. O nível de saturação (constante M)

3. A resposta constante (o termo da constante r)

A seguir descrevemos cada um destes parâmetros e sua contribuição na modelagem matemática da propaganda de produtos.

3.1 O decaimento constante das vendas

Na ausência de publicidade, as vendas tendem a diminuir por causa de produtos obsoletos, introdução no mercado de novos produtos ou de produtos consolidados, competição publicitária, etc. Sob condições do mercado relativamente constante, a taxa de diminuição é, em geral, constante: isto é, um percentual constante das vendas são perdidos a cada período de tempo. Considerando:

$S(t)$: vendas de um produto (em unidades monetárias) no tempo t,

$\dfrac{dS}{dt}$: taxa de variação instantânea das vendas em relação ao tempo,

α: taxa de decaimento constante das vendas ($\alpha > 0$),

obtém-se o problema de valor inicial que descreve a evolução das vendas na ausência de publicidade:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\alpha \cdot S(t), & t > 0 \\ S(0) = S_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Adimensionalizamos (3.1), o que permite analisar o modelo independente de qual unidade monetária é considerada. Fazendo,

$$v(t) = \frac{S(t)}{S_0} \tag{3.2}$$

temos que

$$
\begin{cases}
S(t) & = & S_0 v(t) \\
\\
\frac{dS(t)}{dt} & = & S_0 \dfrac{dv(t)}{dt} \\
\\
v(0) & = & \dfrac{S(0)}{S_0} = \dfrac{S_0}{S_0} = 1
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

Substituindo (3.3) em (3.1) e cancelando o termo S_0 obtemos o problema de valor inicial adimensionalizado:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dv(t)}{dt} & = & -\alpha \cdot v(t), \qquad t > 0 \\
v(0) & = & 1
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

Multiplicando (3.4) pelo fator integrante, obtemos:

$$
\frac{d\left[e^{\alpha t} v(t)\right]}{dt} = 0
$$

Integrando entre 0 e t resulta,

$$
\int_{\tau=0}^{\tau=t} d(e^{\alpha\tau} v(\tau)) = 0
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& e^{\alpha t} v(t) - e^{\alpha \cdot 0} v(0) = 0 \\
\Rightarrow \quad & e^{\alpha t} v(t) - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, a solução de (3.4) é:

$$
v(t) = e^{-\alpha t}, \qquad t > 0 \tag{3.5}
$$

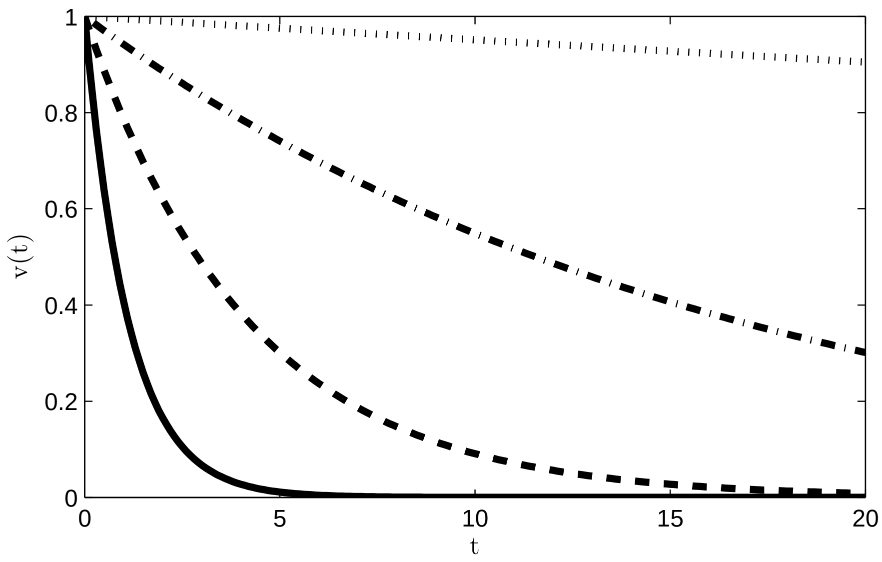

Figura 3.1: $v(t) = e^{-\alpha \cdot t}$: $\alpha = 0,005$ (linha pontilhada), $\alpha = 0,06$ (linha traço-ponto), $\alpha = 0,24$ (linha tracejada), $\alpha = 0,90$ (linha sólida)

Na Figura 3.1 se apresenta a solução adimensionalizada $v(t)$ de (3.5) para vários valores da taxa de decaimento α. Observa-se nesta figura,

i) Para valores de α muito pequenos, como em $\alpha = 0,005$ (linha pontilhada), observa-se um decaimento muito lento no nível de vendas. Isto é observado em mercados não competitivos, em monopólios, em produtos bem tradicionais, ou em produtos de primeira necessidade com um número limitado de fornecedores. Em cidades que contam com poucas linhas aéreas e onde voar é o principal modo de deslocar-se a outras cidades, o preços das passagens é usualmente mais caro que em outras cidades onde a competição entre as empresas é maior e onde outros médios de transporte mais baratos são disponíveis.

ii) Para valores de α bastante maiores, como em $\alpha = 0,90$ (linha sólida), observa-se um decaimento muito rápido no nível de vendas. Isto é observado em produtos que se tornam rapidamente obsoletos, ou em mercados altamente competitivos. Uma nova linha de calçado tende a ficar rapidamente obsoleto, enquanto um novo tipo de refrigerante terá que competir com produtos consolidados no mercado.

c) Em geral, as vendas $v(t)$ de (3.5) apresentam um decaimento exponencial, quanto maior a taxa de decaimento mais rápido decaem as vendas, e quanto menor a taxa de decaimento, o decaimento nas vendas é menor. Para $\alpha = 0,06$ (linha traço-ponto) observa-se que as vendas decaem a 40% em 20 períodos de tempo, enquanto este percentual é atingido em somente 5 períodos de tempo para $\alpha = 0,24$ (linha tracejada).

3.2 O nível de saturação

Se um produto é colocado em uma promoção por uma campanha publicitária as vendas tendem a aumentar até atingir um nível máximo e em seguida começar a diminuir. Assim, observa-se uma interação entre o investimento em publicidade e o nível das vendas, a qual é representada por um segundo parâmetro chamado *nível de saturação*, M. Este nível pode ser definido como o limite prático de vendas que pode ser gerada. O nível de saturação, também, depende não só do produto que está sendo promovido, mas também no meio publicitário onde está sendo utilizado, pois representa a fração do mercado que a campanha publicitária pode capturar. Ele pode, muitas vezes, ser levantada por históricos de vendas, estudos e pesquisas de mercado e ainda por análise dos resultados de outros meios de publicidade.

3.3 A resposta constante

Além do decaimento constante α e do nível de saturação M, precisamos de um terceiro parâmetro para descrever o comportamento de vendas de um produto.

Define-se a *Resposta Constante* r (ver [8]) como as vendas geradas por unidade monetária (real, dólar, etc.) investido em publicidade quando S = 0.

Observa-se que o número de novos clientes que são potenciais compradores diminui à medida que as vendas se aproximam do nível de saturação. Quando a publicidade é dirigida indistintamente a ambos os clientes e não-clientes, a eficácia de cada unidade monetária investido em publicidade na obtenção de novos clientes também diminui com o aumento das vendas.

3.4 O modelo

Quanto maior o nível de saturação M, menor será a eficiência de cada unidade investido em publicidade. De outro lado, quando as vendas estão em um nível S, a eficiência de cada unidade monetária investida em publicidade é diretamente proporcional ao grau de não saturação do mercado, isto é a $(M - S)$. Logo, as vendas geradas por unidade monetária investida em publicidade, quando as vendas estão em um nível S, é dado por:

$$r \cdot \frac{(M - S)}{M}. \tag{3.6}$$

Considerando que o aumento nas vendas é proporcional ao investimento em publicidade $P(t)$ e ao grau de não saturação do mercado, e que na ausência de publicidade a variação nas vendas decaem proporcionalmente a esta, obtém-se o modelo matemático:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\alpha \cdot S(t) + r \cdot P(t) \cdot \dfrac{(M - S(t))}{M}, & t > 0 \\ \\ S(0) = S_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Esta equação tem a seguinte interpretação: o incremento na variação das vendas dS/dt, é proporcional ao investimento em publicidade $P(t)$, para alcançar a fração de clientes potenciais, $(M - S)/M$, menos o número de clientes que estão sendo perdidos, αS. Reordenando termos o problema de valor inicial (3.7) pode-se escrever como:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} + \left(\alpha + r \cdot \dfrac{P(t)}{M}\right) S(t) = r \cdot P(t), & t > 0 \\ \\ S(0) = S_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

3.5 Adimensionalização do modelo

Fazendo:

$$\begin{cases} v(t) &= \dfrac{S(t)}{S_0} \\ \\ p(t) &= \dfrac{P(t)}{S_0} \\ \\ m &= \dfrac{M}{S_0} \end{cases} \tag{3.9}$$

resulta,

$$\begin{cases} S(t) &= S_0 v(t) \\ \\ \dfrac{dS(t)}{dt} &= S_0 \dfrac{dv(t)}{dt} \\ \\ M &= S_0 m \\ P(t) &= S_0 p(t) \\ v(0) &= \dfrac{S(0)}{S_0} = \dfrac{S_0}{S_0} = 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Substituindo (3.10) em (3.8) obtém-se o problema de valor inicial adimensionalizado:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + \left(\alpha + r \cdot \dfrac{p(t)}{m}\right) v(t) &= r \cdot p(t), \qquad t > 0 \\ v(0) &= 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

Consideremos que a publicidade $p(t)$ é aplicada no período $0 \leq t \leq T$, e após este peíodo ela é retirada. Isto é, $p(t)$ tem a forma:

$$p(t) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \tag{3.12}$$

3.6 Integração do Modelo para $0 \leq t \leq T$

Para $0 \leq t \leq T$, a substituição da função publicidade $p(t) = p_0$ no problema de valor inicial (3.11), resulta na equação diferencial linear não homogênea com coeficientes cons tantes:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + \left(\alpha + r \cdot \dfrac{p_0}{m}\right) v(t) = r \cdot p_0, & 0 < t \leq T \\ \\ v(0) = 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

Multiplicando a equação (3.13) pelo fator integrante $e^{\sigma t}$, onde

$$\sigma = \alpha + r \cdot \frac{p_0}{m} \tag{3.14}$$

resulta

$$\frac{d(e^{\sigma t} v(t))}{dt} = r \cdot p_0 \cdot e^{\sigma t}.$$

Integrando entre 0 e t,

$$\int_{\tau=0}^{\tau=t} d(e^{\sigma \tau} v(\tau)) = r \cdot p_0 \cdot \int_{\tau=0}^{\tau=t} e^{\sigma \tau} d\tau,$$

temos

$$e^{\sigma t} v(t) - 1 = \frac{r p_0}{\sigma}(e^{\sigma t} - 1).$$

Colocando em evidência $v(t)$, temos a solução no intervalo $[0, T]$:

$$v(t) = \left(1 - \frac{r P_0}{\sigma}\right) e^{-\sigma t} + \frac{r p_0}{\sigma}, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.15}$$

3.7 Integração do modelo para $t > T$

Para $t > T$, a substituição da função publicidade $p(t) = 0$ no problema de valor inicial (3.11), resulta na equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \alpha v(t) = 0, \qquad t > T. \tag{3.16}$$

Multiplicando pelo fator integrante $e^{\alpha t}$ e integrando temos,

$$v(t) = C \cdot e^{-\alpha t}, \qquad t > T. \tag{3.17}$$

A constante de integração C é determinada assumindo a continuidade na solução $v(t)$:

$$\lim_{t \to T^+} v(t) = \lim_{t \to T^-} v(t) = v(T).$$

De (3.15) e (3.17) temos,

$$C \cdot e^{-\alpha T} = v(T) = \left(1 - \frac{rP_0}{\sigma}\right) e^{-\sigma T} + \frac{rp_0}{\sigma}.$$

Logo,

$$C = \left[\left(1 - \frac{rP_0}{\sigma}\right) \cdot e^{-\sigma T} + \frac{rp_0}{\sigma}\right] e^{\alpha T}.$$

Substituindo a constante C em (3.17) obtém-se a solução para $t > T$:

$$v(t) = \left[\left(1 - \frac{rP_0}{\sigma}\right) \cdot e^{-\sigma T} + \frac{rp_0}{\sigma}\right] \cdot e^{-\alpha(t-T)}, \qquad t > T. \tag{3.18}$$

Portanto, de (3.15) e (3.18) obtém-se a solução geral de (3.11) e (3.12):

$$v(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{rP_0}{\sigma}\right) e^{-\sigma t} + \frac{rp_0}{\sigma}, & 0 \leq t \leq T \\ \\ \left[\left(1 - \frac{rP_0}{\sigma}\right) \cdot e^{-\sigma T} + \frac{rp_0}{\sigma}\right] \cdot e^{-\alpha(t-T)}, & t > T. \end{cases} \tag{3.19}$$

3.8 Simulações numéricas

Denotando I_P a variação nas vendas devido ao investimento em publicidade, ela é descrita pelo segundo termo da equação (3.7):

$$I_P(t) = r \cdot P(t) \cdot \frac{(M - S(t))}{M}$$

Dividindo esta equação por S_0, temos:

$$i_p(t) = \frac{I_P(t)}{S_0} = r \cdot \frac{P(t)}{S_0} \cdot \frac{(\frac{M}{S_0} - \frac{S(t)}{S_0})}{\frac{M}{S_0}}$$

onde,$i_p(t)$ é a adimensionalização de $I_P(t)$. Usando as variáveis adimensionalizadas em (3.10) resulta:

$$i_p(t) = r \cdot p(t) \cdot \frac{(m - v(t))}{m}$$

Obtém-se uma estimativa para r, colocando em evidencia este termo:

$$r = \frac{i_p(t) \cdot m}{p(t) \cdot (m - v(t))}.$$

Para ter uma aproximação do valor da resposta constante r, consideramos

- as vendas igual ao valor inicial $v(t) = v(0) = 1$,
- o nível de saturação igual a 80% a mais do valor inicial, isto é, $m = 1,80$,
- o investimento em publicidade, igual a 10% do valor inicial, ou seja, $p = 0,10$,
- a expectativa do ganho nas vendas pelo efeito da publicidade igual a 60% do valor inicial, isto é, $i_p(t) = 0,60$.

Com estes valores, uma aproximação de r é:

$$r \approx \frac{0,60 \times 1,80}{0,10 \times (1,80 - 1)} = 13,50.$$

Para cada conjunto de valores de m, $p(t)$, $v(t)$, $i_p(t)$ obtém-se um valor de r.
Nas simulações numéricas fixaremos os valores de $m = 1,80$, $p_0 = 0,10$ e $T = 2$, enquanto vários valores de α e r serão considerados. A solução $v(t)$ em (3.19) é implementada no Matlab cujo código fonte é descrito a seguir:

```
clear;
ti=0;
tf=6;
a=[ti:0.1:tf];
T=2;
n=size(a);
aT=1+ti+(n(2)-n(1))*T/tf;
v0=1;
v(1)=v0;
p0=0.10;
```

```
m=1.8;
alfa=0.1;
for j=1:2
        if(j==1)
           r=15;
        else
           r=0;
        end
        sigma=alfa+r*p0/m;
        for i=2:n(2)
           if(i<=aT)
              v(i)=(v0-r*p0/sigma)*exp(-sigma*a(i))+r*p0/sigma;
           else
              p(i)=v(aT)*exp(-alfa*(a(i)-a(aT)));
           end
        end
        plot(a,v)
        hold on
end
z=M*ones(size(a));
line(a,z)
```

Na Figura (3.2) se apresenta a evolução das vendas com publicidade para $\alpha = 0,1$ e $r = 15$ (linha sólida) e a evolução das vendas sem publicidade para $\alpha = 0,1$ e $r = 0$. A linha horizontal pontilhada representa o nível de saturação $m = 1,8$. O tempo de aplicação da publicidade é $T = 2$ unidades de tempo. Observa-se que durante a aplicação da campanha publicitária as vendas crescem até 50%, logo após as vendas decrescem seguindo a taxa de decaimento α. As vendas sem aplicação de publicidade $r = 0$ decrescem instantaneamente. Neste caso um investimento de 10% conseguem aumentar as vendas significativamente.

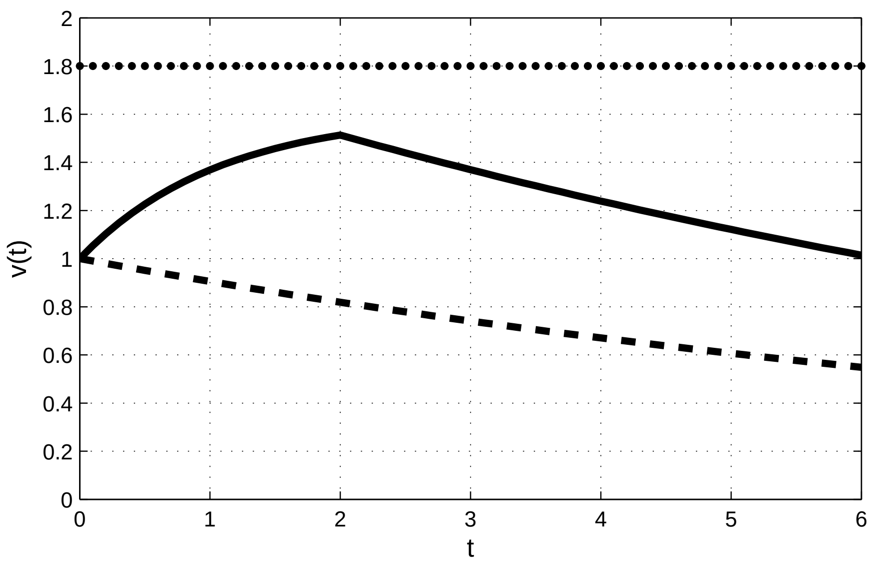

Figura 3.2: $v(t)$ com investimento em publicidade para $T = 2$, $\alpha = 0,1$ com $r = 15$ (linha sólida) e v(t) sem investimento em publicidade para $\alpha = 0,1$ e $r = 0$ (linha tracejada).

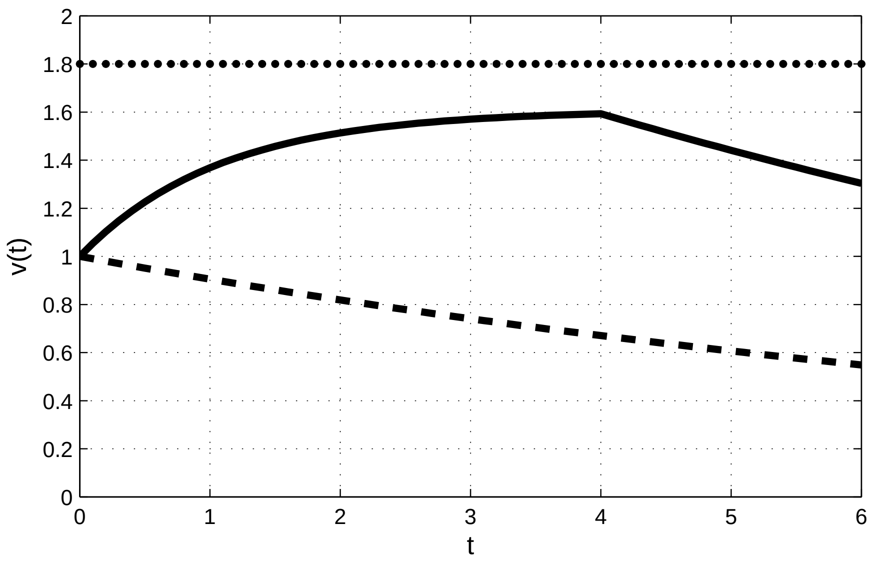

Figura 3.3: $v(t)$ com investimento em publicidade para $T = 4$, $\alpha = 0,1$ com $r = 15$ (linha sólida) e v(t) sem investimento em publicidade para $\alpha = 0,1$ e $r = 0$ (linha tracejada).

Na Figura (3.3) aumentamos o tempo de investimento para $T = 4$ e mantemos todos os outros valores. Observa-se que as vendas seguem crescendo, agora para 60%, logo após inicia-se o decaimento das vendas. Neste caso, tempos maiores de investimento em publicidade geram acréscimos maiores nas vendas.

Na Figura (3.4) aumentamos a resposta constante para $r = 30$, mantemos fixo $\alpha = 0,1$ e o tempo de investimento em $T = 2$. Observa-se, que as vendas aumentaram em duas unidades de tempo para aproximadamente 65%. Em geral, acréscimos na resposta constante implicam em acréscimos nas vendas.

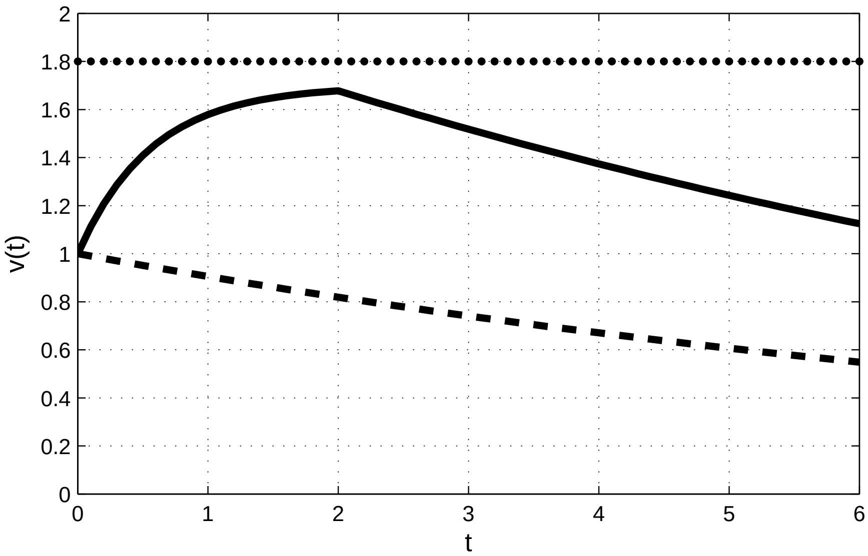

Figura 3.4: $v(t)$ com investimento em publicidade para $T = 2$, $\alpha = 0,1$ com $r = 30$ (linha sólida) e v(t) sem investimento em publicidade para $\alpha = 0,1$ e $r = 0$ (linha tracejada).

Na Figura (3.5) diminuímos a taxa de decaimento para $\alpha = 0,01$, mantemos a resposta constante em $r = 30$ e o tempo de investimento em $T = 2$. Observa-se, que as vendas aumentaram em duas unidades de tempo para aproximadamente 75%, logo após ela decai muito lentamente segundo o valor pequeno da taxa de decaimento. Em geral, diminuição da taxa constante de vendas implica em acréscimos nas vendas.

Na Figura (3.6) simultaneamente diminuímos a taxa de decaimento para $\alpha = 0,001$ e aumentamos a resposta constante para $r = 50$ e o tempo de investimento em $T = 2$. Observa-se, que em duas unidades de tempo as vendas aumentaram para o nível de saturação de 80%, logo após ela se manter neste nível devido a a taxa de decaimento é muito pequena. Em geral, a diminuição simultânea da taxa de decaimento e o aumento da taxa constante de vendas implica em acréscimos nas vendas. Observa-se que devido a

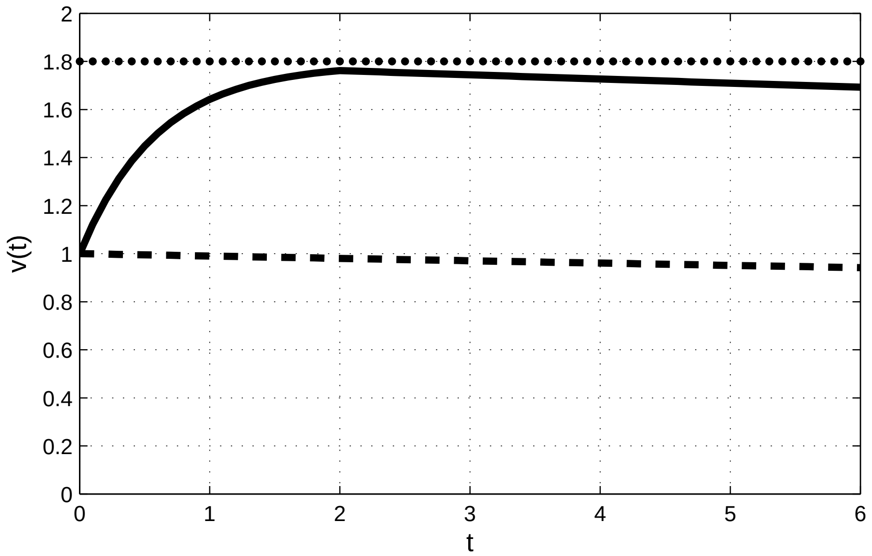

Figura 3.5: $v(t)$ com investimento em publicidade para $T = 2$, $\alpha = 0,01$ com $r = 30$ (linha sólida) e v(t) sem investimento em publicidade para $\alpha = 0,1$ e $r = 0$ (linha tracejada).

pequena taxa de decaimento, investir em publicidade por mais períodos de tempo significa gasto sem beneficio adicional. Neste caso, os clientes potenciais são agora clientes cativos.

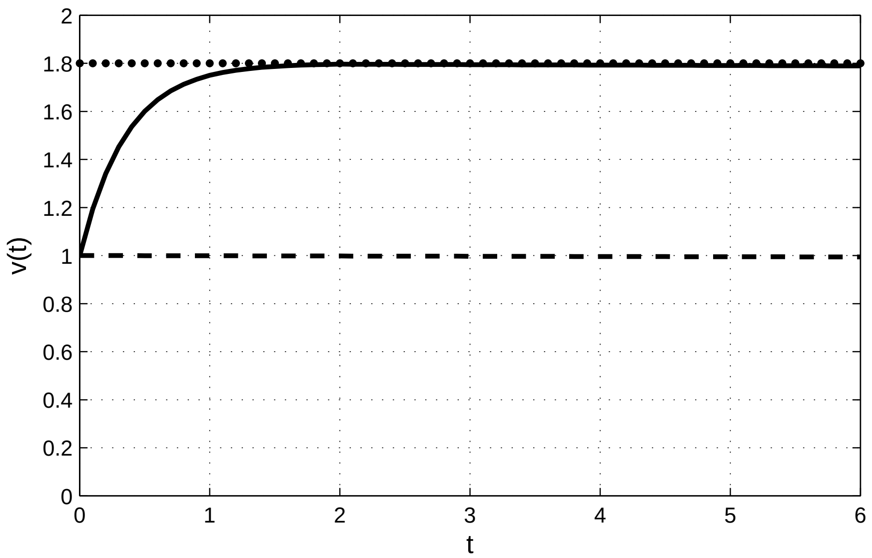

Figura 3.6: $v(t)$ com investimento em publicidade para $T = 2$, $\alpha = 0,01$ com $r = 30$ (linha sólida) e v(t) sem investimento em publicidade para $\alpha = 0,1$ e $r = 0$ (linha tracejada).

Na Figura (3.7) aumentamos a taxa de decaimento para $\alpha = 0,90$, mantemos a resposta constante para $r = 15$ e o tempo de investimento em $T = 2$. Observa-se, que em duas unidades de tempo as vendas diminuem em 10%. Entretanto, o investimento em publicidade impede que as vendas decaiam em 90% em duas unidades de tempo.

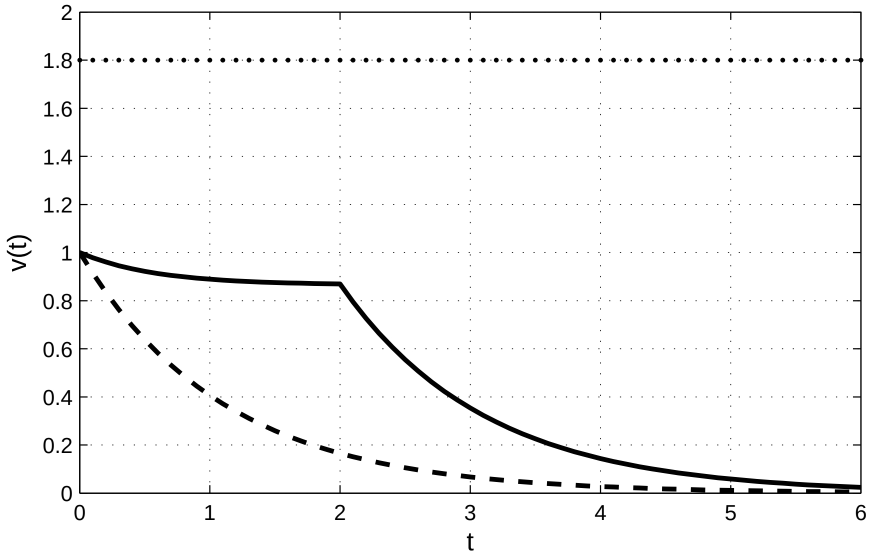

Figura 3.7: $v(t)$ com investimento em publicidade para $T = 2$, $\alpha = 0,90$ com $r = 15$ (linha sólida) e v(t) sem investimento em publicidade para $\alpha = 0,1$ e $r = 0$ (linha tracejada).

Observa-se nas simulações numéricas que a evolução nas vendas depende principalmente da resposta constante associada ao investimento em publicidade e à taxa de decaimento exponencial. Na próxima secção será analisado este comportamento desde um ponto de vista analítico.

3.9 A solução estacionária

Considerando a variação temporal $dv(t)/dt = 0$ na equação (3.11) obtém-se:

$$(\alpha + r.\frac{P(t)}{m}).v(t) = r.P(t), \qquad t > 0 \tag{3.20}$$

dividindo a equação (4.20) por r temos:

$$P(t) = (\frac{\alpha}{r} + \frac{P(t)}{m}).v(t)$$

colocando em evidência as vendas v(t) tem-se:

$$v(t) = \frac{P(t)}{(\frac{\alpha}{r} + \frac{P(t)}{m})}.$$

Asseguintes situações são observadas:

1) Se $\alpha/r \to 0$, então $v(t) \approx \frac{P(t)}{\frac{P(t)}{m}} = m$. Ou seja, se α for extremamente menor que $\boldsymbol{r}$, significa que o investimento em publicidade é muito maior que a taxa de decaimento, logo percebemos que as vendas se aproximam do nível máximo de saturação, que na prática é o ponto mais alto das vendas. Isto pode ser observado na figura (4.6)

2) Se $\alpha/r \to \infty$, etão $v(t) \approx 0$. Isto é, se a taxa de decaimento é muito maior que o invertimento em publicidade as vendas tendem a cair para zero. Entretanto, no período investido, este decaimento é diminuido como mostra a figura (4.7)

Em geral o comportamento das vendas é caracterizadas pala relação entre a taxa de decaimento α e a resposta constante $\boldsymbol{r}$, ou seja, α/r.

Capítulo 4

Um Modelo Econômico com Dinâmica de 2ª Ordem

Neste capítulo é feita a modelagem de um Modelo Econômico que considera um balanço entre o consumo e a procura de um bem. Denotado por um período de tempo t, tais como:

- u(t): a produção;
- c(t): o consumo;
- i(t): o investimento;
- D(t): a procura de bens;
- g(t): o nível de gasto, tais como gasto do governo.

Definição 4.1. Uma economia é dita *fechada* se toda a sua produção é consumida ou investida na própria economia. Isto é, se

$$u(t) = c(t) + i(t). \tag{4.1}$$

Uma economia é dita *não fechada* se toda a sua produção não é consumida ou investida na própria economia. □

Um exemplo de uma economia não fechada é quando consideramos injeções externas de capitais, tais como gasto do governo. Neste caso temos que,

$$u(t) = c(t) + i(t) + g(t) \tag{4.2}$$

O que indica que a produção aumenta com a aplicação externa de capitais g(t), com isso podemos considerar três hipóteses:

Hipótese 4.1. Assumimos que o consumo aumente proporcionalmente à produção, isto é:

$$c(t) = d.u(t) \tag{4.3}$$

onde, $d > 0$ é a constante de proporcionalidade, o qual indica a propenção marginal para consumir. □

Considerando,

$$d = (1 - s) \tag{4.4}$$

temos que,

$$c(t) = (1 - s).u(t) \tag{4.5}$$

onde, $s > 0$ indica a propenção marginal para poupar.

O objetivo é obter um balanço da economia de modo que a produção e a procura estejam equilibradas, isto é:

$$D(t) = u(t) \tag{4.6}$$

Porém, na prática, a produção não responde imediatamente à procura, existindo um tempo de retardo $\boldsymbol{r}$, associado ao desenvolvimento de uma nova empresa.

Para obter um balanço na presença de retardo [3], deve-se ajustar com antecedência a produção e a procura. Considerando,

$$D(t) = (1 - s)u(t - r) + i(t - r) + g(t) \tag{4.7}$$

onde os termos $(1 - s)u(t - r)$ indicam o retardo na produção e $i(t - r)$ indica o retardo no investimento. Não consideramos retardo na injeção de capital g(t).

Com isso uma segunda hipótese é considerada.

Hipótese 4.2. Assumimos que, o investimento não muda significativamente em um período de tempo **r**, isto é:

$$i(t-r) = i(t).\square \tag{4.8}$$

A equação (4.7) é uma equação com retardo, logo para obter a relação no tempo presente vamos aproximar os termos com retardo por uma aproximação de Taylor. Esta permite obter um modelo em equações diferencias. Vale lembrar que se uma função é infinitamente diferenciável em uma vizinhança do ponto **a**, em tão:

$$f(t-r) = f(t) - f'(t).(r) + \frac{f''(t)(r)^2}{2!} + ... + \frac{f^n(t)r^n}{n!} + ...$$

No caso da aproximação ser de primeira ordem, temos:

$$f(t-r) = f(t) - f'(t).(r) + \frac{f''(\xi)(\xi)^2}{2!}$$

onde $\xi \in (t-\delta, t+\delta)$ e $\frac{f''(\xi)(\xi)^2}{2!} = \vartheta(r^2)$ é o erro da aproximação de primeira ordem aplicando a aproximação de Taylor de primeira ordem para $i(t-r)$ temos,

$$u(t-r) = u(t) - u'(t)r + \vartheta(r^2) \tag{4.9}$$

ou

$$u(t-r) = u(t) - u(t)'r. \tag{4.10}$$

Substituindo a hipótese 2 (4.8), (4.10) em (4.7) resulta

$$D(t) = (1-s)[u(t) - u'(t)(r)] + i(t) + g(t). \tag{4.11}$$

Assumindo o balanço entre consumo e demanda como (4.6) obtem-se:

$$u(t) = D(t) = (1-s)[u(t) - u'(t)(r)] + i(t) + g(t)$$

colocando em evidência a derivada de u(t) temos:

$$(1-s)ru'(t) = -s.u(t) + i(t) + g(t) \tag{4.12}$$

ainda que $i(t)$ não mude significativamente em período de tempo de ordem **r**, a produção $u(t)$ não é uma constante.

Uma política plausível de investimento é considerada na seguinte hipótese.

Hipótese 4.3. (Princípio do Acelerador) Assumimos que o investimento $i(t)$ é diretamente proporcional à taxa de variação da produção $u'(t)$, isto é:

$$i(t) = a.u'(t) \tag{4.13}$$

onde $a > 0$, é a constante de proporcionlidade. □

Os retardos na implementação de investimentos garante que a hipótese 3 esteja satisfeita.
Em uma idealização, considera-se:

$$i'(t) = b\left[au'(t) - i(t)\right], \ b > 0 \tag{4.14}$$

esta relação se justifica no sentido da hipótese (3), pois o termo $au'(t) - i(t) = 0$. Se é assumido que $au'(t) - i(t) \approx 0$, então a variação do investimento $i'(t)$ é pequena, ou seja (4.14) atua como fator de correção da hipótese (3).
Derivando (4.12), temos:

$$(1-s) \cdot ru''(t) = -s.u'(t) + i'(t) + g'(t) \tag{4.15}$$

substituindo (4.14) em (4.15) resulta,

$$(1-s) \cdot ru''(t) = -s.u'(t) + b\left[au'(t) - i(t)\right] + g'(t) \tag{4.16}$$

ordenando esta equação, obtem-se uma equação diferencial de segunda ordem para o modelo econômico que considera o balanço entre o consumo e a procura.

$$(1-s) \cdot ru''(t) + \left[s - b.a + (1-s)br\right]u'(t) + b.s.u(t) = b.g(t) + g'(t). \tag{4.17}$$

Conhecido o consumo $u(t)$, pode-se procurar o investimento $i(t)$ usando a equação (4.14)

$$i'(t) + bi(t) = bau'(t) \tag{4.18}$$

ou seja, deve-se resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem para i(t) e o termo forçante $bau'(t)$ é, neste caso, conhecido pela solução de (4.17).

Considerações Finais

Usualmente as aplicações das equações diferenciais são realizas nas áreas de física, engenharia, geofísica e economia. Entretanto, com o avanço tecnológico, dos recursos em computação novas abordagens estão sendo observadas nas diversas áreas do conhecimento, como a medicina, biologia e ciências humanas. Assim, neste Trabalho de Conclusão de Curso foram modelados por equações diferenciais lineares dois problemas nas áreas de economia e publicidade ou marketing, os quais não são usualmente abordados nos livros universitários desta área.

O primeiro modelo descrito neste trabalho foi em publicidade ou marketing, área pouco explorada nos livros de equações diferenciais. O objetivo é analisar a resposta nas vendas pelo investimento em publicidade. A modelagem considerou variáveis como as vendas, investimento em publicidade, taxa natural de decaimento nas vendas, nível de saturação e a resposta constate, a qual mede o incremento nas vendas por cada unidade monetária investida em publicidade. Este modelo é descrito por uma equação diferencial de primeira ordem com coeficientes constantes. O método do fator integrante foi usado para resolver esta equação, o qual foi descrito com detalhe no Capítulo 2.

Uma análise teórica do problema estacionário (eliminando o termo da derivada em relação ao tempo) mostra que o comportamento das vendas dependem da razão entre a taxa de decaimento e a resposta constante. Quanto menor esta razão, o nível de vendas no período do investimento em publicidade aumentam até o nível de saturação, de outro lado, enquanto maior esta razão o decaimento das vendas dominam o investimento em publicidade. Estes resultados são confirmados por simulações numéricas realizadas no Matlab. Nesta simulações é observado que se a razão entre a taxa de decaimento e a resposta constante for muito pequena, as vendas aumentam rapidamente até o nível de saturação e logo elas decaem muito lentamente. Isto implica que neste caso é suficiente aplicar investimento em publicidade por este curto período de tempo, e logo retirar o gasto em publicidade, pois os consumidores potenciais são agora consumidores fieis a este produto.

Outro caso particular observado nas simulações numéricas, é quando a razão entre a taxa de decaimento e a resposta constante é muito grande. Neste caso, as vendas diminuem a uma taxa menor que a taxa de decaimento natural do produto. O investimento em publicidade consegue amortecer a quedas nas vendas, o que permite à empresa tomar decisões sobre continuar comercializando ou não este produto.

No segundo modelo, abordamos um modelo de economia aberta, na qual a produção depende do consumo, investimento, e o nível de gastos. Assume-se que o consumo é proporcional à produção e procura-se o equilíbrio entre procura e produção. Como na prática a produção não responde imediatamente à procura existe um tempo de retardo o qual deve-se considerar para ajustar o balanço entre procura e produção. Considerando o tempo de retardo na produção e no investimento, este modelo de economia aberta é descrito por uma equação algébrica, onde os termos dependem do tempo atual e do tempo de retardo. Neste trabalho, a equação algébrica é transformada para uma equação diferencial de segunda ordem. Esta transformação de equação algébrica a equação diferencial é realizada usando séries de Taylor aos termos de produção e investimento com retardo. O objetivo principal neste caso, foi a modelagem da economia aberta, a solução desta equação é simples, sendo parcialmente descrita no capítulo 2 para o caso geral de uma equação diferencial de segunda ordem.

Referências Bibliográficas

[1] GUIDORIZZI, Hmilton Luiz. *Um Curso de Cálculo.* vol. 4 3^a ed. RJ: LTC editora; 1999.

[2] KAPLAN, Wilfred.*Cálculo Avançado*, Edgard Blücher Editora e EDU-SP, São Paulo, Brasil, 1972.

[3] JULIO, Ruiz Claeyssen. *A Respostas Impulso em Modelos Evolutivos e Estacionários*, UFSM editora, Santa Maria-RS, 2009.

[4] VILCHER, Maurício A. e CORRÊA, Maria L.*Cálculo.* Volume 1, Rio de Janeiro IME-UERJ.

[5] ROSA, Ricardo M. S.*Equações Diferenciais*, IM-UFRJ, 2006

[6] SANTOS, Reginaldo J. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.* Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2007.

[7] SODRÉ, Ulysses. *Modelos Matemáticos, Equações Diferenciais Ordinárias*; Notas de aulas. Dep. de Matemática da UEL, 1987.

[8] VIDALE, M.L. and WOLFE, H.B. *An operation-research study of sales response to advertensing*; xxx, USA, 1957.

[9] WILLIAM, E. Boyce e RICHARD, C. Diprima. *Equações Diferenciais Elementeres e Problemas de Valores de Contorno.* 8^a edição Livros Técnicos e Científicos Rio de Janeiro-RJ: LTC editora, 2006.

[10] ZILL, Dennis G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

[11] ZILL, Dennis G e CULLEN, Michael R. *Equações Diferenciais*, volume 1, 3^a edição: Mmakron Books editora, São Paulo 2001.

[12] FC. Disponível em: www.mat.mat.fc.ul.pt/aninf/20042/aninf2/Acetatos/1-08A.jpg. Acessado em: 03 de maio de 2009.

[13] CATTAI, Adriano Pedreira . Análise Real-Sequências de Cauchy. Disponível em: www.cattai.mat.br/site/files/AnaliseReal/AnaliseRealcattaiuneb.pdf. Acessado em: 30 de janeiro de 2010.

[14] FARIAS, Agnaldo Monteiro. Equações de Euler. Disponível em: www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/cdxxviiicnmac/posters/ 087posterCNMAC2005agnaldofarias.pdf.Acessado em: 02 de julho de 2011.

[15] IME-UERJ. Disponível em: www.ime.uerj.br/ calculo/LivroIV/edoseg.pdf. Acessado em: 06 de desembro de 2009.

[16] SODRÉ, Ulysses. Notas de aulas-Equações Diferenciais Ordinárias. Disponível em: www.pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/edo.pdf. Acessado em: 02 de janeiro de 2011.

[17] WILLIAM, E. Boyce e RICHARD, C. Diprima. Equações Diferenciais Aplicadas. Disponível em: www.ceset.unicamp.br/ marlih/ST361/Apostila20EqDif.pdf. Acessado em: 08 de setembro de 2010.

[18] OLIVEIRA, Ana Carolina de. Disponível em: www.athena.biblioteca.unesp.br /exlibris/bd/brp/33004153071P0/2006/oliveiraacmesjrp.pdf. Acessado em: 08 de setembro de 2010.