UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Adalso Costa da Silva
Joel Maia Pereira
Luiz Fernando Lobato Saraiva

OS COMPLEXOS, OS QUATÉRNIOS E OS OCTÔNIOS: OS NÚMEROS IMAGINÁRIOS

Macapá-AP
2012

Adalso Costa da Silva
Joel Maia Pereira
Luiz Fernando Lobato Saraiva

OS COMPLEXOS, OS QUATÉRNIOS E OS OCTÔNIOS: OS NÚMEROS IMAGINÁRIOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob a orientação do Prof^{o}. Dr. GUZMÁN EULALIO ISLA CHAMILCO.

Macapá-AP
2012

OS COMPLEXOS, OS QUATÉRNIOS E OS OCTÔNIOS: OS NÚMEROS IMAGINÁRIOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado pela comissão avaliadora do Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá. Composta pelos integrantes abaixo-relacionados:

AVALIADORES:

____

Orientador
Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco
UNIFAP - Campus Marco Zero do Equador

____

Primeiro Avaliador
Prof. Dr. José Walter Cardenas Sótil
UNIFAP - Campus Marco Zero do Equador

____

Segundo Avaliador
Profª. Josiane Oliveira Santos
UNIFAP - Campus Marco Zero do Equador

Avaliado em: ____/____/____

Macapá-AP
2012

Aos nossos familiares.

"Sabendo os fariseus que Jesus reduzira ao silêncio os saduceus, reuniram-se e um deles, doutor da lei, fez-lhe esta pergunta pra pô-lo à prova:"Mestre, qual é o maior mandamento da lei? "Respondeu Jesus: Amarás o Senhor teu Deus de todo o seu coração, de toda tua alma e de todo teu espírito (Deut 6,5). Este é o maior e o primeiro mandamento. E o segundo, semelhante a este é: Amarás teu próximo como a ti mesmo (Lev 19,18). Nesses dois mandamentos se resumem toda a lei e os profetas".

(Mateus 22:34,40)

Agradecimentos

Primeiramente agradecemos a Deus por ter permitido que este momento fossem alcançado em nossas vidas.

Aos nossos famíliares.

A todos os colegas graduação.

Ao Prof.Dr.Guzmán Eulalio Isla Chamilco por ter estimulado e acompanhado o nosso trabalho de pesquisa durante a graduação.

E a todos que contribiram de forma direta e indireta para que nós concluísse-mos este trabalho.

O nosso muito obrigado a todos.

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns resultados básicos do conjunto dos números complexos, este porém, são usados para o desenvolvimento das operações elementares dos quatérnios os quais são uma extensão dos complexos, juntamente com o octônios que por sua vez é uma extensão dos quatérnios, onde ambos se diferenciam e sua álgebra sendo os quatérnios 4-dimensional e os octônios 8-dimensional, que ao decorrer do seus processos históricos foram desenvolvidos respectivamente por Sir William Rowan Hamilton e Arthur Cayley, assim o objetivo deste é estabelecer a similaridade entre os complexos os quatérnios e octônios.

Palavras-chaves:O Conjuto dos Complexos, os Quatérnios e os Octônios.

Abstract

In this work we studied some basic results of the group of the complex numbers, this however, they are used for the development of the elementary operations of the quatérnios which are an extension of the compounds, together with the octônios that is an extension of the quatérnios for his/her time, where both they differ and his/her algebra being the 4-dimensional quatérnios and the 8-dimensional octônios, that when elapsing of their historical processes they were developed respectively by Sir William Rowan Hamilton and Arthur Cayley, like this the objective of this is to establish the similarity among the compounds the quatérnios and octônios.

Word-keys:O Conjuto of the Compounds, Quatérnios and Octônios.

Lista de Figuras

1.1 Rafael Bombelli (1526 - 1572) 13
1.2 Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) 15
1.3 Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) 15

2.1 Conjugado de um número complexo 23
2.2 Representação geométrica de um número complexo 23

3.1 Diagrama da multiplicação dos quatérnios 26

4.1 Figura 8-dimensional 31
4.2 Diagrama da multiplicação dos Octônios 34

Lista de Tabelas

3.1 Tabela da multiplicação dos quatérnios 26

4.1 Tabela da multiplicação dos octônios 33

Índice

Agradecimentos **vi**

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Lista de Figuras **ix**

Lista de Tabelas **x**

1 Introdução **13**

2 Definições Prévias **18**

2.1 Construção dos Complexos 18

2.1.1 Conjunto dos Números Complexos 19

2.1.2 Operações com Pares Ordenados 19

2.1.3 Operações Elementares nos Números Complexos 22

3 Os Quaterniões **25**

3.1 Introdução 25

3.2 Definições e Resultados Básicos 25

3.2.1 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ 25

3.2.2 $ij = -ji = k$ 25

3.2.3 $jk = -kj = i$ 25

3.2.4 $ki = -ik = j$ 25

3.3 Plano Fano dos Quaterniões 26

3.4 Operações entre Quaterniões 27

3.4.1 Igualdade entre Quaterniões 27

3.4.2 Adição entre Quaterniões 27

3.4.3 Subtração entre Quaterniões 27

3.4.4 Multiplicação entre Quaterniões 27

3.4.5 Multiplicação de um Escalar por um Quaternião 27

3.4.6 Conjugado de um Quaternião 27

3.4.7 Norma de um Quaternião 28
3.4.8 Quaternião unitário 28
3.4.9 Inverso de um quaternião não nulo 28
3.4.10 Divisão de quaterniões 28
3.5 Representação matricial dos quatérnios com matrizes complexas 2×2 . . . 28

4 Os Octoniões **31**
4.1 Resenha Histórica 31
4.2 Construção dos Octônios 33
4.2.1 Definção: 34
4.3 Operações Elementares entre Octônios 34
4.3.1 **Igualdade entre Octônios** 34
4.3.2 **Adição entre Octônios** 34
4.3.3 **Multiplicação entre Octônios** 35
4.3.4 **Conjugado de um Octônio** 35
4.3.5 **Norma de um Octônio** 35
4.3.6 **Inverso de um Octônio** 35

5 Aplicações **36**
5.1 Comentário sobre as áreas aonde os Quatérnios e os Octônios são aplicados 36
5.2 Referências aonde pode ser encontrados aplicações com cálculos matématicos dos Quatérnios e dos Octônios 38
5.2.1 Aplicações de Quatérnios em Ciências Geodésicas 38
5.2.2 Calculando a dilatação na hiperesfera 8-dimensional 38

Considerações Finais **xxxix**

Referências Bibliográficas **xl**

Capítulo 1

Introdução

Ao longo da história, vários matemáticos se depararam com problemas no quais resultavam em raízes quadradas de números negativos. O primeiro que se tem registro encontra-se na obra "Estereometria" de Heron de Alexandria (aprox. 50 a.C a 50 d.C). No entanto, foi somente no período renascentista que Rafael Bombelli, nascido em Bolonha na Itália no ano de 1526 e engenheiro hidráulico por profissão, abriu os caminhos para este novo ramo da matemática; ele demonstrou a insuficiência dos números reais através do estudo de uma solução para uma equação cúbica.

Figura 1.1: Rafael Bombelli (1526 - 1572)
Fonte: http://www.wga.hu/art/b/bombelli/portrait.jpg

Além disso, Bombelli idealizou oito regras fundamentais para o cálculo com raízes quadradas negativas, que, em notações atuais, podem ser expressas por $(-i)(-i) = -1$; ele também criou a regra para a soma de dois números da forma $a + \sqrt{-1}$. Posterior ao feito de Bombelli, alguns matemáticos juntaram-se à atormentada e triunfante marcha dos números imaginários, destacaram-se com suas contribuições para desvendar os números complexos nomes tais como: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716); Leonhard Euler (1707 - 1783); Caspar Wessel (1745 - 1818), que foi o primeiro a representar, significantemente, números complexos como pontos no plano e iniciou uma representação tridimensional; Jean Robert Argand (1768 - 1822), que também elaborou uma representação geométrica para os números complexos; Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) e

Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857). Segundo GARBI (2007), a partir de então "estavam lançadas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da matemática, com infindáveis aplicações práticas".

O conceito de número complexo teve um desenvolvimento gradual. Começaram a ser utilizados formalmente no século XVI em fórmulas de resolução de equações de terceiro e quarto grau.

Os primeiros que conseguiram dar soluções a equações cúbicas foram Scipione del Ferro e Tartaglia. Este último, depois de ter sido alvo de muita insistência, passou os resultados que tinha obtido a Girolamo Cardano, que prometeu não divulgá-los. Cardano, depois de conferir a exatidão das resoluções de Tartaglia, não honrou sua promessa e publicou os resultados, mencionando o autor, em sua obra Ars Magna de 1545, iniciando uma enorme inimizade.

Um problema inquietante percebido na época foi que algumas equações (as equações que tem três raízes reais, chamadas de casus irreducibilis) levavam a raízes quadradas de números negativos.

No início, os números complexos não eram vistos como números, mas sim como um artifício algébrico útil para se resolver equações. Descartes, no século XVII, os chamou de números imaginários. Abraham de Moivre e Euler, no século XVIII começaram a estabelecer uma estrutura algébrica para os números complexos. Em particular, Euler denotou a raiz quadrada de -1 por i. Ainda no século XVIII os números complexos passaram a ser interpretados como pontos do plano (plano de Argand-Gauss), o que permitiu a escrita de um número complexo na forma polar. Com isso, conseguiu-se calcular potências e raízes de modo eficiente e claro.

Depois que Euler mostrou que as equações do tipo

$$z^n = w$$

tinham n soluções e os matemáticos passaram a acreditar que toda equação de grau n deveria ter n raízes complexas. Vários matemáticos tentaram provar esta conjectura e Jean le Rond d'Alembert publicou, em 1746, algo que considerou uma prova deste fato. Entretanto um jovem matemático mostrou que tal prova era insatisfatória e ilusória"e apresentou uma demonstração correta.

Este matemático foi Johann Carl Friedrich Gauss (ou Gauß) nasceu no dia 30 de Abril de 1777 em Braunschweig, e morreu no dia 23 de Fevereiro de 1855 em Göttingen, foi um matemático, astrônomo e físico alemão. Conhecido como o príncipe dos matemáticos, muitos o consideram o maior gênio da história da matemática.

Figura 1.2: Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)
Fonte:http://physweb.bgu.ac.il/COURSES
/PHYSICS2IndstMngmnt/2008B/indexfiles/CarlFriedrichGauss.jpg

Aos 21 anos, em 1799, Gauss apresentou o que ainda hoje é considerado a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos. Nela Gauss demonstrou que o conjunto dos números complexos é algebricamente fechado. Este resultado é conhecido como teorema fundamental da álgebra, cuja denominação foi dada pelo próprio Gauss. Esse teorema afirma que: Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa.Uma consequência deste teorema é que todo polinômio de grau n pode ser decomposto em um produto de n fatores lineares complexos, os quais serão apresentado no capítulo dois com suas definições e resultados básicos.

No capítulo três serão apresentados o estudo dos Quaterniões que é uma extenção do conjunto dos números complexos, os quatérnios foram inventados em 1843 pelo matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton, a partir dos trabalhos dos matemáticos Carl Friedrich Gauss e Leonhard Euler. Hamilton nasceu em Dublin no ano de 1805, e aos cinco anos de idade já era capaz de ler Latim, Grego e Hebráico. Ele entrou para o Trinity College Dublin no ano de 1823, e embora ainda fosse graduando foi, em 1827, nomeado professor de astronomia da universidade e diretor do Dunsink Observatory com o título *Royal Astronomer of Ireland.* Foi nomeado cavaleiro em 1835 e presidiu a *Royal Irish Academy* de 1837 a 1845. Ele morreu no ano de 1865 em Dunsink.

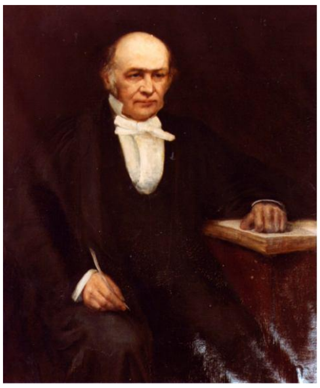

Figura 1.3: Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865)
Fonte: http://www.theword.ie/cms/uploads/hamiltonportrait-web.jpg

Hamilton estudava desde 1830 a interpretação geométrica da aritmética dos números complexos no plano e procurava obter resultados análogos no espaço a três dimensões. Em 1833, obteve como resultado que os números complexos formam uma álgebra de pares ordenados de números reais. Sir William Rowan Hamilton tentou estender este conceito a triplos de números, com um real e dois imaginários. Por mais de um década, esta questão preocupou Hamilton.

Uma das motivações de Hamilton para procurar números complexos tridimensionais, era encontrar uma descrição de rotações no espaço, análoga ao caso complexo, onde a multiplicação corresponde a uma rotação e a uma mudança de escala. No dia 16 de Outubro de 1843, enquanto passeava no Royal Canal em Dublin, Hamilton apercebeu-se que seriam necessários quatro números para descrever uma rotação seguida de uma mudança de escala: um número correspondente à mudança de escala, outro número para indicar o ângulo de rotação e os dois restantes para indicar o plano de rotação, encontrando assim a solução para o problema. Introduzindo uma estrutura não comutativa, Hamilton encontrou um fecho para a multiplicação de números da forma

$$w + ix + jy + kz$$

e chamou aos seus números complexos em $\mathbb{R}^4$, quaterniões. Entusiasmado com a descoberta, Hamilton gravou, nessa altura, a fórmula fundamental da álgebra dos quaterniões, numa pedra da ponte de Brougham (hoje com o nome de Broom Bridge). Nenhum sinal desta gravação pode ser encontrado hoje, mas foi erguida uma placa no local, em 1956, comemorando a descoberta e exibindo a fórmula.

Na Royal Irish Academy, Hamilton apresentou uma teoria detalhada de um sistema algébrico não comutativo e publicou um conjunto de resultados, que deram origem, em 1853, ao livro: "Lectures on Quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method". Este é, historicamente, o primeiro exemplo de uma álgebra não comutativa que nasceu subitamente e abriu as portas da álgebra abstrata.

Hamilton dedicou o resto da sua vida a desenvolver aplicações dos quaterniões à geometria, mecânica e física. Nesse período introduziu termos como vector, versor, tensor, escalar, que são familiares nos nossos dias. Como resultado deste trabalho foi ainda editado em 1866, a título póstumo, pelo seu filho William Edwin Hamilton, um trabalho em dois volumes: Elements of Quaternions.

O próprio Hamilton introduziu em 1853, nas suas Lectures on Quaternions, quaterniões com coeficientes complexos, os Biquaterniões. Nesse mesmo texto, desenvolveu, ainda, uma nova generalização que já tinha iniciado num artigo nos Transactions of Royal Irish Academy, em 1848: os Números Hipercomplexos.

Face ao grande contributo dado por Hamilton, a Irlanda tem ao longo do tempo, prestado homenagem ao seu ilustre matemático e cientista, que passou grande parte da sua vida em Dublin. Em 1943, aquando do centenário da descoberta dos quaterniões, foi emitido um selo comemorativo com a fórmula fundamental dos quaterniões. Em 2005,celebrou-se o bicentenário do nascimento de William Rowan Hamilton e o governo Irlandês dedicou-lhe o ano, proclamando-o como: "Hamilton Year 2005: Celebrating Irish Scienceand Technology". Neste enquadramento, dois símbolos emblemáticos foram produzidos: um selo comemorativo e uma moeda de coleção que representa a linguagem simbólica desenvolvida por Hamilton.

Em 1843, Graves descobriu uma álgebra não associativa com oito elementos de base, os octoniões, e publicou o seu trabalho em 1848,essa descoberta se da devido a perda da propriedade comutativa da multiplicação para sistemas numéricos, ela foi de particular importância para as sucessivas investigações que levaram a essa grande descoberta. Os octoniões foram descobertos também, em 1845, pelo matemático inglês Arthur Cayley (*1821 -†1895) sendo também conhecidos como números de Cayley.Que serão retratada no capítulo quatro, onde é abordado sua resenha histórica, sua construçao e em particular, são definidas sua principais operações e no capítulo cinco apresentaremos algumas aplicações dos Quaterniões e dos Octônios, finalmente concluimos com as considerações finais.

Capítulo 2

Definições Prévias

Apresentaremos neste capítulo as definições e conceitos baseado em [1] que serão necessários para a fazermos a similaridades dos complexos com os Quaterniões e os Octoniões sendo apresentados nos capítulos três e quatro respectivamente.

Os Números Complexos

2.1 Construção dos Complexos

A Aritmética e a Geometria tiveram origens independentes, mas com o tempo foram sendo descobertas relações entre números e formas. A idéia de empregar sistemas de coordenadas para definir posições de pontos no plano e no espaço já havia sido utilizada no século III a.C. por Apolônio, em seus trabalhos sobre secções cônicas. Entretanto, foi na primeira metade do século XVII que os geniais matemáticos franceses Pierre de Fermat e Renê Descartes inventaram, independentemente e quase simultaneamente, o que hoje conhecemos por Geometria Analítica. Fermat não se preocupou em publicar suas ideias, ao contrário de descartes que, no apêndice de seu mais famoso livro Discurso Sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade nas Ciências, publicado em 1637, escreveu um trabalho denominado La Geometrie, que é considerado a pedra fundamental da Geometria Analítica.

Com o domínio da geometria Analítica Descartes estudou, entre outras coisas, as equações algébricas. Em uma passagem do Discurso do Método Descartes escreveu a seguinte frase: Nem sempre as raízes verdadeiras positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são "imaginárias".

Por esse motivo, até hoje o número $\sqrt{-1}$ é chamado de número imaginário, termo que se consagrou juntamente com a expressão "número complexo". Infelizmente, são designações um tanto inadequadas e subjetivas para objetos matemáticos.

Depois de Bombelli, em 1530, outros personagens importantes da História da Matemática deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre os quais o matemático francês Abraham de Moivre, amigo de Isaac Newton, e também os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Euler.

Dentre as inúmeras contribuições de Euler foi notável seu empenho na melhoria da simbologia. Muitas das notações que utilizamos hoje foram introduzidas por ele. Dentre as representações propostas por Euler destacamos o i substituindo $\sqrt{-1}$. Euler passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Esses números são chamados de números complexos.

Um número complexo é um número z que pode ser escrito na forma $z = a + bi$, em que a e b são números reais e i denota a unidade imaginária. Esta tem a propriedade $i^2 = -1$. Onde a e b são chamados respectivamente parte real e parte imaginária de z. O conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, contém o conjunto dos números reais. Munido de operações de adição e multiplicação obtidas por extensão das operações de adição e multiplicação nos reais. Assim, podemos definir $\mathbb{C}$ como:

$\mathbb{C}= \{z|z=a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}\}$, onde z é o número complexo.

2.1.1 Conjunto dos Números Complexos

Chama-se **conjunto dos números complexos**, e representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas as operações de igualdade, a adição e a multiplicação.

É usual representar-se cada elemento $(x, y) \in \mathbb{C}$ com o simbolo z, portanto:

$$\boxed{z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ sendo } x, y \in \mathbb{R}}$$

2.1.2 Operações com Pares Ordenados

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto do números reais. Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2= \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$$

isto é, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto do pares ordenados (x, y) em que x, y sao números reais.

Tomamos dois pares ordenados, (a, b) e (c, d), de $\mathbb{R}^2$ para três definições importantes:

- **Igualdade**: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundo termos iguais.

$$\boxed{(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d}$$

- **Adição**: chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiros e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$\boxed{(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)}$$

- **Multiplicação**: chama-se o produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$\boxed{(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)}$$

Propriedade da Adição

A operação de adição em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:

- **Propriedade Associativa**

  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),\ \forall\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$

- **Propriedade Comutativa**

  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ \forall\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$

- **Existência do Elemento Neutro**

  $\exists\ \epsilon_a \in \mathbb{C} | z + \epsilon_a = z, \forall z \ \ \in \mathbb{C}$

- **Existência do Elemento Simétrico**

  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists\ z' \in \mathbb{C} | z + z' = \epsilon_a$

- **Subtração**

  Dados os complexos $z_1 = (a,b)$ e $z_2 = (c,d), \exists z \in \mathbb{C} | z_1 + z = z_2, z = z_2 + z_1'$. Esse número z é chamado diferença entre z_2 e z_1 e indicado por $z_2 - z_1$ portanto:

  $$z_2 - z_1 = z_2 + z_1' = (c,d) + (-a,-b) = (c-a, d-b)$$

Propriedade da Multiplicação

A operação de multiplicação em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:

- **Propriedade Associativa**

  $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3),\ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

- **Propriedade Comutativa**

  $z_1.z_2 = z_2.z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- **Existência do Elemento Neutro**

  $\exists\ \epsilon_m \in \mathbb{C} | z.\epsilon_m = z, \forall z \ \ \in \mathbb{C}$

- **Existência do Elemento Inverso**

  $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists\ z'' \in \mathbb{C} | z.z'' = \epsilon_m$

Divisão

Dados os complexos $z_1 = (a,b) \neq (0,0)$ e $z_2 = (c,d), \exists z \in \mathbb{C} | z_1.z = z_2, z = z_2.z_1''$. Esse número z é chamado quociente entre z_2 e z_1 e indicado por $\frac{z_2}{z_1}$ portanto:

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2.z_1'' = (c,d)(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (\frac{ca+db}{a^2+b^2}, -\frac{da-cb}{a^2+b^2})$$

Propriedade Distributiva

Em $\mathbb{C}$, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição:
$z_1.(z_2+z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Forma Algébrica

Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$

Consideramos o subconjunto R' de $\mathbb{C}$ formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero:

$$R' = \{(a,b) \in \mathbb{C} | b = 0\}$$

Consideramos uma aplicação f, de $\mathbb{R}$ em R', que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x,0) \in R'$.

$$f : \mathbb{R} \to R'$$

$$x \to (x,0)$$

Observamos que essa aplicação f é bijetora, pois:

1) Todo par $(x,0) \in R'$ é correspondente, segundo f, de $x \in \mathbb{R}$, logo f é sobrejetora;

2) Dados $x \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, os seus correspondentes $(x,0) \in R'$ e $(x',0) \in R'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados, logo f é injetora.

Observamos ainda que f conserva as operações de adição e multiplicação, pois:

1) A soma $a+b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(a+b,0)$, que é soma dos pares $(a,0)$ e $(b,0)$, correspondentes de a e b, respetivamente:

$$f(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = f(a) + f(b)$$

2) Ao produto ab, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(ab,0)$, que é o produto dos pares $(a,0)$ e $(b,0)$, correspondentes de a e b, respetivamente:

$$f(ab) = (ab,0) = (ab - 0.0, a.0 + 0b) = (a,0).(b,0) = f(a).f(b)$$

Devido ao fato de existir uma aplicação bijetora $f : \mathbb{R} \to R'$ que conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que $\mathbb{R}$ e R' são isomorfos. Devido ao isomorfismo, operar com $(x,0)$ leva a resultado análogos ao obtidos operando com x. Isto justifica a igualdade:

$$x = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}$$

Aceita a esta igualdade, temos em particular que $0 = (0, 0), 1 = (1, 0)$ e $\mathbb{R} = R'$. Assim $\mathbb{R}$ passa ser subconjunto de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Unidade Imaginária

Chamamos de unidade imaginária e indicamos por i o número complexo (0,1). Note que:
$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1$
isto é a propriedade básica da unidade imaginária é:

$$i^2 = -1$$

Definição 2.1.1 *Dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$,temos:*

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y.0 - 0.1, y.1 + 0.0) = (x, 0) + (y, 0).(0.1) \text{ isto é:}$$
$$z = x + y.i$$

Assim todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a forma $z = x+y.i$, chamada forma algébrica. O número real x é chamado parte real de z e o número real y é chamada parte imaginária de z. Em simbolos indica-se:

$$x = Re(z) \text{ e } y = Im(z)$$

2.1.3 Operações Elementares nos Números Complexos

Definição 2.1.2 *Sejam z e w dois números complexos dados por $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ então definem-se as relações e operações elementares tal como segue:*

- **Igualdade**

  $z = w$ se e somente se $a = b$ e $c = d$

- **Soma**

  $z + w = w + z = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

- **Produto**

  $z \cdot w = w \cdot z = (a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

- **Conjugado**

  Dado o número complexo $z = a + bi$ com a,b $\in \mathbb{R}$, o cojugado de z é definido por $\overline{z}$=$\overline{a + bi}$=$a - bi$

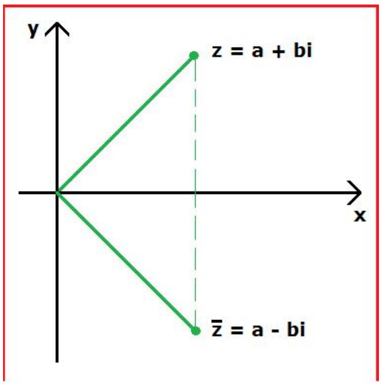

Figura 2.1: Conjugado de um número complexo

- **Produto de um complexo pelo seu conjugado**

  Seja $z = a + bi$ e $\overline{z}$=$a - bi$ temos:

  $$z{\cdot}\overline{z}=(a + bi){\cdot}(a - bi)=a^2 + b^2$$

  Observe que o produto $z{\cdot}\overline{z}$ é a soma dos quadrados de dois números reais a e b; portanto, o produto $z{\cdot}z$ é um número real e recebe a denominação de norma de z, é definido por:

  $$N(z)=z{\cdot}\overline{z}=a^2 + b^2$$

- **Representação geométrica de um número complexo**

  Um número complexo da forma $z = a + bi$, pode ser representado geometricamente no plano cartesiano, como sendo um ponto (par ordenado) tomando-se a abscissa deste ponto como a parte real do número complexo a no eixo OX e a ordenada como a parte imaginária do número complexo z no eixo OY, sendo que o número complexo $0 = 0 + 0i$ é representado pela própria origem (0,0) do sistema.

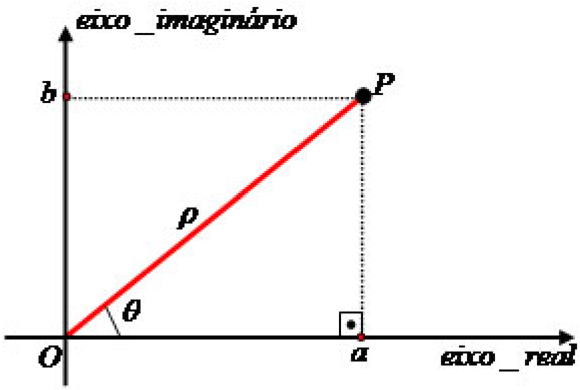

Figura 2.2: Representação geométrica de um número complexo

- **Módulo de um número complexo**

  No gráfico anterior podemos observar que existe um triângulo retângulo cuja hipotenusa correspondente à distância entre a origem 0 e o número complexo z, normalmente denotada pela letra grega ρ, o cateto horizontal tem comprimento igual à parte real a do número complexo e o cateto vertical corresponde à parte imaginária b do número complexo z.

Desse modo, se $z = a + bi$ é um número complexo, então:

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

e a medida da hipotenusa será por definição, o módulo do número complexo denotado por $|z|$, isto é:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Capítulo 3

Os Quaterniões

Neste capítulo é feita uma breve introdução aos Quaterniões baseada em [2]. Em particular, são definidas as principais operações e correspondentes propriedades, sendo também apresentada a forma matricial dos Quaterniões na matriz complexa de ordem 2×2.

3.1 Introdução

Os quaterniões descobertos por Sir Hamilton em 1843 são hoje um tema muito atual e a sua vasta aplicação abrange vários ramos das ciências: o tratamento de sinal, o tratamento de imagens, a mecânica quântica, a aeronáutica, a animação computacional, são apenas algumas das áreas que reconhecem a ferramenta importante que os quaterniões são, tanto para a modelação de um problema, como para a simplificação dos cálculos algébricos associados a esse problema.

3.2 Definições e Resultados Básicos

O Conjunto dos Quaterniões é representado atualmente por $\mathbb{H}$, em homenagem a seu descobridor Hamilton. E esse sistema defini-se a partir de três números imaginários diferentes, i, j, e k em que:

3.2.1 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

3.2.2 $ij = -ji = k$

3.2.3 $jk = -kj = i$

3.2.4 $ki = -ik = j$

1	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Tabela 3.1: Tabela da multiplicação dos quatérnios

Usaremos ao longo deste capítulo a notação cartesiana
$x = x_0 + \mathbf{x} = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, com $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, ou a notação vetorial $(x = x_0, x_1, x_2, x_3)$, identificando assim $\mathbb{H}$ com $\mathbb{R}^4$. À semelhança dos números complexos,

- x_0 representa a parte real(ou escalar, na terminologia de Hamilton) de x e denota-se por $\mathbf{Re}(x)$.
- $\mathbf{x} := x_1 i + x_2 j + x_3 k$ corresponde à parte imaginária (ou parte vetorial) do quaternião, denota-se também por $\mathbf{Im}(x)$.
- x diz-se um **quaternião puro** se $\mathrm{Re}(x) = 0$, ou forma equivalente, se $x = \mathbf{x}$.

3.3 Plano Fano dos Quaterniões

Os quatérnios são uma álgebra 4-dimensional com bases $1, i, j$ e k. Para descrever seu produto, poderíamos utilizar a tabela de multiplicação, mas é bem mais fácil notar que:

- 1 é a identidade de multiplicação;
- i, je k são as raízes de -1;
- temos que $ij = k, ji = -k$ e todas as identidades são obtidas a partir de permutações cíclicas de $(i; j; k)$.

Podemos resumir tais fatos na seguinte figura:

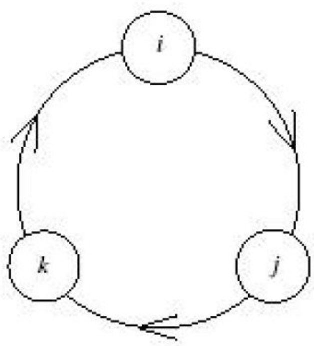

Figura 3.1: Diagrama da multiplicação dos quatérnios

Quando multiplicamos dois elementos no sentido horário, obtemos o próximo elemento: por exemplo, $ij = k$. Mas, quando multiplicamos no sentido anti-horário, obtemos o sinal de menos: $ji = -k$.

3.4 Operações entre Quaterniões

Tomamos dos Quaterniões da forma:

$x = x_0 + \mathbf{x} = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ e $w = w_0 + \mathbf{w} = w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k$.

3.4.1 Igualdade entre Quaterniões

$x = w$ se e somente se $x_0 = w_0$ e $\mathbf{x} = \mathbf{w}$

3.4.2 Adição entre Quaterniões

$x + w = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) + (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)$

$x + w = (x_0 + w_0, x_1 + w_1, x_2 + w_2, x_3 + w_3)$

$x + w = (x_0 + w_0) + (x_1 + w_1)i + (x_2 + w_2)j + (x_3 + w_3)k$

$x + w = (x_0 + \mathbf{x}) + (w_0 + \mathbf{w}) = (x_0 + w_0) + (\mathbf{x} + \mathbf{w})$

3.4.3 Subtração entre Quaterniões

$x - w = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) - (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)$

$x - w = (x_0 - w_0, x_1 - w_1, x_2 - w_2, x_3 - w_3)$

$x - w = (x_0 - w_0) - (x_1 + w_1)i - (x_2 + w_2)j - (x_3 + w_3)k$

$x - w = (x_0 + \mathbf{x}) - (w_0 + \mathbf{w})$

$x - w = (x_0 - w_0) - (\mathbf{x} + \mathbf{w})$

3.4.4 Multiplicação entre Quaterniões

$x \cdot w = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k) = (x_0 w_0 - x_1 w_1 - x_2 w_2 - x_3 w_3) + (x_0 w_1 + x_1 w_0 + x_2 w_3 - x_3 w_2)i + (x_0 w_2 - x_1 w_3 + x_2 w_0 + x_3 w_1)j + (x_0 w_3 + x_1 w_2 - x_2 w_1 + x_3 w_0)k$

3.4.5 Multiplicação de um Escalar por um Quaternião

A muiltiplicação por um escalar é facilmente introduzida, identificamos $\alpha \in \mathbb{R}$ com o quaternião $\alpha = \alpha_0 + \mathbf{0}$.

$\boxed{\alpha \cdot x = (\alpha + \mathbf{0}) \cdot (x_0 + \mathbf{x})}$

3.4.6 Conjugado de um Quaternião

O conjugado de $x = x_0 + \mathbf{x}$ é definido por:

$\boxed{\overline{x} = x_0 - \mathbf{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k}$

3.4.7 Norma de um Quaternião

Seja $x \in \mathbb{H}$. Defini-se norma (ou valor absoluto) de x, como sendo o número nao negativo,
$\|x\| = \| \ x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \ \| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

3.4.8 Quaternião unitário

Um quaternião $x \in \mathbb{H}$ diz-se unitário se $\|x\| = 1$.

Ao longo deste texto, iremos usar, por simplificação de escrita,

- $\mathbb{H}_1$ para denotar o conjunto dos quaterniões unitários;
- $\mathbb{H}_0$ como o conjunto dos quaterniões não nulos;

3.4.9 Inverso de um quaternião não nulo

Seja $x \in \mathbb{H}_0$. Então existe $x^{-1} \in \mathbb{H}_0$ tal que xx^{-1} $=x^{-1}x = 1$. Além disso, x^{-1} é único e é dado por:

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{\|x\|^2},$$

em que a divisão de um quaternião por um escalar real corresponde à divisão por componente.

3.4.10 Divisão de quaterniões

Sejam $x \in \mathbb{H}$ e $w \in \mathbb{H}_0$. A divisão de x por w define-se como:

- divisão à esquerda:
$$\frac{x}{w} = w^{-1}x;$$
- divisão à direita:
$$\frac{x}{w} = xw^{-1}.$$

3.5 Representação matricial dos quatérnios com matrizes complexas 2×2

A representação de quaterniões como matrizes, em que a adição e a multiplicação de quaterniões correspondam à adição e multiplicação de matrizes (isto é, homomorfismos matrizes-quaterniões), pode ser realizada utilizando matrizes complexas 2×2

Comecemos por relembrar que os números complexos são isomorfos às matrizes reais da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

Qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser escrito como

$$z = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = aE + bI,$$

onde E é a matriz identidade e $I^2 = -E$.

A adição e a multiplicação de números complexos correspondem à adição e multiplicação das matrizes associadas.

Consideremos os complexos $-1 + 2i$ e $4 - i$. O produto destes números complexos pode ser expresso matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -9 & -2 \end{bmatrix},$$

o resultado do produto corresponde ao número complexo $-2 + 9i$.

Consideremos agora um quaternião $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Como $ij = k$, é possível escrever x na forma

$x = z + qj$,

onde $z = x_0 + x_1 i$ e $q = x_2 + x_3 i$. Esta representação é designada por representação complexa de um quaternião.

O produto de w e p é dado por :

$w = w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k = z_1 + q_1 j = (w_0 + w_1 i) + (w_2 + w_3 i)j$ e

$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = z_2 + q_2 j = (p_0 + p_1 i) + (p_2 + p_3 i)j$

e pode ser reescrito, em termos de variáveis complexas, do seguinte modo:

$w \cdot p = (z_1 + q_1 j)(z_2 + q_2 j) = z_1 z_2 + q_1 j q_2 j + q_1 j z_2 + z_1 q_2 j = (z_1 z_2 - q_1 \overline{q_2}) + (z_1 q_2 + q_1 \overline{z_2})$

Esta representação do produto de quaterniões corresponde à multiplicação das matrizes:

$$\begin{bmatrix} z_1 & q_1 \\ -\overline{q_1} & \overline{z_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_2 & q_2 \\ -\overline{q_2} & \overline{z_2} \end{bmatrix}$$

Assim, cada quaternião $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k = z + qj$ pode ser associado com a matriz complexa

$$\begin{bmatrix} z & q \\ -\overline{q} & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 i & x_2 + x_3 i \\ -x_2 + x_3 i & x_0 - x_1 i \end{bmatrix},$$

obtendo-se assim a representação matricial complexa de um quaternião.

Qualquer quaternião pode ainda ser escrito como

$$x = x_0 E + x_1 I + x_2 J + x_3 K$$

onde

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que, tal como seria de esperar,

$$\begin{aligned} I^2 = J^2 = K^2 &= -E, \\ IJ = -JI &= K, \\ JK = -KJ &= I, \\ KI = -IK &= J. \end{aligned}$$

Os quaterniões $x = -1 + 2i + j - k$ e $w = 2 - i + 3j - k$ podem representar-se na forma complexa, respectivamente, como

$$x = (-1 + 2i) + (1 - i)j, w = (2 - i) + (3 - i)j.$$

Por outro lado, as matrizes complexas correspondentes aos quaterniões x e w são, respectivamente:

$$X = \begin{bmatrix} -1 + 2i & 1 - i \\ -1 - i & -1 - 2i \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 2 - i & 3 - i \\ -3 - i & 2 + i \end{bmatrix}$$

O produto

$$X \cdot W = \begin{bmatrix} -1 + 2i & 1 - i \\ -1 - i & -1 - 2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 - i & 3 - i \\ -3 - i & 2 + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 7i & 2 + 6i \\ -2 + 6 & -4 - 7i \end{bmatrix},$$

corresponde ao quaternião $-4 + 7i + (2 + 6i)j = -4 + 7i + 2j + 6k$, ou seja, ao resultado de $x \cdot w$. De $x = z + qj$, conclui-se, de imediato que, se Q é a representação matricial de um quatérnião x, então:

- se $x_2 = x_3 = 0$, isto é, se x é um número complexo, Q é uma matriz diagonal;
- $\|x\|^2 = det(Q)$;
- a representação matricial de $\overline{x}$ é $\overline{Q}^T$;
- se $x \in \mathbb{H}_1$, isto é, se $\|x\| = 1$, então $det(Q) = 1$ e $Q\overline{Q}^T =$ E, isto é. Q é uma matriz unitária.

Capítulo 4

Os Octoniões

Este capítulo tem por objetivo uma apresentação dos octônios como estruturas algébricas, interpretadas como uma extensão não associativa dos quatérnios. Além de uma introdução histórica baseada em [3] e [6]. Posteriormente será apresentada uma construção para os octônios. Além disso, serão definidos suas principais operações e resultados basicos.

Figura 4.1: Figura 8-dimensional

4.1 Resenha Histórica

Muitos matemáticos conhecem a história de como Hamilton descobriu os quaterniões. Em 1835, com 30 anos de idade, ele havia descoberto como tratar números complexos como pares de números reais. Fascinado pela relação entre complexos e a geometria 2-dimensional, ele tentou por muitos anos descobrir uma álgebra maior, que tivesse o mesmo papel em uma geometria 3-dimensional. O problema, claro, era que não existe uma álgebra de divisão normada 3-dimensional. Em outubro de 1843 ele chegou a um resultado importante. Enquanto caminhava com sua esposa em volta do Canal Real, indo para uma reunião na Academia Real Irlandesa, fez sua descoberta histórica.

"Senti o circuito galvânico do meu pensamento se fechar; e a faísca que resultou foram as equações fundamentais entre i,j e k. Exatamente da maneira que eu sempre as

*usei."*Uma razão para que essa história seja tão conhecida é que Hamilton passou o resto de sua vida obscecado pelos quaterniões e suas aplicações na geometria.

Uma escola de "quaternionistas"foi desenvolvida e liderada, após a morte de Hamilton, por Peter Tait de Edinburgh e Benjamin Peirce de Harvard. Tait escreveu 8 livros sobre quaterniões, enfatizando suas aplicações na física. Quando Gibbs desenvolveu uma notação moderna para produto pontual e produto cruzado, Tait condenou isso como uma "monstruosidade hermafrodita". Uma guerra de polêmicas surgiu desde então, tendo os quaterniões como perdedores.

Menos conhecida é a descoberta dos octoniões por um colega de faculdade de Hamilton, John T. Graves. Foi o interesse de Graves em álgebra que fez Hamilton começar a pensar sobre números complexos e sua expansão. No dia seguinte à descoberta dos quaterniões, Hamilton enviou uma carta de 8 páginas descrevendo os quaterniões para Graves. Graves respondeu ainda em outubro para Hamilton, parabenizando-o por sua descoberta e também complementando: *Ainda há algo que me intriga nesse sistema. Eu não tenho ainda uma visão clara da nossa liberdade arbitrária em criar números imaginários.* E então perguntou: *Se com sua alquimia você pode criar 3 kg de ouro, por que não continuar?*

Em dezembro do mesmo ano, Graves escreveu para Hamilton descrevendo uma nova álgebra 8-dimensional, que ele denominou de "octavos". Ele demonstrou que sua nova descoberta era uma álgebra de divisão normada, e usou-a para expressar o produto de duas somas de oito quadrados perfeitos como uma outra soma de oito quadrados perfeitos.

Em janeiro de 1844, Graves escreveu 3 vezes para Hamilton, expandindo sua descoberta. Ele considerou a ideia de uma teoria generalizada, e tentou construir uma álgebra de divisão normada 16-dimensional. Encontrou certas dificuldades e passou a duvidar que isso fosse possível. Hamilton se ofereceu para publicar as descobertas de Graves, mas, estando ocupado com suas pesquisas sobre quaterniões, adiou diversas vezes a publicação. Em julho Hamilton escreveu para Graves, mostrando que os octoniões eram não-associativos: "A.BC=AB.C=ABC, se A,B e C *são quaterniões. Mas não vale para seus octavos.*"De fato, Hamilton criou o termo "associativo "e os octoniões tiveram importante papel em mostrar a importância desse conceito.

Enquanto isso, o jovem Arthur Cayley de Cambridge, vinha pensando nos quaterniões desde que Hamilton anunciou sua existência. Ele parecia procurar relações entre quaterniões e funções hiperelípticas. Em março de 1845, ele publicou um artigo sobre funções hiperelípticas e adicionou no final um breve comentário sobre octoniões. O artigo estava cheio de erros em relação as funções elípticas. No entanto, ele foi o primeiro a publicar algum comentário sobre os octoniões. Graves anexou um breve comentário a um artigo comentando que tinha conhecimento sobre octoniões desde dezembro de 1843. Em junho de 1847, Hamilton escreveu para Academia Real Irlandesa confirmando a história de Graves. Mas era tarde demais: os octoniões ficaram conhecidos como *números de Cayley.*

Uma razão para os octoniões terem, inicialmente, menos destaque que os quaterniões foi a falta de um defensor como Hamilton. Outro motivo foi à falta de uma aplicação clara na geometria e na física. Os quaterniões se encaixam perfeitamente no estudo de rotações e momento angular, particularmente no contexto da mecânica quântica. Hoje em dia, tal fenômeno é conhecido como teoria de Clifford. Apesar disso, muitos dizem que Hamilton exagerou na importância atribuída aos quaterniões.

4.2 Construção dos Octônios

A maneira elementar de se construir um octônião é utilizando sua tabela de multiplicação. Os octoniões são uma álgebra 8-dimensional com base 1, i, j, k, l, li, lj e lk, e sua multiplicação é dada pela seguinte tabela, que descreve o resultado da multiplicação de um elemento na i-ésima linha por outro na j-ésima coluna.

1	i	j	k	l	li	lj	lk
i	-1	k	-j	-li	l	-lk	lj
j	-k	-1	i	-lj	lk	l	-li
k	j	-i	-1	-lk	-lj	li	l
l	li	lj	lk	-1	-i	-j	-k
li	-l	-lk	lj	i	-1	-k	j
lj	lk	l	-li	-j	k	-1	-i
lk	-lj	li	l	k	-j	i	-1

Tabela 4.1: Tabela da multiplicação dos octônios

Onde:

- $1, i, j, k, l, li, lj$ e lk são raízes de -1

Porém, precisamos de uma maneira mais prática para lembrar o produto dos octoniões. Para tanto, apresentamos o Plano Fano.

Plano Fano

Esse é o Plano Fano, um dispositivo com 7 pontos e 7 linhas. As linhas são os lados do triângulo, suas altitudes, e o círculo contendo todos os pontos intermediários dos lados. Cada par de pontos distintos está em uma única linha. Cada linha contêm 3 pontos, e cada tripla possui uma ordem cíclica definida pelas flechas.

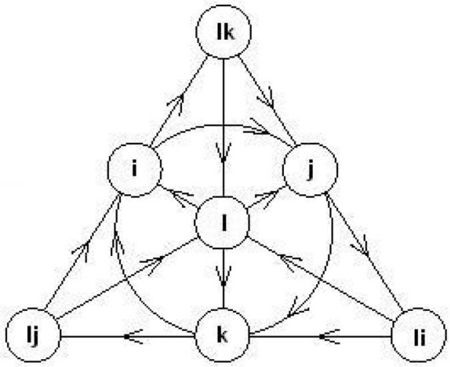

Figura 4.2: Diagrama da multiplicação dos Octônios

4.2.1 Definção:

Definimos o conjunto dos Octônios denotado por $\mathbb{O}$ como:

$\mathbb{O} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)/x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{R}\}$

sendo que, dado $x \in \mathbb{O}$, podemos escrever:

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8$

onde $1, i, j, k, l, li, lj, lk$ são unidades imaginárias

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = (li)^2 = (lj)^2 = (lk)^2 = -1$$

que respeitam a tabela de multiplicação introduzida no tópico anterior [4.2].

4.3 Operações Elementares entre Octônios

Dados $x, y \in \mathbb{O}$, tais que $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4 + ly_5 + liy_6 + ljy_7 + lky_8$ temos:

4.3.1 Igualdade entre Octônios

$x = y \iff (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) \iff x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3, x_4 = y_4, x_5 = y_5, x_6 = y_6, x_7 = y_7, x_8 = y_8$

4.3.2 Adição entre Octônios

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5, x_6 + y_6, x_7 + y_7, x_8 + y_8) = (x_1 + y_1), (x_2 + y_2)i, (x_3 + y_3)j, (x_4 + y_4)k, (x_5 + y_5)l, (x_6 + y_6)li, (x_7 + y_7)lj, (x_8 + y_8)lk$

4.3.3 Multiplicação entre Octônios

$xy = (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7 - x_8y_8; x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_6 + x_6y_5 + x_7y_8 + x_8y_7; x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2 - x_5y_7 + x_6y_8 + x_7y_5 - x_8y_6; x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1 - x_5y_8 - x_6y_7 + x_7y_6 + x_8y_5; x_1y_5 + x_2y_6 + x_3y_7 + x_4y_6 + x_5y_1 - x_6y_2 - x_7y_3 - x_8y_4; x_1y_6 - x_2y_5 - x_3y_8 + x_4y_7 + x_5y_2 + x_6y_1 - x_7y_4 + x_8y_3; x_1y_7 + x_2y_8 - x_3y_5 - x_4y_6 + x_5y_3 + x_6y_4 + x_7y_1 - x_8y_2; x_1y_8 - x_2y_7 + x_3y_6 - x_4y_5 + x_5y_4 - x_6y_3 + x_7y_2 + x_8y_1)$

4.3.4 Conjugado de um Octônio

Seja $x = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8$, um octônio, o seu conjugado, denotado por $\overline{x} = (x_1; -x_2; -x_3; -x_4; -x_5; -x_6; -x_7; -x_8) = x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4 - lx_5 - lix_6 - ljx_7 - lkx_8$.

4.3.5 Norma de um Octônio

Seja $x = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8$, um octônio, a norma $\|x\|$ é um número real, denotado por:
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$

4.3.6 Inverso de um Octônio

Seja $x = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8$, um octônio, o seu inverso é dado por:

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{\|x\|^2}$$

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo será introduzido um breve comentário sobre as áreas aonde os Quatérnios e Octônios são aplicados, e também citada algumas referências de disertações de mestrado onde poderão se encontradas de formas detalhadas com resultados matematicos.

5.1 Comentário sobre as áreas aonde os Quatérnios e os Octônios são aplicados

A aplicação dos quaterniões foi explorada de imediato. Em 1845, Cayley mostrou que os quaterniões podem representar orientações e em 1858 demonstrou que os quaterniões podem ser representados por meio de matrizes. Também o físico e matemático escocês, James Clerk Maxwell (*1831 - †1879) percebeu a utilidade dos quaterniões para o seu trabalho, utilizando-os na sua formulação de ondas eletromagnéticas, em 1864, que mais tarde conduziu ao primeiro telégrafo, desenvolvido em 1895 por Marconi, e que originou posteriormente a rádio e a televisão. Maxwell introduziu-os ainda no seu Tratado de Eletricidade e Magnetismo, em 1885. A aplicação dos quaterniões em campos como a mecânica clássica e a teoria da relatividade foi identificada no início do século XX.

Durante algumas dezenas de anos os quaterniões foram largamente divulgados mas por alguma razão misteriosa, caíram no esquecimento sendo redescobertos ainda há pouco tempo pelo mundo da Engenharia Espacial e da Robótica. A capacidade dos quaterniões em representar rotações a três dimensões à volta de um eixo arbitrário motivou investigadores a empregar a álgebra dos quaterniões nas equações que envolvem a cinemática das rotações. Como resultado, emergiram novas áreas de aplicação que envolvem quaterniões, incluindo vários campos como a robótica, a mecânica orbital, as tecnologias aeroespaciais (e.g. trajetórias dos satélites) e sistemas de navegação inercial.

Em 1985, Ken Shoemake introduziu os quaterniões na Computação Gráfica, com o objetivo de facilitar a animação rotacional e apresentou a sua pesquisa na conferência SIGGRAPH (Special interest group on computer graphics), com o artigo "Animating

Rotation with Quaternion Curves", considerado desde a sua publicação, como uma referência. Shoemake apresentou também as vantagens da utilização dos quaterniões na obtenção de interpolações suaves de rotações e descreveu algoritmos de conversões entre matrizes, ângulos de Euler e quaterniões. Este trabalho deu origem a um interesse crescente pela aplicação dos quaterniões no campo da computação gráfica e na programação de jogos e desde aí a interpolação de orientações tem sido objeto de estudo de diversos trabalhos publicados nesta área.

Os programadores gráficos tomaram consciência do potencial dos quaterniões como operador de rotação poderoso. As recentes APIs gráficas disponibilizam funções para operar com quaterniões. Por exemplo, o API Java-3D tem classes para criar objetos quaterniónicos (javax.vecmath.Quat4d), o Povray (Persistence of Vision Ray Tracer) suporta quaterniões, o Quickdraw-3D fornece rotinas para operações com quaterniões, o MATLAB disponibiliza uma ferramenta para simulação de sistemas aeroespaciais que opera com quaterniões, o Aerospace Blockset, e o Mathematica tem um package Quaternions. Os quaterniões são ainda utilizados em algoritmos de animação computacional, na programação de jogos, na interpolação de keyframes e na simulação do movimento de uma câmara no espaço tridimensional.

A união da Walt Disney Pictures com os estúdios de animação Pixar resultou numa nova era para a animação computacional. Na última década assistiu-se a uma nova forma de criação de filmes de animação, que deu origem a sucessivos sucessos cinematográficos: Toy Story(1995); A Bug's Life(1998); Toy Story 2 (1999); Monsters Inc.(2001); Finding Nemo(2003) e The Incredibles(2004). Na implementação computacional destes filmes, as orientações são expressas por quaterniões. Nos jogos de computadores, cita-se por exemplo, a conhecida personagem Lara Croft, do jogo Tomb Raider, animada com quaterniões. Alguns periféricos de jogos de realidade virtual empregam quaterniões para parametrizar rotações, e.g., o Logitech-3D mouse tem um modo de saída para quaterniões. Assim, na computação gráfica, o domínio de aplicação dos quaterniões expandiu-se rapidamente em campos como a visualização, os fractais e a realidade virtual.

A computação digital tornou-se uma componente essencial da existência humana e influência tudo, desde o entretenimento, às funcionalidades do carro familiar, aos métodos da investigação científica. Os quaterniões são ainda utilizados, como ferramenta matemática e algorítmica, em sistemas de simulação e assistência por computador de operações cirúrgicas. As aplicações aeroespaciais e os simuladores de voos também empregam quaterniões. Astronautas da NASA, bem como diretores cinematográficos de Hollywood, usam os sistemas computacionais para dirigir e controlar as posições de objetos no espaço.

Com os octoniões foi diferente. Sua relevância na geometria ficou obscura até 1925, quando Élie Cartan descreveu a 'trialidade' a simetria entre vetores 'spinors' em espaços Euclidianos de 8 dimensões. Sua relevância na física foi notada em 1934, em um artigo de Jordan, von Neumann e Wigner . No entanto, as tentativas em aplicar a teoria octoniônica à física obteve pouco sucesso até os anos 80, quando descobriram que octoniões explicavam ferramentas interessantes da Teoria das Cordas.

5.2 Referências aonde pode ser encontrados aplicações com cálculos matématicos dos Quatérnios e dos Octônios

5.2.1 Aplicações de Quatérnios em Ciências Geodésicas

Nas seções 2, 3 e 4 baseados em [7] foram apresentadas três formas de se representar as matrizes de rotação. O uso de matrizes de rotação é relevante em uma série de aplicações em que a transformação entre referenciais é realizada. Portanto, reflexos em áreas como a Computação Gráfica, Geodésia, Visão Computacional e Fotogrametria são evidentes.Em áreas como a Fotogrametria, por exemplo, o uso da matriz de rotação na forma dos ângulos de Euler é freqüente. O modelo matemático fundamental da Fotogrametria, as Equações de Colinearidade, utilizam os elementos da matriz de rotação baseados nestes ângulos.Mas detalhes pode ser obtido em [6].

Uma Aplicação de Quatérnios no Controle de Movimentos de 3D-Rotações de um Robô Braço Mecânico Articulado.Podemos encontrar de maneira mais detalhada todo o projeto desenvolvido em [7] e essas rotações tambem são utilizadas na aeronáutica, descreve os movimentos de um avião, na astronomia na localização da atitude, encontrmos de forma mas detalha em [2].

5.2.2 Calculando a dilatação na hiperesfera 8-dimensional

Na seção 2 baseado [5], foi definidos Dilatação de varias maneiras e veremos a seguir alguns calculo de dilatação.

Calculando a dilatação na hiperesfera 8-dimensional causada pela transformação quaseconforme $f(z) = z^2$, onde $z \in \mathbb{O}$, ver o calculo desenvolvido de forma detalhada em[5].

Calculando a dilatação na hiperesfera 8-dimensional causada pela transformação quaseconforme $f(z) = z^3$, onde $z \in \mathbb{O}$, ver o calculo desenvolvido de forma detalhada em[5].

Considerações Finais

O presente trabalho de conclusão de curso, nos possibilitou conhecer os Quatérnios e os Octônios, uma álgebra de 4 e 8 dimensões respectivamente, que tiveram seu desenvolvimento gradualmente a partir dos trabalhos de Gauss e Euler sobre os Números Complexos, onde Hamilton desenvolveu primeiramente os quatérnios e posteriormente Cayley descobriu os octônios.

Observamos ao longo desse seu processo histórico que os quatérnios tiveram sua aplicações exploradas de imediato, sendo assim divulgado largamente por décadas e por razão mistériosa cairam no esquecimento sendo redescoberto há pouco tempo pelo mundo da engenharia espacial e da robótica devido a capacidade dos quatérnios desenvolverem 3D rotações, já com os octônios foi diferente, os mesmos são promissores na física, para avanço na teoria das cordas.

Hoje a partir do desenvolvimento deste trabalho, podemos ver que o universo de aplicações dos quatérnios e dos octônios tiveram grande avanços principalmente no uso de sistemas computacionais, podendo assim os mesmos serem aplicados em várias áreas.

Portanto, diante de tudo que foi desenvolvido sobre os quatérnios e os octônios, podemos dizer que os mesmo possuem grandes utilidades para diversos tipos de aplicações principalmente no cálculo em rotações, animações gráficas, sistemas computacionais, a física "teoria das cordas"e a mecânica quântica, sendo as duas útimas relacionadas aos octônios.

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI,Gelson.Fundamentos de Matemática Elementar.Vol.06, São Paulo, 2008.

[2] PINHEIRO,Maria Lúcia Gonçalves.Quaterniões:Cáculo Numérico e Simbólico, UMinho,2006.

[3] PENDENZA, C. Álgebras não associativas octoniônicas e relações extensivas do tipo "de moivre". Master's thesis, 2006.

[4] RUEL V., R. Variáveis Complexas e Suas Aplicações. Cambridge University Press,1975.

[5] BENZATTI, Luiz Fernando Landucci.Analiticidade e efeito gráfico da dilataçãoo em funções octoniônicas quaseconformes do tipo $f(z) = z^n$.São José do Rio Preto, 23 de outubro de 2008,12-18.

[6] GALO, Maurício, Tozzi, Clésio L.A representação de matrizes de rotação e o uso de Quatérnios em ciências Geodésicas.UNESP.

[7] MARÃO,José Antônio Pires Ferreira.Hipercomplexos: Um estudo da Analiticidade e da Hiperperiodicidade de Funções Octoniônicas.São José do Rio Preto, Março de 2007.

[8] HAETINGER,Claus e MALHEIROS,Marcelo.GCETE-Bertioga, Santos, 13 a 16 de Março de 2005.