



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DARLAN DE SOUSA SILVA
PAULO AFONSO PANTOJA BORGES

Análise do Modelo Matemático da Transmissão da Doença de Chagas na População Humana

Macapá-AP
2012

DARLAN DE SOUSA SILVA
PAULO AFONSO PANTOJA BORGES

Análise do Modelo Matemático da Transmissão da Doença de Chagas na População Humana

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
colegiado de Matemática da Universidade Fe-
deral do Amapá, como parte das exigências
para a obtenção do título de Licenciatura em
Matemática, sob a orientação do Prof^o. Dr.
GUZMÁN EULÁLIO ISLA CHAMILCO.

Macapá-AP
2012

DARLAN DE SOUSA SILVA
PAULO AFONSO PANTOJA BORGES

Análise do Modelo Matemático da Transmissão da Doença de Chagas na População Humana

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado pela comissão avaliadora do Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá. Composta pelos integrantes abaixo-relacionados:

AVALIADORES:

Prof^o.Dr. Guzman Eulálio Islá Chamilco
Universidade Federal do Amapá

Prof^o.Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Universidade Federal do Amapá

Prof^o.Dr. Erasmo Senger
Universidade Federal do Amapá

Avaliado em: ____/____/____

Macapá-AP
2012

A Deus

Aos meus pais pelo apoio para cursar uma
faculdade

Aos amigos por todos os momentos de ale-
gria que passamos

Aos professores do colegiado de matemática
da Unifap que contribuíram para minha
formação e em especial ao professor orienta-
dor Guzman Eulálio Islá Chamilco pela base
na construção do trabalho

A Deus pela vida.

Aos meus familiares, colegas e amigos pela
força que me deram.

Aos professores pelos conselhos sábios.

E à minha futura esposa Selma Lucas de Al-
faia.

“Para realizar grandes conquistas, devemos não apenas agir, mas também sonhar; não apenas planejar, mas também acreditar. ”

(Anatole France)

Resumo

Neste trabalho é apresentado a análise do modelo Matemático da transmissão da doença de Chagas na população humana, essa doença é transmitida por um inseto relativamente grande denominado vulgarmente como "barbeiro", e o principal meio de transmissão é a vetorial (picada do inseto), existe ainda a transmissão horizontal (transfusão de sangue) a vertical (passa da mãe para o filho na hora do parto) entre outros meios.

Os modelos epidemiológicos em estudo são: Modelo Determinístico do tipo $S \rightarrow I \rightarrow S$ com Mistura Proporcional e Transmissão Vetorial e Modelo SIS com Mistura Proporcional e Ausência de Transmissão Vetorial, o primeiro, a transmissão ocorre com a presença do vetor transmissor (o barbeiro) com uma taxa $v \neq 0$, com isso a população sofre determinada variação e uma certa estabilidade local tudo isso dependendo dos parâmetros que os modelos nos oferece; e o segundo ocorre com a ausência do barbeiro, e de forma análoga ao modelo anterior sendo que a taxa agora é $v = 0$. A análise dará ênfase a estabilidade dos modelos.

Palavras-chave. Doenças de Chagas, modelo matemático.

Resumen

Este trabajo presenta un análisis del modelo matemático de la transmisión de la enfermedad de Chagas en humanos, esta enfermedad se transmite por un insecto comúnmente llamado "Barbero" y la forma de transmisión es la forma del vector (do insecto), forma la transmisión horizontal (transfusión de sangre) la forma vertical (de madre para el hijo durante el parto), entre otros médios.

Los modelos epidemiológicos estudiados son: Modelo determinístico del tipo $S \rightarrow I \rightarrow S$ con interacción proporcional y transmisión vectorial y el modelo $S \rightarrow I \rightarrow S$ con interacción proporcional y ausencia de transmisión vectorial, o primer modelo temo, a transmisión vectorial con una tasa $v \neq 0$, con esta a población sufre una determinada variación e una cierta estabilidad local, todo dependiendo de las parámetros que los modelos que ofrecemos, y el segundo ocurre con ausencia del barbero y forma analoga al modelo anterior, en este caso a tasa $v = 0$. Nuestra análise dara a la estabilidad del modelo.

Palabras clave. La enfermedad de Chagas, un modelo matemático.

Índice

Resumo	vi
Resumen	vii
1 Introdução	12
1.1 Considerações Iniciais	12
1.2 Doença de Chagas	13
1.3 Vetores	14
1.4 Ciclo de Transmissão	14
1.5 Medidas de Controle	15
2 Definições Prévias	16
2.1 Função	16
2.2 Função Contínua	16
2.3 Derivada	17
2.4 Integral	17
2.5 Equações Diferenciais Ordinárias	18
2.6 Ponto de Equilíbrio	20
2.7 Teorema do Valor Intermediário	21
2.8 Teorema do Valor Médio	21
2.9 Série de Taylor	22
3 Modelo SIS com Mistura Proporcional e Transmissão Vetorial	23
3.1 Introdução ao Modelo	23
3.2 Análise da Variação da População	26
3.3 Pontos de Equilíbrio e Análise de Estabilidade	30
3.4 Resultados Epidemiológicos em Relação aos Parâmetros	39
4 Modelo SIS com Mistura Proporcional e Ausência de Transmissão Vetorial	46
4.1 Introdução ao modelo	46
4.2 Pontos de Equilíbrio e Análise de Estabilidade	48

4.3 Resultados Epidemiológicos em Relação aos Parâmetros	52
Considerações Finais	xvi
Referências Bibliográficas	xvii

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A modelagem matemática de doenças infecciosas está diretamente ligada às suposições que podem nos ajudar a "prever" sua dinâmica na população, a fim de descrever sua estrutura, e com isso buscar com eficiência sua prevenção e/ou erradicação.

Os modelos epidemiológicos consistem no mecanismo de interação entre as classes de indivíduos na qual a população está dividida, através de hipóteses, que por sua vez são classificadas obedecendo às características de cada doença.

Na literatura específica é descrito duas maneiras para se transmitir diretamente uma infecção: A transmissão horizontal e a transmissão vertical. Contudo, em epidemiologia matemática os modelos propostos procuram fornecer informações sobre dois parâmetros de suma importância: A *força de infecção* e a *razão de reprodutividade basal*.

O modelo matemático que será apresentado está baseado no modelo de **Dilberto da Silva Almeida Júnior** [1], em que o mesmo será analisado e interpretado, analiticamente, no que diz respeito a seus parâmetros, com o intuito de chegar às devidas conclusões sobre a Doença de Chagas.

A **força de infecção** é a incidência (número de casos novos por unidade de tempo) *per capita* de uma doença, ou taxa de ataque, dividida pelo número de indivíduos suscetíveis na população. Esta depende somente do número de indivíduos infectantes - e não do número de indivíduos suscetíveis. Em situações de equilíbrio, como se sabe, podem-se obter a incidência e/ou a força de infecção, pois ambas as variáveis estão relacionadas. Em se tratando de epidemiologia matemática, a força de infecção é de suma importância, pois ela pode ser estimada, a partir de dados observados no campo. Uma vez obtido este valor, pode-se determinar a incidência matematicamente, ou seja, fazendo o produto da força de infecção pelo número de indivíduos suscetíveis, este último obtido da resolução de equações do modelo.

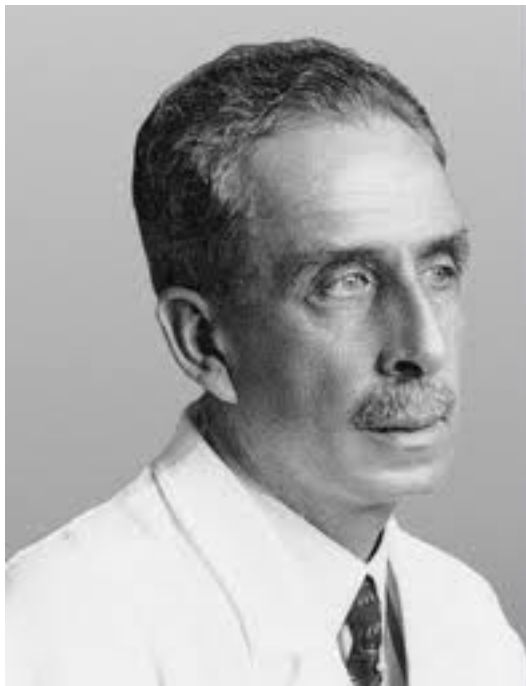
A **razão de reprodutividade basal** designado por R_0 , e que é definida, no caso de

doenças infecciosas, como sendo o número de casos secundários em que um caso primário é capaz de produzir em uma população totalmente suscetível.

O modelo matemático que será apresentado está baseado no modelo de **Dilberto da Silva Almeida Júnior** [1], em que o mesmo será analisado e interpretado, analiticamente, no que diz respeito a seus parâmetros, com o intuito de chegar as devidas conclusões sobre transmissão da Doença de Chagas.

1.2 Doença de Chagas

A Doença de Chagas foi descoberta em abril de 1909, no interior de Minas Gerais. Carlos Chagas (1878-1934)[4], pesquisador do Instituto Oswaldo Cruz (IOC), comunicou ao mundo científico a descoberta de uma nova doença humana causada por um parasito do gênero *Trypanosoma* e transmitida principalmente através do "barbeiro", conhecido também por: chupança, chupão, fincão, bicudo, procotó. Os sinais iniciais da doença



Carlos Ribeiro Justiniano das Chagas[4]

se produzem no próprio local, onde se deu a contaminação pelas fezes do inseto. Estes sinais, surgem mais ou menos de 4 a 6 dias, após o contato do "barbeiro" com a sua vítima. Os sintomas variam de acordo com a fase da doença, que pode ser classificada em aguda e crônica. Fase aguda: Febre, mal estar, falta de apetite, edemas localizados na pálpebra (sinal de Romanã) ou em outras partes do corpo (chagoma de inoculação), enftartamento de gânglios, aumento do baço e do fígado e distúrbios cardíacos. Em crianças, o quadro pode se agravar e levar à morte. Frequentemente, nesta fase, não há qualquer manifestação clínica da doença, podendo passar despercebida. Fase crônica: Nesta

fase, muitos pacientes podem passar um longo período, ou mesmo toda a sua vida, sem apresentar nenhuma manifestação da doença, embora sejam portadores do *T. cruzi*. Em outros casos, a doença prossegue ativamente, passada a fase inicial, podendo comprometer muitos setores do organismo, salientando-se o coração e o aparelho digestivo.

1.3 Vetores

O "barbeiro" é um inseto artrópode da classe Insecta, ordem Hemiptera, família Reduviidae e subfamília Triatominae que se alimenta exclusivamente de vertebrados homeotérmicos, sendo chamados hematófagos. A principal espécie propagadora da Doença de Chagas foi o *Triatoma infestans* e teve maior ocorrência no estado de São Paulo, hoje eliminado do nosso meio.

Persistem ainda as espécies de menor importância como *Panstrongylus megistus* e o *Tri-*



barbeiro[4]

atoma sordida amplamente distribuídos. Geralmente, abrigam-se em local muito próximo à fonte de alimento e podem ser encontrados na mata, escondidos em ninhos de pássaros, toca de animais, casca de tronco de árvore, montes de lenha e embaixo de pedras. Vivem em média entre um a dois anos, com evolução de ovo, ninfa e adulto. Apresentam grande capacidade de reprodução e, dependendo da espécie, intensa resistência ao jejum.

1.4 Ciclo de Transmissão

A **transmissão vetorial** acontece pelo contato do homem suscetível com as excretas contaminadas do vetor. A ocorrência da transmissão parece estar associada à densidade vetorial e à resistência do hospedeiro, o que poderia explicar o aparecimento de aproximadamente 1/3 de indivíduos residentes em áreas de alta infestação permanecerem soro-negativos.

A **transmissão horizontal ou transfusional**, se dá pela transfusão de sangue, depende de vários fatores, como a presença de parasitemia no momento da doação, volume

de sangue transfundido, estado imunológico do receptor, prevalência da infecção pelo *Trypanosoma cruzi* entre os candidatos a doadores de sangue e da qualidade do sangue transfundido. Com exceção do plasma liofilizado e derivados sangüíneos expostos a procedimentos físico-químicos de esterilização (albumina, gama-globulina), todos os componentes sangüíneos são infectantes. O *Trypanosoma cruzi* permanece viável a 4°C por 18 dias e até 250 dias, se mantido à temperatura ambiente.

A **transmissão vertical** é a transplacentária e pode ocorrer em qualquer fase da doença materna: aguda, indeterminada ou crônica. A transmissão também pode se dar em qualquer época da gestação, sendo mais provável no último trimestre, ou ocorrer na passagem no canal do parto, pelo contato das mucosas do feto com o sangue da mãe infectada, fechando o ciclo de transmissão da doença.

1.5 Medidas de Controle

Como principais medidas de controle são (inquéritos sorológicos, entomológicos e desinsetização), as atividades de educação em saúde, devem estar inseridas em todas as ações de controle, bem como, as medidas a serem tomadas pela população local, tais como:

- Melhorar habitação, através de reboco e tamponamento de rachaduras e frestas;
- Usar telas em portas e janelas;
- Impedir a permanência de animais, como cão, o gato, macaco e outros no interior da casa;
- Evitar montes de lenhas, telhas ou outros entulhos no interior e arredores da casa;
- Construir galinheiro, paiol, tulha, chiqueiro, depósito afastado das casas e mantê-los limpos;
- Retirar ninhos de pássaros dos beirais das casas;
- Manter limpeza periódica nas casas e em seus arredores;
- Difundir junto aos amigos, parentes, vizinhos, os conhecimentos básicos sobre a doença, vetor e sobre as medidas preventivas;
- Encaminhar os insetos suspeitos de serem "barbeiros", para o serviço de saúde mais próximo.

No capítulo 2, descrevemos as definições prévias das teorias matemáticas a ser utilizadas no desenvolvimento do trabalho. No capítulo 3 fazemos a análise do modelo determinístico do tipo $S \rightarrow I \rightarrow S$ com mistura proporcional e transmissão vetorial. No capítulo 4 estudamos o modelo do tipo $S \rightarrow I \rightarrow S$ com mistura proporcional e ausência de transmissão vetorial. Finalmente temos as considerações finais do trabalho.

Capítulo 2

Definições Prévias

2.1 Função

Definição 2.1.1 *Uma função $f : A \rightarrow B$ consta de três partes: Um conjunto A , chamado o domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B , chamado o contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem definido, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).*

Usa-se a notação $x \rightarrow f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

2.2 Função Contínua

Definição 2.2.1 *Uma função $f : X \rightarrow R$ diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a .*

Em termos precisos, diremos que $f : X \rightarrow R$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

2.3 Derivada

Definição 2.3.1 *Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_0 , então a derivada de f em x_0 , denotada por $f'(x_0)$, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir. Δx representa uma pequena variação em x , próximo de x_0 , ou seja, tomando $x = x_0 + \Delta x$ ($\Delta x = x - x_0$), a derivada de f em x_0 pode também se expressa por

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Notações: $f'(x_0)$, $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx} x_0$.

2.4 Integral

Primitiva

Definição 2.4.1 *Se uma função F tiver derivada $f(F' = f)$, diz-se que F é uma primitiva de f , então toda função da forma $F + c$ também é primitiva de f , pois $(F + c)' = F' + c' = F' + 0 = f$.*

Integral Indefinida

Definição 2.4.2 *Seja f uma função contínua definida em um intervalo generalizado. Se f admitir uma primitiva F , tal que $F + c$ denota todas as primitivas de f , então esta expressão é conhecida como integral indefinida de f e é denotado por*

$$\int f(t) dt$$

Isto é,

$$\int f(t) dt = F(t) + c$$

2.5 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma Equação Diferencial Ordinária(EDO) é uma equação da forma:

$$f(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

onde:

i - t é variável independente; $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$, aberto.

ii - y é uma função real; y continua de classe $C^{(n)}(I)$.

iii - n é a n -ésima derivada de y .

Neste caso, (2.1) é uma Equação Diferencial Ordinária de ordem n .

Se (2.1) é da forma:

$$p_n(t)y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_2(t)y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = q(t) \quad (2.2)$$

Podemos afirmar que a EDO é linear, pois as funções p_i com $i = 0, 1, \dots, n$, depende de t e são contínuas, além disso é não Homogênea se $q(t) \neq 0$. Se $q(t) = 0$; (2.2) é uma EDO Homogênea.

Definição 2.5.1 *Equações diferenciais da forma*

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, g(y) \neq 0, \quad (2.3)$$

onde $y' = \frac{dy}{dx}$ denota a derivada da função y em relação a variável independente x , são chamadas de **Equações Separáveis**. Faz-se a hipótese que f e g sejam funções contínuas em intervalos abertos $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$. A equação (2.3) pode ser escrita na forma:

$$g(y)y' = f(x) \quad (2.4)$$

Definição 2.5.2 *Uma (EDO) à qual é possível dar a forma*

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \quad (2.5)$$

em que $p; q$ são funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ diz-se **uma equação linear de primeira ordem**. Se q é a função nula então (2.5) é uma equação de variáveis separáveis. Admitimos que q não é a função nula. Para encontrar a solução geral de uma equação linear de primeira ordem, consideremos uma função $v : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $v(t)$.

Multipliquemos a equação (2.5) pela função v .

$$\Rightarrow v(t) \frac{dy}{dt} + v(t)p(t)y = v(t)q(t)$$

vamos supor que

$$\frac{d}{dt}(v(t)y) = v(t) \frac{dy}{dt} + v(t)p(t)y(t) \quad (2.6)$$

então temos $\frac{d}{dt}(v(t)y) = v(t)q(t)$, integrando temos

$$\begin{aligned} v(t)y &= \int v(t)q(t)dt + c \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{v(t)} \left[\int v(t)q(t)dt + c \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Solução geral de (2.5)

Vamos identificar a função v definida por $v(t)$.

De (2.6) segue:

$$y(t) \frac{d}{dt}v(t) + v(t) \frac{dy}{dt} = v(t) \frac{dy}{dt} + v(t)p(t)y(t)$$

com $y(t) \neq 0$, segue: $\frac{d}{dt}v(t) = v(t)p(t)$, uma EDO de variável separável, logo segue:

$$v(t) = e^{\int P(t)dt} \quad (2.8)$$

Finalmente segue a solução geral de (2.5). Usando a equação (2.8)

$$y = e^{-\int P(t)dt} \left[\int e^{\int P(t)dt} q(t)dt + c \right]$$

Definição 2.5.3 A função $v(t)$ é chamada fator integrante de (2.1)

2.6 Ponto de Equilíbrio

Definição 2.6.1 Um ponto y_0 diz-se um ponto de equilíbrio da equação diferencial autónoma $y_0 = f(y)$ se e só se $f(y_0) = 0$. Para os sistemas diferenciais autónomos os pontos de equilíbrio definem as soluções constantes.

Classificação dos pontos de equilíbrio para uma equação diferencial de primeira ordem autónoma. É usual classificar os pontos de equilíbrio. Assim,

1. Dizemos que o ponto de equilíbrio $y = y_0$ é um poço se toda a solução com condição inicial suficientemente próximo de y_0 tende para y_0 quando $f \rightarrow +\infty$. A um poço está associada uma solução de equilíbrio estável.
2. Dizemos que o ponto de equilíbrio $y = y_0$ é uma fonte se toda a solução com condição inicial suficientemente próximo de y_0 tende para y_0 quando $f \rightarrow -\infty$. A uma fonte está associada uma solução de equilíbrio instável.
3. Todo o ponto de equilíbrio $y = y_0$ que não é poço e que não é fonte designa-se por ponto de sela.

Definição 2.6.2 Se \bar{x} é um zero de f , isto é, $f(\bar{x}) = 0$, então $x(t) \equiv \bar{x}$ é chamado de solução de equilíbrio ou estacionário e o ponto \bar{x} é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade

Seja $F : \Omega = \Omega^0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 e considere

$$\dot{y} = F(y) \tag{2.9}$$

Definição 2.6.3 Um ponto $y_0 \in \Omega$ é um ponto de equilíbrio de (2.9) se a função constante $\emptyset(t) = y_0, t \in \mathbb{R}$ é solução dessa equação.

Proposição 2.6.1 $y_0 \in \Omega$ é um ponto de equilíbrio de (2.9) se e somente se $F(y_0) = 0$.

Proposição 2.6.2 Dado $y \in \Omega$ denotaremos por $\emptyset(t, y), t \in I_y$, a solução maximal de (2.9) em que $t_0 = 0$ passa pelo ponto y . Assim, I_y denota o intervalo maximal dessa solução.

Definição 2.6.4 Um ponto de equilíbrio $y_0 \in \Omega$ de (2.9) é estável segundo Liapunov se:

- i) existe $\delta_0 > 0$ tal que se $y \in \Omega$ e $\|y - y_0\| < \delta_0$ então $[0, \infty[\subset I_y$
- ii) para cada $\xi > 0$, existe $\delta > 0$ ($\delta < \delta_0$) tal que se $y \in \Omega$ e $\|y - y_0\| < \delta$ então $\|\emptyset(t, y) - \emptyset(t, y_0)\| < \xi, \forall t \in [0, \infty[.$

Caso contrário, dizemos que y_0 é instável segundo Liapunov.

Definição 2.6.5 Um ponto de equilíbrio $y_0 \in \Omega$ de (2.9) é dito atrator se existe $\delta_1 > 0$ tal que se $y \in \Omega$ e $\|y - y_0\| < \delta_1$ então

- i) $[0, \infty[\subset I_y,$
- ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \emptyset(t, y) = y_0.$

Definição 2.6.6 Um ponto de equilíbrio $y_0 \in \Omega$ de (2.9) é assintoticamente estável segundo Liapunov se for estável segundo Liapunov e atrator.

2.7 Teorema do Valor Intermediário

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função contínua e se d for um número real entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe um número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.

2.8 Teorema do Valor Médio

Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Se f for diferenciável no intervalo aberto (a, b) , então existe $t \in (a, b)$ tal que

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Prova: A idéia recai no teorema de Rôlle[6](pg.182-183). Daí tome a função g que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e, em seguida, vamos tomar a função diferença $f - g$.

A reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ tem a equação

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Explicitando y , obtemos a função $g(x) = y$, dada por

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

que é uma função diferenciável e, por isto, contínua. Conseqüentemente, a função diferença $f - g$ satisfaz as mesmas condições que f ; isto é, $f - g$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Por outro lado, $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$, seguindo-se que $(f - g)(a) = f(a) - g(a) = 0$ e que $(f - g)(b) = 0$; isto é, $(f - g)(a) = (f - g)(b)$.

Vemos assim que $f - g$ está nas condições do teorema de Rôlle. Logo existe $t \in (a, b)$ tal que $(f - g)'(t) = 0$, o que significa que $f'(t) = g'(t)$. Como

$$g'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

é uma função constante, logo

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2.9 Série de Taylor

Dada uma função indefinidamente diferenciável num certo ponto a interior ao seu domínio (isto é, existe e é finita a derivada de qualquer ordem de f em $x = a$, $f^{(n)}(a)$), podemos sempre escrever a sua série de Taylor relativa a a :

$$f(x) = f(a)(x - a)^0 + \frac{f'(a)(x - a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(a)(x - a)^n}{n!}$$

Capítulo 3

Modelo SIS com Mistura

Proporcional e Transmissão Vetorial

O modelo matemático apresentado a seguir é baseado na dissertação de mestrado de **Dilberto da Silva Almeida Júnior** [1], e é do tipo $S \rightarrow I \rightarrow S$, com dinâmica vital, foi considerado as distintas taxas de natalidade e mortalidade para a classe dos indivíduos suscetíveis S e indivíduos infectados I , na qual a população total está dividida, assim $P(t) = S(t) + I(t)$. Sendo que no modelo será considerado as transmissões vertical e horizontal. Neste caso, não houve distinção dos vetores que estão contaminados, dos que não estão contaminados, não foi levada em consideração a estrutura da idade em relação a forma crônica e clínica da doença. Da mesma forma, não foi considerado o devido período de maturação para os recém-nascidos infectados. Foi considerado a **força de infecção**, dada pelo termo **mistura proporcional**.

3.1 Introdução ao Modelo

Como o Modelo em estudo é SIS com presença de transmissão vetorial foi considerado uma taxa v de infecção pela qual os indivíduos suscetíveis estão expostos a contraírem a doença, daí, foi suposto que a infecção de indivíduos suscetíveis entre em contato com em média C outros indivíduos, com isso o número médio por unidade de tempo t de suscetíveis na população total é CS , logo foi usado a proporção de indivíduos infectados

$$\frac{I}{S+I}$$

Usou-se ainda uma proporção ρ de contatos entre S e I , havendo transmissão da doença, então a razão de suscetíveis se tornarem infectados é:

$$\rho CS \frac{I}{S+I} = k \frac{SI}{S+I}$$

onde $k = \rho C$

Em que k é a razão de contatos dos suscetíveis e $\frac{I}{S+I}$ é a proporção total de contatos via transfusão de sangue contaminado de cada suscetível que ocorre com os indivíduos infectados.

Além disso, iremos adotar alguns parâmetros úteis para o estudo do modelo

b = taxa de natalidade na população dos suscetíveis

b' = taxa de natalidade na população dos infectados

r = taxa de mortalidade na população dos suscetíveis

r' = taxa de mortalidade na população dos infectados

c = taxa de remoção

Foi considerado a equação

$$p + q = 1 \tag{3.1}$$

onde q é a probabilidade de transmissão vertical e p a probabilidade de não transmissão vertical.

Com base nas condições propostas, nos parâmetros acima mencionados e na equação (3.1) foram estabelecidas as seguintes equações:

$$\frac{dS}{dt} = (b - r - v)S + (b'p + c)I - k \frac{SI}{S+I} \tag{3.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = (b'q - r' - c)I + vS + k \frac{SI}{S+I} \tag{3.3}$$

Daí, basta lembrar que a população total de indivíduos, e formada pelos suscetíveis e infectados, ou seja, $P(t) = S(t) + I(t)$, derivando essa equação em relação a t obtemos:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} \quad (3.4)$$

por outro lado, $\frac{dS}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$ é conhecido, logo obtem-se $\frac{dP}{dt}$ fazendo as seguintes substituições pelas equações (3.2) e (3.3), segue-se então o resultado:

$$\frac{dP}{dt} = (b - r - v)S + (b'p + c)I - k\frac{SI}{S + I} + (b'q - r' - c)I + vS + k\frac{SI}{S + I}$$

Fazendo as devidas simplificações obtem-se

$$\frac{dP}{dt} = (b - r - v)S + (b'p + c)I + (b'q - r' - c)I + vS$$

Colocando S e I em evidência, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= (b - r - v + v)S + (b'p + c + b'q - r' - c)I \Rightarrow \\ \frac{dP}{dt} &= (b - r)S + (b' - r')I \end{aligned} \quad (3.5)$$

Substituindo $S = P - I$ resulta:

$$\frac{dP}{dt} = (b - r)P + (r - b + b' - r')I \quad (3.6)$$

Das equações (3.5) e (3.6) pode-se encontrar condições para que $P(t)$ seja estacionária, crescente ou decrescente com o tempo. Como a taxa natalidade dos infectados é menor do que a taxa de natalidade dos suscetíveis e a taxa de mortalidade dos infectados é maior do que a taxa de mortalidade dos suscetíveis, então $(b - b') + (r' - r) > 0$.

3.2 Análise da Variação da População

Para efeitos epidemiológicos, foi introduzido o modelo com dinâmica na população hospedeira, ou seja, fazendo um estudo com a população estacionária (não muda com o tempo) e o caso em que a população varia com o tempo, esses dois casos vão ser analisados com presença de transmissão vetorial. Primeiramente vamos analisar o caso em que a população é estacionária, ou seja, $\frac{dP}{dt} = 0$, resulta da equação (3.5).

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= (b - r)S + (b' - r')I \\ \Rightarrow (b - r)S + (b' - r')I &= 0 \\ \Rightarrow (b - r)S &= (r' - b')I\end{aligned}$$

com isso temos:

$$S = \frac{(r' - b')I}{(b - r)} \quad (3.7)$$

Agora, observe que se $\frac{r' - b'}{b - r} > 0$, se e somente se a taxa de mortalidade é maior que a taxa de natalidade dos indivíduos infectados e é claro a taxa de natalidade maior que a taxa de mortalidade dos indivíduos suscetíveis, com isso a equação (3.7) fornece condições para que P não mude com o tempo, considerando essa equação e a equação (3.3) obtemos uma equação em termos de I . Substituindo a equação (3.7) em (3.3) obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= (b'q - r' - c)I + v \frac{(r' - b')}{(b - r)} I + k \frac{\frac{(r' - b')}{(b - r)} II}{\frac{(r' - b')}{(b - r)} I + I} \\ \Rightarrow \frac{dI}{dt} &= (b'q - r' - c)I + v \frac{(r' - b')}{(b - r)} I + k \frac{\frac{(r' - b')}{(b - r)} II}{\frac{(b - r + r' - b')}{(b - r)} I} \\ \Rightarrow \frac{dI}{dt} &= (b'q - r' - c)I + v \frac{(r' - b')}{(b - r)} I + k \frac{(r' - b')}{(b - r + r' - b')} I\end{aligned}$$

colocando I em evidência:

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = (b'q - r' - c + v \frac{(r' - b')}{(b - r)} + k \frac{(r' - b')}{(b - r + r' - b')})I \quad (3.8)$$

Observe, para que a população se torne estacionária é necessário considerar $\frac{dI}{dt} = 0$, resulta então:

$$\begin{aligned} (b'q - r' - c + v \frac{(r' - b')}{(b - r)} + k \frac{(r' - b')}{(b - r + r' - b')})I &= 0 \\ \Rightarrow b'q - r' - c + v \frac{r' - b'}{b - r} + k \frac{r' - b'}{b - r + r' - b'} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

A partir desses resultados, foi estabelecido uma equação numa proporção endêmica, para isso, tome $\frac{dP}{dt} = 0$ na equação (3.6), resulta:

$$(b - r)P + (r - b + b' - r')I = 0$$

$$\Rightarrow (b - r)P = (b - r + r' - b')I$$

portanto obtem-se:

$$\frac{I}{P} = \frac{b - r}{b - r + r' - b'} \quad (3.10)$$

Tendo em vista os resultados obtidos quando $\frac{r' - b'}{b - r} > 0$, por outro lado, se essa condição não for satisfeita, só será possível obter a solução trivial para que P seja estacionária.

A partir das análises feitas de acordo com a variabilidade da população e as interpretações epidemiológicas pode-se estabelecer o seguinte resultado:

- $S = \frac{r' - b'}{b - r}I$
- $\frac{I}{P} = \frac{b - r}{b - r + r' - b'}$

Agora será analisado o caso em que a população varia com o tempo, para isso será introduzido as seguintes considerações: $x = \frac{S}{P}$, $y = \frac{I}{P}$ e $\alpha = (b - r) - (b' - r')$

Onde x é a proporção dos indivíduos suscetíveis e y a proporção dos infectados:

$$x = \frac{S}{P} < 1 \text{ e } y = \frac{I}{P} < 1$$

A partir dessas considerações e visto que a análise se dá em um tamanho variável é aconselhável assumirmos as proporções em cada classe compartimental na população hospedeira, pois será possível avaliar o crescimento total com a variação dos infectados. Isso será introduzido no modelo, usando as equações (3.2) e (3.6) e a proporção x e y .

Da consideração $x = \frac{S}{P}$, resulta que:

$$S = x.P$$

Derivando toda equação em relação a t , tem-se:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(x.P) \Rightarrow \frac{dS}{dt} = x \frac{dP}{dt} + P \frac{dx}{dt}$$

Agora substituindo $\frac{dS}{dt}$ e $\frac{dP}{dt}$ pelas equações (3.2) e (3.6) respectivamente, resulta então:

$$(b - r - v)S + (b'p + c)I - k \frac{SI}{S + I} = (b - r)xP + (r - b + b' - r')xI + P \frac{dx}{dt}$$

substituindo $S + I$ por P :

$$(b - r - v)S + (b'p + c)I - k \frac{SI}{P} = (b - r)xP + (r - b + b' - r')xI + P \frac{dx}{dt}$$

dividindo por P :

$$(b - r - v) \frac{S}{P} + (b'p + c) \frac{I}{P} - k \frac{S}{P} \frac{I}{P} = (b - r)x + (r - b + b' - r')x \frac{I}{P} + \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow (b - r - v)x + (b'p + c)y - kxy = (b - r)x + (r - b + b' - r')xy + \frac{dx}{dt}$$

fazendo as devidas simplificações obtemos:

$$\frac{dx}{dt} = -vx + (b'p + c)y - (k - \alpha)xy \quad (3.11)$$

Agora considerando $y = \frac{I}{P}$, resulta:

$$I = y.P$$

Derivando toda equação em relação a t, resulta:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(y.P) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = y\frac{dP}{dt} + P\frac{dy}{dt}$$

Agora substituindo $\frac{dI}{dt}$ e $\frac{dP}{dt}$ pelas equações (3.3) e (3.5) respectivamente, resulta então:

$$(b'q - r' - c)I + vS + k\frac{SI}{S+I} = (b-r)yS + (b' - r')yI + P\frac{dy}{dt}$$

Usando o fato de que $P = S + I$ e fazendo algumas substituições obtemos:

$$(b'q - r' - c)I + vS + k\frac{SI}{P} = (b-r)yS + (b' - r')(P - S)y + P\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow (b'q - r' - c)I + vS + k\frac{SI}{P} = (b-r)yS + (b' - r')yP + (r' - b')yS + P\frac{dy}{dt}$$

dividindo por P

$$(b'q - r' - c)\frac{I}{P} + v\frac{S}{P} + k\frac{S}{P}\frac{I}{P} = (b-r)y\frac{S}{P} + (r' - b')y\frac{S}{P} + (b' - r')y + \frac{dy}{dt}$$

$$(b'q - r' - c)y + vx + kxy = (b-r)yx - (b' - r')xy + (b' - r')y + \frac{dy}{dt}$$

Usando a equação (3.1) e fazendon $q = 1 - p$ resulta:

$$(b' - r')y - (b'p + c)y + vx + kxy = (b-r)yx - (b' - r')xy + (b' - r')y + \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow (b' - r')y - (b'p + c)y + vx + kxy = ((b-r) - (b' - r'))xy + (b' - r')y + \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow -(b'p + c)y + vx + kxy = \alpha xy + \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = (b'p + c)y - vx + kxy - \alpha xy$$

Colocando xy em evidência temos:

$$\frac{dy}{dt} = vx - (b'p + c)y + (k - \alpha)xy \quad (3.12)$$

A partir das equações (3.11) e (3.12) e usando o fato de que $x + y = 1$, podemos obter uma única equação diferencial ordinária de primeira ordem para uma melhor análise epidemiológico na população, substituindo x por $1 - y$ na equação (3.12) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v(1 - y) - (b'p + c)y + (k - \alpha)(1 - y)y \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= v - vy - (b'p + c)y + (k - \alpha)y - (k - \alpha)y^2 \end{aligned}$$

Colocando y em evidência logo tem-se:

$$\frac{dy}{dt} = v - (v + b'p + c - k - \alpha)y - (k - \alpha)y^2 \quad (3.13)$$

Essa análise matemática será usada na maioria dos modelos descritos, visto que as condições e equações propostas usadas anteriormente serão necessárias nos modelos com variação da população total, além de ressaltar os zeros de $f(y)$ que são os pontos de equilíbrio.

3.3 Pontos de Equilíbrio e Análise de Estabilidade

Para o modelo SIS existem duas situações a tratar:

- O Ponto de Equilíbrio Trivial dado por $(S', I') = (1, 0)$, que corresponde a população livre da doença, ou seja, $S' = 1$ e $I' = 0$;
- O Ponto de Equilíbrio não Trivial dado por $(S', I') \neq (1, 0)$, que corresponde a população no estado endêmico da doença, ou seja, $S' \neq 1$ e $I' \neq 0$.

No estudo da análise de estabilidade os pontos de equilíbrio baseiam-se na argumentação de que equação (3.13) é do tipo $\frac{dy}{dt} = f(y)$ em que $f(y)$ é uma função quadrática, ou

seja, para uma solução de equilíbrio \bar{y} é tal que $f(\bar{y}) = 0$, assim podemos considerar uma pequena perturbação $\delta(t)$ em \bar{y} tal que $|\delta(t)| \ll 1$ com isso a função solução é $y(t) = \bar{y} + \delta(t)$ em Série de Taylor em torno do ponto \bar{y} , obtemos:

$$\frac{d(\bar{y} + \delta(t))}{dt} = f(\bar{y} + \delta(t)) = f(\bar{y}) + f'(\bar{y})\delta(t) + 0(\delta(t))$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta(t)}{dt} = f'(\bar{y})\delta(t)$$

Em que a solução da equação diferencial $\frac{d\delta(t)}{dt} = f'(\bar{y})\delta(t)$ com uma dada condição inicial $\delta(0) = \delta_0$ é

$$\delta(t) = \delta_0 e^{f'(\bar{y})t}$$

Para a solução acima, a estabilidade dos pontos de equilíbrio dependerá do sinal da derivada de $f(y)$ calculada no ponto \bar{y} . Assim:

- Se $f'(\bar{y}) < 0$ então $\delta(t)$ tende a zero quando t tende ao infinito, daí $y(t)$ tende a \bar{y} , logo \bar{y} é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.
- Se $f'(\bar{y}) > 0$ então $\delta(t)$ tende ao infinito quando t tende ao infinito, daí $y(t)$ tende ao infinito, logo \bar{y} é um ponto de equilíbrio instável.

Na análise de estabilidade dos pontos estacionários do modelo dado pela equação (3.13) tem-se a variação do parâmetro $k - \alpha$ e $v \neq 0$. Assumindo daí os seguintes casos:

1. Caso em que $k = \alpha$, tem-se:

$$\frac{dy}{dt} = v - (v + b'p + c - k + \alpha)y - (k - \alpha)y^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = v - (v + b'p + c - k + \alpha)y$$

Logo a equação quadrática é simplesmente simplificada em uma Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem. Sabendo que $\frac{dy}{dt} = f(y)$ e fazendo $f(y) = 0$.

$$f(y) + (b'p + c + v)\bar{y} = v$$

$$\Rightarrow (b'p + c + v)\bar{y} = v$$

Com isso obtemos um ponto de equilíbrio dado por:

$$\bar{y} = \frac{v}{(b'p + c + v)}$$

Como $f'(y) = -(b'p + c + v) < 0$ então $f'(\bar{y}) < 0$. Portanto $\bar{y} = \frac{v}{(b'p + c + v)}$ é um ponto de equilíbrio estável atraindo soluções com dados iniciais positivos. Segue que, \bar{y} fornece o nível endêmico da infecção, dada pela proporção $\frac{I}{P}$.

A solução geral é obtida com a soma da equação homogênea e \bar{y} , que está sujeita a uma condição inicial $y(0) = y_0$ dada por:

$$y(t) = \frac{v}{(b'p + c + v)} + y_0 e^{-(b'p + v + c)t}$$

Claramente, $y(t) \rightarrow \bar{y}$ quando $t \rightarrow \infty$.

2. Caso em que $k > \alpha \iff k - \alpha > 0$

Para este caso, obtemos os pontos de equilíbrio fazendo $\frac{dy}{dt} = f(y) = 0$ onde resulta:

$$(k - \alpha)y^2 + (v + b'p + c - k + \alpha)y - v = 0$$

Calculando as raízes do polinômio obtemos:

$$y = \frac{-(v + b'p + c - k + \alpha) \pm \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)}$$

$$\bar{y} = y_1 = \frac{-(v + b'p + c - k + \alpha) + \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)} > 0$$

$$\bar{y} = y_2 = \frac{-(v + b'p + c - k + \alpha) - \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)} < 0$$

Como $\bar{y} = y_1$ e $\bar{y} = y_2$, o ponto de equilíbrio válido no modelo é $\bar{y} = y_1$ no qual é positivo e localiza-se no intervalo $(0, 1)$. Este resultado é verificado logo abaixo pelo

Teorema do Valor Intermediário:

$$f(0) = v > 0$$

e

$$f(1) = v - (v + b'p + c - k + \alpha) \cdot 1 - (k - \alpha) \cdot 1$$

$$\Rightarrow f(1) = v - v - (b'p + c) + (k - \alpha) - (k - \alpha)$$

$$\Rightarrow f(1) = -(b'p + c) < 0$$

Sabendo que y_1 está em $(0, 1)$; y_2 será útil para obter soluções explícitas em que $k - \alpha > 0$. Tendo a derivada de $f(y)$, tal que $f'(y) = -(v + b'p + c - k + \alpha) - 2(k - \alpha)y$, basta substituir $\bar{y} = y_2$ em y tal que:

$$f'(\bar{y}) = -(v + b'p + c - k + \alpha) +$$

$$+ \frac{-2(k - \alpha)[-(v + b'p + c - k + \alpha) + \sqrt{-(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)}$$

$$\Rightarrow f'(\bar{y}) = -(v + b'p + c - k + \alpha) + (v + b'p + c - k + \alpha) - \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}$$

$$\Rightarrow f'(\bar{y}) = -\sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)} < 0$$

Com esse resultado, o fato de que $\bar{y} = y_2$ em $f'(\bar{y}) < 0$, reforça o de que, $\bar{y} = y_1$ é um ponto de equilíbrio estável, ou seja, as soluções com dados iniciais são atraídas por esse ponto.

Para solução explícita basta a integração direta de $\frac{dy}{dt} = f(y)$, decorrentes da fatoração da função quadrática em função de suas raízes, logo a decomposição da função é dada por: $f(y) = -(k - \alpha)(y - y_1)(y - y_2)$. Então,

$$\frac{dy}{dt} = -(k - \alpha)(y - y_1)(y - y_2) \Rightarrow \frac{dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = -(k - \alpha)dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = -(k - \alpha)t + cte$$

Contudo na integração acima é preciso aplicar o Método de Decomposição em

Frações Parciais em $\frac{1}{(y-y_1)(y-y_2)}$, daí tem-se:

$$\frac{1}{(y-y_1)(y-y_2)} = \frac{A}{(y-y_1)} + \frac{B}{(y-y_2)} = \frac{A(y-y_2) + B(y-y_1)}{(y-y_1)(y-y_2)}$$

$$\Rightarrow A(y-y_2) + B(y-y_1) = 1$$

Fazendo $y = y_2 \Rightarrow B = \frac{1}{y_2 - y_1} = -\frac{1}{y_1 - y_2}$

Fazendo $y = y_1 \Rightarrow A = \frac{1}{y_1 - y_2}$

Então:

$$\frac{1}{(y-y_1)(y-y_2)} = \frac{1}{(y_1-y_2)} \frac{1}{(y-y_1)} - \frac{1}{(y_1-y_2)} \frac{1}{(y-y_2)}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(y-y_1)(y-y_2)} &= \frac{1}{(y_1-y_2)} \int \frac{1}{(y-y_1)} dy - \frac{1}{(y_1-y_2)} \int \frac{1}{(y-y_2)} dy \\ &= \frac{1}{(y_1-y_2)} \ln(y-y_1) - \frac{1}{(y_1-y_2)} \ln(y-y_2) \\ &= \frac{1}{(y_1-y_2)} [\ln(y-y_1) - \ln(y-y_2)] \\ &= \frac{1}{(y_1-y_2)} \ln \frac{(y-y_1)}{(y-y_2)} = -(k-\alpha)t + cte \end{aligned}$$

A equação acima pode se simplificada considerando $\beta = y_1 - y_2$ e multiplicando-o em ambos os membros, e aplicando a inversa da função logarítmica, obtem-se:

$$\ln \frac{(y-y_1)}{(y-y_2)} = -(k-\alpha)t\beta + cte.\beta \iff \frac{(y-y_1)}{(y-y_2)} = e^{-(k-\alpha)t\beta + cte.\beta}$$

Logo,

$$\frac{(y-y_1)}{(y-y_2)} = e^{-(k-\alpha)t\beta} e^{cte.\beta}$$

Uma solução particular, é a trivial em que basta calcular para a condição inicial em

que $y(0) = y_0$, então:

$$\frac{(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_2)} = e^{-(k-\alpha) \cdot 0 \beta} e^{cte \cdot \beta} = e^{cte \cdot \beta}$$

Agora para calcular a solução geral é só usar o fato de que $\beta = y_1 - y_2$, e também o resultado da condição inicial,

$$\beta = y_1 - y_2 = \frac{\sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)} > 0$$

Então fazendo $\lambda = (k - \alpha)\beta > 0$, tem-se:

$$\frac{(y - y_1)}{(y - y_2)} = e^{-(k-\alpha)t\beta} \cdot \frac{(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_2)} \Rightarrow (y - y_1)(y_0 - y_2) = (y - y_2)(y_0 - y_1)e^{-\lambda t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y \cdot y_0 - y \cdot y_2) + (y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_0) = [(y \cdot y_0 - y \cdot y_1) + (y_2 \cdot y_1 - y_2 \cdot y_0)]e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow y(y_0 - y_2) - y_1(y_0 - y_2) = y(y_0 - y_1)e^{-\lambda t} - y_2(y_0 - y_1)e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow (y_0 - y_2)y - (y_0 - y_1)e^{-\lambda t}y = y_2(y_1 - y_0)e^{-\lambda t} + (y_0 - y_2)y_1$$

$$\Rightarrow [(y_0 - y_2) - (y_0 - y_1)e^{-\lambda t}]y = y_2(y_1 - y_0)e^{-\lambda t} + (y_0 - y_2)y_1$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{(y_0 - y_2)y_1 + y_2(y_1 - y_0)e^{-\lambda t}}{(y_0 - y_2) - (y_0 - y_1)e^{-\lambda t}}$$

Dividindo $y(t)$ por $(y_0 - y_2)$, a solução geral fica:

$$y(t) = \frac{y_1 - y_2 \frac{(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_2)} e^{-\lambda t}}{1 - \frac{(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_2)} e^{-\lambda t}}$$

Portanto, se $\lambda > 0$, então $y(t) \rightarrow y_1 = \bar{y}$ quando $t \rightarrow \infty$, para qualquer y_0 .

3. Caso em que $k - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha - k > 0$

Calculando analogamente ao caso anterior os pontos de equilíbrio, fazendo $\frac{dy}{dt} = f(y) = 0$,

segue:

$$f(y) = -(k - \alpha)y^2 - (v + b'p + c - k + \alpha)y + v = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{(v + b'p + c - k + \alpha) \pm \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(\alpha - k)}$$

$$\bar{y} = y_1 = \frac{(v + b'p + c - k + \alpha) - \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)} > 0$$

e

$$\bar{y} = y_2 = \frac{(v + b'p + c - k + \alpha) + \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)} > 1$$

Novamente usando o Teorema do Valor Intermediário temos:

$f(0) = v > 0$ e $f(1) = -(b'p + c) < 0$, logo o estado estacionário em questão é a proporção de equilíbrio positiva localizada no intervalo $(0, 1)$, tendo seu resultado análogo, do caso anterior, dado por:

$$\bar{y} = y_1 = \frac{(v + b'p + c - k + \alpha) - \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)}$$

Temos que $f'(y) = -(v + b'p + c - k + \alpha) - 2(\alpha - k)y$.

Calculando $f'(\bar{y})$ temos:

$$f'(y) = -(v + b'p + c - k + \alpha) - 2(\alpha - k) \frac{(v + b'p + c - k + \alpha) - \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)}$$

$$\Rightarrow f'(\bar{y}) = -\sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(k - \alpha)} < 0$$

Segue que $\bar{y} = y_1$ é estável para o sistema, atraindo todas as soluções com dados iniciais positivos.

Agora, vamos decompor $f(y) = \frac{dy}{dt}$ em função de suas raízes, resulta:

$$f(y) = \frac{dy}{dt} = (\alpha - k)(y - y_1)(y - y_2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = (\alpha - k)dt$$

Integrando ambos os lados:

$$\int \frac{dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = (\alpha - k)t + cte$$

Aplicando novamente o método de decomposição em frações parciais em $\frac{1}{(y - y_1)(y - y_2)}$ daí tem-se:

$$\frac{1}{(y - y_1)(y - y_2)} = \frac{A}{(y - y_1)} + \frac{B}{(y - y_2)} = \frac{A(y - y_2) + B(y - y_1)}{(y - y_1)(y - y_2)}$$

$$\Rightarrow A(y - y_2) + B(y - y_1) = 1$$

Fazendo $y = y_2 \Rightarrow B = \frac{1}{y_2 - y_1} = -\frac{1}{y_1 - y_2}$

Fazendo $y = y_1 \Rightarrow A = \frac{1}{y_1 - y_2}$ Logo:

$$\frac{1}{(y - y_1)(y - y_2)} = \frac{1}{(y_1 - y_2)} \frac{1}{(y - y_1)} - \frac{1}{(y_1 - y_2)} \frac{1}{(y - y_2)}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(y - y_1)(y - y_2)} &= \frac{1}{(y_1 - y_2)} \int \frac{1}{(y - y_1)} dy - \frac{1}{(y_1 - y_2)} \int \frac{1}{(y - y_2)} dy \\ &= \frac{1}{(y_1 - y_2)} \ln(y - y_1) - \frac{1}{(y_1 - y_2)} \ln(y - y_2) \\ &= \frac{1}{(y_1 - y_2)} [\ln(y - y_1) - \ln(y - y_2)] \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = (k - \alpha)(y - y_1)(y - y_2) \Rightarrow \frac{dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = (\alpha - k)dt$$

$$\int \frac{dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = (\alpha - k)t + cte$$

De modo semelhante ao caso anterior, ocorre que

$$\int \frac{dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = \frac{1}{(y_1 - y_2)} \int \frac{1}{(y - y_1)} dy - \frac{1}{(y_1 - y_2)} \int \frac{1}{(y - y_2)} dy$$

Donde obtemos

$$\frac{1}{(y_1 - y_2)} \ln \frac{(y - y_1)}{(y - y_2)} = (k - \alpha)t + cte$$

Novamente fazendo $\beta = y_1 - y_2$, teremos:

$$\ln \frac{(y - y_1)}{(y - y_2)} = (\alpha - k)t\beta + cte.\beta \iff \frac{(y - y_1)}{(y - y_2)} = e^{(\alpha - k)t\beta + cte.\beta}$$

Logo;

$$\frac{(y - y_1)}{(y - y_2)} = e^{(\alpha - k).t\beta} e^{cte.\beta}$$

Com devida condição inicial $y(0) = y_0$, segue que:

$$\frac{(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_2)} = e^{cte.\beta}$$

Note que

$$\beta = y_1 - y_2 = -\frac{\sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)} < 0$$

e, fazendo $\lambda = (\alpha - k)\beta < 0$, teremos:

$$\frac{(y - y_1)}{(y - y_2)} = e^{(\alpha - k)t\beta} \cdot \frac{(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_2)} \Rightarrow (y - y_1)(y_0 - y_2) = (y - y_2)(y_0 - y_1)e^{\lambda t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y \cdot y_0 - y \cdot y_2) + (y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_0) = [(y \cdot y_0 - y \cdot y_1) + (y_2 \cdot y_1 - y_2 \cdot y_0)]e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow y(y_0 - y_2) - y_1(y_0 - y_2) = y(y_0 - y_1)e^{\lambda t} - y_2(y_0 - y_1)e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow (y_0 - y_2)y - (y_0 - y_1)e^{\lambda t}y = y_2(y_1 - y_0)e^{\lambda t} + (y_0 - y_2)y_1$$

$$\Rightarrow [(y_0 - y_2) - (y_0 - y_1)e^{\lambda t}]y = y_2(y_1 - y_0)e^{\lambda t} + (y_0 - y_2)y_1$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{(y_0 - y_2)y_1 + y_2(y_1 - y_0)e^{\lambda t}}{(y_0 - y_2) - (y_0 - y_1)e^{\lambda t}}$$

A solução geral é dada por:

$$y(t) = \frac{y_1 - y_2 \frac{(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_2)} e^{\lambda t}}{1 - \frac{(y_0 - y_1)}{(y_0 - y_2)} e^{\lambda t}}$$

Claramente tem-se que quando $\lambda < 0$, $y(t) \rightarrow y_1 = \bar{y}$ quando $t \rightarrow \infty$, para todos os valores iniciais.

Resumindo os resultados obtidos, temos:

- Seja a função $y(t)$ igual a proporção de infectados com uma taxa de variação da população em relação ao tempo diferente de zero. Conclui-se que para uma taxa de transmissão vetorial v diferente de zero, toda vez que existir um ponto de equilíbrio diferente de zero a equação, (3.13) possui três comportamentos:

1. Quando $k = \alpha$, existe um único estado estacionário para o sistema; o qual é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, dado por $\bar{y} = \frac{I}{P}$:

$$\bar{y} = \frac{v}{b'p + v + c} \quad (3.14)$$

2. Quando $k - \alpha > 0$, existe um único estado estacionário positivo para o sistema no intervalo $(0, 1)$; que é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, dado por:

$$\bar{y} = \frac{v + b'p + c - k + \alpha + \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)} \quad (3.15)$$

3. Quando $k - \alpha < 0$, existe um único estado estacionário para o sistema localizado no intervalo $(0, 1)$; que é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, dado por:

$$\bar{y} = \frac{v + b'p + c - k + \alpha - \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(\alpha - k)} \quad (3.16)$$

3.4 Resultados Epidemiológicos em Relação aos Parâmetros

Para estabelecer as medidas de controle de infecção, foi usado dois parâmetros importantes que são: Força de infecção e reprodutividade basal. Com isso será descrito as principais interpretações epidemiológicas do modelo para estabelecer possíveis medidas de controle da infecção com base no valor limiar R_0 obtido e nas devidas taxas do sistema.

1) Seja a equação (3.6)

$$\frac{dP}{dt} = (b - r)P + (r - b + b' - r')I$$

multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{P}$, então;

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = (b - r) + (r - b + b' - r') \frac{I}{P}$$

Temos que $\bar{y} = \frac{I}{P}$, substituindo na equação acima, obtem-se

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = (b - r) + (r - b + b' - r')\bar{y}$$

Como $\alpha = (r - b + b' - r')$, então

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = (b - r - \alpha\bar{y})$$

Logo, temos a seguinte equação

$$\frac{dP}{dt} = (b - r - \alpha\bar{y})P \quad (3.17)$$

Integrando, com um dado valor inicial $P(0) = P_0$, tem-se:

$$\int \frac{dP}{P(t)} = \int (b - r - \alpha\bar{y}) dt$$

Logo,

$$P(t) = P_0 e^{(b-r-\alpha\bar{y})t}$$

Portanto nos casos de estabilidade $P(t)$ quando $t \rightarrow \infty$, comporta-se:

- $P(t) \rightarrow \infty$ se $b - r - \alpha\bar{y} > 0$.
- $P(t) \rightarrow 0$ se $b - r - \alpha\bar{y} < 0$.

Como \bar{y} são pontos de equilíbrio estáveis do modelo, foi esbelecido o primeiro valor

limiar denotado por $R = \frac{b}{r + \alpha(\bar{y})}$. Com isso tem-se:

- Se $R > 1$ a população cresce numa razão exponencial.
- Se $R < 1$ a população numa mesma razão exponencial.

2) Pode-se observar que sempre existe o nível endêmico da infecção, ou seja, a presença da transmissão vetorial; note ainda que $v \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{I}{P} = \bar{y} \rightarrow 1$.

Logo, podemos fazer a mudança explícita dos níveis endêmicos \bar{y} , com relação à variável v nas respectivas equações (3.14), (3.15) e (3.16), daí:

(a) Quando $\bar{y}(v) = \frac{v}{v + c + b'p}$, e fazendo a derivada parcial de \bar{y} em relação a v , tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} &= \frac{\frac{d(v)}{dv} \cdot (v + c + b'p) - v \cdot \frac{d(v + c + b'p)}{dv}}{v + c + b'p} \\ &= \frac{(v + c + b'p) - v \cdot (1)}{(v + c + b'p)^2} = \frac{c + b'p}{(v + c + b'p)^2} \\ &\therefore \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} = \frac{c + b'p}{(v + c + b'p)^2} > 0 \end{aligned}$$

(b) Para $k - \alpha > 0$,

$$\bar{y}(v) = \frac{-(v + b'p + c + \alpha - k) + \sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)}$$

Variando em relação a v ,

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} = \frac{1}{2(k - \alpha)} \left[-\frac{d\bar{y}}{dv} (v + b'p + c + \alpha - k) + \frac{d\bar{y}}{dv} (\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}) \right]$$

Aplicando a regra da cadeia, $\frac{d\bar{y}}{dv} = \frac{d\bar{y}}{dz} \cdot \frac{dz}{dv}$ em $\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}$ e $\frac{dz}{dv} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dv}$ em $(v + b'p + c + \alpha - k)^2$, então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} &= \frac{1}{2(k - \alpha)} \left[-1 + \frac{2(v + b'p + c + \alpha - k) + 4v(k - \alpha)}{2\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}} \right] \\ \Rightarrow \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} &= \frac{1}{2(k - \alpha)} \left[-1 + \frac{(v + b'p + c + \alpha - k) + 2(k - \alpha)}{\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}} \right] > 0 \end{aligned}$$

(c) Se $k - \alpha < 0$,

$$\bar{y}(v) = \frac{v + b'p + c + \alpha - k - \sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)}$$

Resolvendo de modo análogo ao do caso anterior com a variação de \bar{y} em relação a v , tem-se:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} = \frac{1}{2(k - \alpha)} \left[1 - \frac{(v + b'p + c + \alpha - k) + 2(k - \alpha)}{\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}} \right]$$

O qual a expressão $\frac{(v + b'p + c + \alpha - k) + 2(k - \alpha)}{\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}}$ esta no intervalo (0.1), para v suficientemente grande, então:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > 0$$

Conclui-se que o valor limiar $R = \frac{b}{r + \alpha \bar{y}}$, decresce com o aumento de v , pois também há um aumento em \bar{y} e $\bar{y} = \frac{I}{P} \rightarrow 1$, fazendo com que $P(t) \rightarrow 0$ e $I(t) \rightarrow \infty$.

3) Nos casos de estabilidade $\bar{y} \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow \infty$. Por esse fato, assim como na variação de v , pode-se explicitar a mudança do nível endêmico, dada pela variação de c em (3.14)-(3.16), logo:

(a) Quando $\bar{y}(c) = \frac{v}{v + c + b'p}$, e fazendo a variação de \bar{y} em relação a c , tem-se:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial c} = \frac{\frac{d(v)}{dc} \cdot (v + c + b'p) - v \cdot \frac{d(v + c + b'p)}{dc}}{(v + c + b'p)^2}$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial c} = \frac{-v}{(v + c + b'p)^2} < 0$$

(b) Para $k - \alpha > 0$,

$$\bar{y}(c) = \frac{-(v + b'p + c + \alpha - k) + \sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)}$$

Resolvendo de modo análogo ao caso (2) item b), tem-se:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial c} = \frac{1}{2(k - \alpha)} \left[1 - \frac{(v + b'p + c + \alpha - k)}{\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}} \right]$$

Como a expressão, $0 < \frac{(v + b'p + c + \alpha - k)}{\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}} < 1$, então:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial c} < 0$$

(c) Se $k - \alpha < 0$,

$$\bar{y}(c) = \frac{v + b'p + c + \alpha - k - \sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)}$$

Para calcular a variação de \bar{y} em relação a c , usa-se o método análogo ao do (2) item c), daí resulta a seguinte equação:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial c} = \frac{1}{2(k - \alpha)} \left[1 - \frac{(v + b'p + c + \alpha - k) + 2(k - \alpha)}{\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}} \right]$$

Em que a expressão $\frac{(v + b'p + c + \alpha - k) + 2(k - \alpha)}{\sqrt{(v + b'p + c + \alpha - k)^2 + 4v(k - \alpha)}} > 1$, então:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial c} < 0$$

Logo conclui-se que o valor limiar $R = \frac{b}{r + \alpha \bar{y}}$ cresce quando c aumenta, então

$\bar{y} = \frac{I}{P} \rightarrow 0$, segue que $P(t) \rightarrow \infty$ e $I(t) \rightarrow 0$.

4) Para obter um valor limiar R_0 que rege a variação dos infectados, foi considerado partir da equação (3.13), um valor inicial $y_0(t)$ na dinâmica da infecção. Com isso temos:

$$\frac{dy}{dt} = v - (v + c + b'p - k + \alpha)y_0 - (k - \alpha)y_0^2$$

Agora é conveniente considerar y_0^2 desprezível, pois estamos com intuito de estabe-

lecer um valor limiar para a proporção de infectados, daí temos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v - (v + c + b'p - k + \alpha)y_0 \\ \Rightarrow \bar{y} &= \frac{v}{v + c + b'p + \alpha - k}\end{aligned}$$

Logo temos que

$$\begin{aligned}\bar{y} > 0 &\Leftrightarrow (v + c + b'p + \alpha - k) > 0 \\ &\Rightarrow (v + c + b'p + \alpha) > k \\ &\Rightarrow 1 > \frac{k}{(v + c + b'p + \alpha)}\end{aligned}$$

Portanto denotamos $R_0 = \frac{k}{(v + c + b'p + \alpha)}$. Daí tem-se as seguintes condições para o nível endêmico:

- Se $R_0 \leq 1$, então $v > 0$, o qual o nível endêmico sempre existe na presença de transmissão vetorial;
- Se $R_0 > 1$ em (3.16), ocorre o mesmo quando $v = 0$, em que o parâmetro k dá essa condição.

Portanto, para a transmissão horizontal e transmissão vertical, se ocorrer um contágio suficientemente forte na população, a doença pode ainda se manter mesmo com a ausência de transmissão vetorial, isso em decorrência do fluxo de imigrantes contaminados de áreas infestadas. Com isso, uma estratégia de controle da doença seria a diminuição da proporção \bar{y} de infectados, que está concentrada na força de infecção k no pode ocorrer o alastramento da doença em regiões.

Com o aumento na probabilidade de transmissão vertical q , seu complementar p decresce, o que acarreta o aumento de R_0 , ou seja, R_0 cresce a medida que p diminui.

Daí tem-se;

- Se $c \rightarrow \infty$, então R_0 diminui e $\bar{y} \rightarrow 0$
- Se $k \rightarrow \infty$, então $\bar{y} \rightarrow 1$

Conclui-se desses parâmetros estudados que a doença está concentrada na taxa de remoção c e novamente a força de infecção k , ou seja, outra forma de controle da doença está relacionado com esses dois parâmetros.

Capítulo 4

Modelo SIS com Mistura

Proporcional e Ausência de Transmissão Vetorial

4.1 Introdução ao modelo

Nesse modelo será feita uma análise epidemiológica semelhante ao caso anterior, só que agora com a devida ausência do mecanismo de transmissão pelo vetor. Em se tratando desse tipo de transmissão, podemos obter um estudo simples para o controle ou até mesmo a erradicação da doença, pois se não houver a presença ou até mesmo se essa taxa de transmissão for desprezível, significa que o ciclo de infecção do mal de Chagas é afetado, dessa forma ficaria fácil fazer um controle dos infectados.

Como no modelo proposto não há presença do agente transmissor, iremos considerar $v = 0$ nas equações (3.2) e (3.3) no que resulta:

$$\frac{dS}{dt} = (b - r - 0)S + (b'p + c)I - k \frac{SI}{S + I}$$

⇒

$$\frac{dS}{dt} = (b - r)S + (b'p + c)I - k \frac{SI}{S + I} \quad (4.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = (b'q - r' - c)I + 0.S + k\frac{SI}{S+I}$$

⇒

$$\frac{dI}{dt} = (b'q - r' - c)I + k\frac{SI}{S+I} \quad (4.2)$$

Essa análise do modelo será semelhante ao processo anterior, então fazendo as mesmas considerações : $x = \frac{S}{P}$, $y = \frac{I}{P}$ e $\alpha = (b - r) - (b' - r')$ Das considerações acima resulta:

$$x = \frac{S}{P} \Rightarrow S = xP$$

derivando em relação a t

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dS}{dt} &= \frac{d(x.P)}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{dP}{dt}x + \frac{dx}{dt}P \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt}P &= \frac{dS}{dt} - \frac{dP}{dt}x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{P}\left(\frac{dS}{dt} - \frac{dP}{dt}x\right) \end{aligned}$$

Usando as equações (3.5) e (4.1) obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{dx}{dt} = (b'p + c)y - (k - \alpha)xy \quad (4.3)$$

Das considerações acima, resulta:

$$y = \frac{I}{P} \Rightarrow I = yP$$

derivando em relação a t

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dI}{dt} &= \frac{d(yP)}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{dP}{dt}y + \frac{dy}{dt}P \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt}P &= \frac{dI}{dt} - \frac{dP}{dt}y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{P}\left(\frac{dI}{dt} - \frac{dP}{dt}y\right) \end{aligned}$$

Usando as equações (3.3) e (3.15) obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{dy}{dt} = -(b'p + c)y + (k - \alpha)xy \quad (4.4)$$

A partir da equação (4.4) e usando o fato de que $x + y = 1$ podemos obter uma única equação diferencial ordinária de primeira ordem em y , para tornar a manipulação algébrica mais simples, substitui-se x por $1 - y$ na referida equação, logo resulta:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) = (k - \alpha - c - b'p)y + (\alpha - k)y^2 \quad (4.5)$$

Nas interpretações desse modelo é conveniente determinar situações em que a população $P(t)$ seja estacionária, então a partir da equação (3.17) e considerando $\frac{dP}{dt} = 0$ resulta:

$$(b - r - \alpha\bar{y})P = 0 \Rightarrow (b - r - \alpha\bar{y}) = \frac{0}{P} \Rightarrow (b - r - \alpha\bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{b - r}{\alpha}$$

como consideramos $\alpha > 0$ é necessário e suficiente que para \bar{y} ser um ponto de equilíbrio, $b - r > 0$.

4.2 Pontos de Equilíbrio e Análise de Estabilidade

A análise do ponto de equilíbrio será feita a partir da equação (4.5).

Fazendo $\frac{dy}{dt} = 0$ resulta:

$$(\alpha - k)y^2 + (k - \alpha - c - b'p)y = 0$$

com isso podemos determinar os zeros da equação, tal que:

$$y = \frac{-(k - \alpha - c - b'p) \pm (k - \alpha - c - b'p)}{2(\alpha - k)}$$

$$\Rightarrow y_1 = 0, \quad y_2 = 1 - \frac{b'p + c}{k - \alpha}$$

A partir desse resultado podemos observar que a solução trivial do modelo sempre vai existir e que a população está livre da doença sempre que $y = 1 - \frac{b'p + c}{k - \alpha}$.

A solução $y_1 = 0$ nos mostra que podemos obter um equilíbrio estável livre da doença, que é exatamente o ponto $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$, e $y_2 = 1 - \frac{b'p + c}{k - \alpha}$ também nos dá uma possibilidade de doentes na população, logo na população total existe um nível endêmico da infecção.

Com isso podemos estabelecer os seguintes casos de estabilidade:

1. Estabilidade Assintótica do Equilíbrio Trivial

A análise será feita a partir da solução $y_1 = 0$. Contudo, se derivarmos a equação (4.5) em relação a y em torno de sua origem obtemos:

$$f'(y) = (k - \alpha - c - b'p) + 2(\alpha - k)y$$

$$\Rightarrow f'(0) = k - \alpha - c - b'p$$

se $f'(0) < 0 \Rightarrow k - \alpha - c - b'p < 0 \Rightarrow k < \alpha + c + b'p \Rightarrow \frac{k}{\alpha + c + b'p} < 1$ Logo (\bar{x}, \bar{y}) é um ponto de equilíbrio estável. Por outro lado, se $\frac{k}{\alpha + c + b'p} > 1 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$ é um ponto de equilíbrio instável.

2. Estabilidade Assintótica do Equilíbrio Não Trivial

A análise será feita a partir da solução $y_2 = 1 - \frac{b'p + c}{k - \alpha}$. O equilíbrio não trivial dado por $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{b'p + c}{k - \alpha}, 1 - \frac{b'p + c}{k - \alpha} \right)$, de modo análogo, obtemos $f'(\bar{y}) = -k + \alpha + b'p + c$

Se $f'(\bar{y}) < 0 \Rightarrow -k + \alpha + b'p + c < 0 \Rightarrow \alpha + b'p + c < k \Rightarrow 1 < \frac{k}{\alpha + b'p + c}$, resulta que o ponto não trivial é estável. Por outro lado, se $f'(\bar{y}) > 0 \Rightarrow \frac{k}{\alpha + b'p + c} < 1$, resulta que o ponto de equilíbrio é instável.

É importante denotarmos um valor limiar que se trata da estabilidade assintomática dado por:

$$R_0 = \frac{k}{\alpha + b'p + c}$$

Continuando com a resolução das soluções explícitas, para isso será necessário decompor $f(y)$ em função de suas raízes, e considerando uma dada condição inicial temos primeiramente $f(y) = (\alpha - k)(y - y_2)y$ em função de suas raízes.

$$\text{Como } \frac{dy}{dt} = f(y) \Rightarrow (\alpha - k)(y - y_2)(y - y_1) = \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{(y - y_2)y} = (\alpha - k)dt$$

Integrando ambos os lados resulta:

$$\int \frac{dy}{(y - y_2)y} = \int (\alpha - k)dt \Rightarrow \int \frac{dy}{(y - y_2)y} = (\alpha - k)t + cte$$

Usando o método de decomposição em frações parciais na primeira parte da equação, resulta:

$$\frac{1}{(y - y_2)y} = \frac{A}{(y - y_2)} + \frac{B}{y} = \frac{Ay + B(y - y_2)}{(y - y_2)y}$$

$$\Rightarrow Ay + B(y - y_2) + 1$$

$$\text{fazendo } y = y_2 \Rightarrow Ay_2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{y_2}$$

por outro lado, fazendo $y = 0 \Rightarrow B(-y_2) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{y_2}$ com isso temos:

$$\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_2} \Rightarrow \frac{1}{y_2} \cdot \frac{1}{(y - y_2)} - \frac{1}{y_2} \cdot \frac{1}{y}$$

fazendo a devida integração resulta:

$$\frac{1}{y_2} \cdot \int \frac{1}{(y - y_2)} - \frac{1}{y_2} \cdot \int \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y_2} \ln(y - y_2) - \frac{1}{y_2} \cdot \ln(y)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_2} \cdot \ln\left(\frac{y - y_2}{y}\right) = (\alpha - k)t + cte$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y - y_2}{y}\right) = (\alpha - k)t \cdot y_2 + cte \cdot y_2$$

$$\Rightarrow \frac{y - y_2}{y} = e^{(\alpha - k)t \cdot y_2} e^{cte \cdot y_2}$$

Dado uma condição inicial $y(0) = y_0$

$$\Rightarrow \frac{y_0 - y_2}{y_0} = e^{cte \cdot y_2}$$

Para obtenção da solução geral precisamos desta solução inicial, e fazendo $\lambda = (k - \alpha)y_2$ temos:

$$\frac{y - y_2}{y} = e^{\lambda t} \cdot \frac{y_0 - y_2}{y_0}$$

$$\Rightarrow (y - y_2)y_0 = y(y_0 - y_2)e^{\lambda t} \Rightarrow y \cdot y_0 - y_2 y_0 = y \cdot y_0 e^{\lambda t} - y \cdot y_2 \cdot e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow y \cdot y_0 - y \cdot y_0 e^{\lambda t} + y \cdot y_2 \cdot e^{\lambda t} = y_2 y_0 \Rightarrow y(y_0 + (y_2 - y_0) \cdot e^{\lambda t}) = y_2 y_0$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_2 y_0}{y_0 + (y_2 - y_0) \cdot e^{\lambda t}}$$

dividindo por y_0 :

$$\Rightarrow y = \frac{y_2}{1 + \frac{(y_2 - y_0) \cdot e^{\lambda t}}{y_0}}$$

A partir dessa solução é conveniente ressaltar as condições para que o sistema convirja para y_2 , podendo se comporta de duas maneiras:

Se $\lambda < 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow y_2$ se e somente se $y_2 > 0$, tornando-se uma solução biologicamente viável, logo, se $1 - \frac{b'p + c}{k - \alpha} > 0, \Rightarrow \frac{b'p + c}{k - \alpha} < 1$, que recai na condição lineal $R_0 > 1$, por outro lado, se $\lambda > 0$ o sistema converge para 0, resulta $\frac{k}{\alpha + b'p + c} < 1$, simplificando os resultados obtemos:

Se $\lambda < 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow y_2$ e se $\lambda > 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow 0$

Analisaremos agora a dinâmica da população a partir da equação (3.17) junto com a proporção endêmica \bar{y} , com intuito de estabelecer resultados em relação aos valores limiares obtidos:

a- Caso em que $R_0 \leq 1$ Fazendo $\bar{y} = 0$ na equação (3.17) resulta: $\frac{dP}{dt} = (b - r)P$, se $\frac{dP}{dt} \leq 0$, decorre que $(b - r) \leq 0 \Rightarrow b \leq r \Rightarrow \frac{b}{r} \leq 1$ então $P(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ consequentemente $I(t) \rightarrow 0$.

Por outro lado, se $(b - r) > 0 \Rightarrow \frac{b}{r} > 1$, resulta que $P(t) \rightarrow \infty$ se $t \rightarrow \infty$.

Dessa forma temos que analisar dois casos prováveis para a população dos infectados.

Para obtermos uma única equação em função de $I(t)$ iremos usar as equações (3.3)

e (3.7), descrita respectivamente pelas equações: $\frac{dI}{dt} = (b'p - r' - c)I + vS + k \frac{SI}{S + I}$

e $S = \frac{r' - b'}{b - r} I$.

Substituindo (3.7) em (3.3) obtemos

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = (b'p - r' - c)I + v \frac{r' - b'}{b - r} I + k \frac{(r' - b') I}{b - r} \frac{I}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = ((b'p - r' - c) + v \frac{r' - b'}{b - r} + k \frac{(r' - b')}{b - r} \frac{I}{P}) I$$

Como neste modelo descrito há ausência da transmissão vetorial então $v = 0$ e usando o fato de que $\frac{I}{P} = \frac{(b - r)}{\alpha}$ resulta:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dI}{dt} &= (b'p - r' - c + k \frac{r' - b'}{\alpha})I \\ \Rightarrow \frac{dI}{dt} &= (b'p - r' - c + k \frac{(\alpha + r - b)}{\alpha})I \\ \Rightarrow \frac{dI}{dt} &= (b'p - r' - c + k + k \frac{(r - b)}{\alpha})I \end{aligned}$$

Por outro lado, a população se mantém estacionário se $\frac{dP}{dt} = 0$, obtemos então da equação (3.17):

$$\begin{aligned} b - r - \alpha \bar{y} = 0 &\Rightarrow -\alpha \bar{y} = -(b - r) \Rightarrow \bar{y} = \frac{b - r}{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = (b'p - r' - c + k + ky')I \\ \Rightarrow \frac{dI}{dt} &= (b'p - r' - c + k)I \end{aligned}$$

Da equação acima, podemos estabelecer um valor limiar $R_2 = \frac{b'q + k}{c + r'}$ para $I(t)$.

Resulta que dado $\bar{y} = \frac{I}{P} = 0$ temos $P(t) \rightarrow \infty$ e $I(t) \rightarrow 0$ se $R_2 < 1$ e $I(t) \rightarrow \infty$ se $R_2 > 1$.

b- Caso em que $R_0 > 1$

Quando $R_0 > 1$ temos $y(t) \rightarrow y_2$ e se $\frac{dP}{dt} = (b - r - \alpha \bar{y})P$ temos que $P(t) \rightarrow 0$ quando $b < r + \alpha \bar{y}$ por outro lado se $P(t) \rightarrow \infty$ se $b > r + \alpha \bar{y}$, com isso temos que se $\bar{y} = \frac{I}{P} \rightarrow y_2$ resulta $P(t) \rightarrow \infty$ então $I(t) \rightarrow \infty$ caso contrario, se $P(t) \rightarrow 0$ então $I(t) \rightarrow 0$

4.3 Resultados Epidemiológicos em Relação aos Parâmetros

Com a análise dos parametros limiares observa-se que a doença se mantém mesmo com os pontos estacionarios da população total $P(t)$.

Resumindo os resultados tem-se:

- Se $P(t)$ é estacionário, a proporção y dos infectados é dado por $\bar{y} = \frac{b - r}{\alpha}$ nos casos em que $R > 1$ e $R_1 = 1$.
- Se $P(t)$ não é estacionário, as seguintes possibilidades podem ocorrer:

i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y} \quad \text{se } R_0 > 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{se } R_0 \leq 1$$

Em que \bar{y} e o equilíbrio não trivial

O comportamento assintótico da população junto com as dos infectados obedecem as condições :

ii Se $R_0 \leq 1$ e $R \leq 1$, resulta $P(t) \rightarrow \infty$, $I(t) \rightarrow \infty$ e $\bar{y} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 0$, por outro lado se $R_0 \leq 1$ e $R > 1$, resulta $P(t) \rightarrow \infty$ e $y(t) \rightarrow 0$ e $I(t) \rightarrow 0$ além do que $I(t) \rightarrow \infty$ se $R_2 > 1$ e $I(t) \rightarrow 0$ se $R_2 < 1$

iii se $R_0 > 1$ então $y(t) \rightarrow \bar{y}$ além do que:

$$P(t) \rightarrow 0 \text{ se } R_1 < 1$$

$$P(t) \rightarrow \infty \text{ se } R_1 > 1$$

$$I(t) \rightarrow 0 \text{ se } R_1 < 1$$

$$I(t) \rightarrow 0 \text{ se } R_1 > 1$$

Considerações Finais

Através deste estudo como parte da obtenção do curso e estimulado pela importância da matemática para a saúde pública, que levaram muitos pesquisadores a encontrar a origem, consequências e evolução de epidemias que hoje são importantes para o controle e até erradicação de doenças infecciosas. Neste trabalho foi feita uma análise ao modelo matemático da doença de Chagas, fazendo uma analogia a importância que tem o estudo da epidemiologia aos modelos de doenças para a saúde pública em particular para a doença de Chagas. A partir da análise aos modelos descritos, conseguimos resultados muito satisfatórios, pois se tratando do modelo SIS com ausência do vetor resulta que podemos conseguir um controle ou até mesmo a erradicação da doença e assim o ciclo de infecção do mal de Chagas é afetado significativamente.

Referências Bibliográficas

- [1] Almeida Júnior, Dilberto da Silva. **Um estudo sobre epidemiologia matemática - a Doença de Chagas**: Campinas - SP, 2002;
- [2] Busenberg, S., and Vargas, C. (1991): Modeling Chaga's Disease: Variable Population Size and Demographic Implications. **Mathematical Population Dynamics**, O. Arino, D. Axelrod and M. Kimmel, Eds., Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 283 - 296;
- [3] Coimbra, Mario do Carmo. **Equações diferenciais: Uma primeira abordagem**, Julho de 2008. Acesso em 10 de Fevereiro;
- [4] **Doença de Chagas**. Disponível em <http://www.fiocruz.br>. Acesso em 20 de Fevereiro;
- [5] Figueiredo, Djairo Guedes de; Neves, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**, Rio de Janeiro: IMPA, 2008;
- [6] Lima, Elon Lages. **Curso de Análise**; v.1.12. ed. – Rio de Janeiro, 2010.
- [7] Valladares, Renato J. Costa. **Cálculo e Aplicações 1 - Funções Reais**, Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna, 2008.
- [8] **Vetores transmissores da Doença de Chagas**. Disponível em <http://www.sucen.sp.gov.br>. Acesso em 10 de Fevereiro de 2012;
- [9] Yang, Hyun Mo. **Epimemiologia matemática: estudo dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2001;

- [10] Da Silva, Lígia Berlanino. **Estudo dos Pontos de Equilíbrio em Modelos Determinísticos da Dinâmica do HIV**, Monografia publicada, São Paulo - SP, 2005.