UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES PELO MÉTODO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

MACAPÁ-AP
2012

HONNYS ALESSANDRO TAVARES PENHA

SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES PELO MÉTODO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. José Walter Cardenas Sótil.

MACAPÁ-AP

2012

HONNYS ALESSANDRO TAVARES PENHA

SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES PELO MÉTODO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetido à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil (Orientador)

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco

Prof. Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira

Avaliado em: 03/12/2012

MACAPÁ-AP

2012

Agradecimentos

Tenho plena convicção de que no dia em que Deus se decidiu por minha existência Ele também decidiu colocar em minha vida pessoas fora de sério para me aconselharem.

Hoje reconheço que todos aqueles dos quais me aproximei durante a realização deste curso foram, e são uma benção de Deus.

Amor, paciência, compreensão definem o que minha amada família teve para comigo durante os anos que passei cursando esta graduação. Por isso, desejo mencionar o nome de vocês aqui, para lhes dizer o meu muito obrigado - Sandra Penha ensinou-me uma forma inigualável de tolerância, fé e perseverança. É a professora que em nenhuma universidade eu poderia encontrar melhor. A você, mãe, meus sinceros agradecimentos! Raimundo Penha, com seu jeito de ser, o qual fez de tudo que estava em suas possibilidades para não deixar faltar o alimento de cada dia. A você, pai, o meu muito obrigado! Pensando em vocês, faço minhas palavras do sábio que disse: Porque eu era filho de meu pai, tenro e único em estima diante de minha mãe. E ele ensinava-me e dizia-me: Retenha as minhas palavras o teu coração; guarda os meus mandamentos e vive (Pr 4.3,4)! Ronys Penha, a você, irmão o meu muito obrigado! Clilma Penha, a você , minha irmã o meu muito obrigado! Muito obrigado à minha preciosa família.

Quero fazer referência também àqueles com os quais tive a honra de ser um de seus alunos, pois eles foram centelhas que incendiaram em mim o desejo de prosseguir e chegar até o fim do curso, Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil, Prof. Ms. Marcio Aldo Lobato Lima, Prof. Espec. Steve Wanderson Calheiros de Araújo, Prof. Dr. Erasmo Senger, Prof. Dr. Gilberlandio Jesus, Prof. Dr. Gusman Eulalo Isla Chamilco, Prof. Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira. Obrigado por acreditarem e estimularem em mim o desejo de não desistir!

Prof. Dr. Walter Cárdenas, os meus sinceros agradecimentos. O senhor que não mediu esforços para orientar-me na construção deste trabalho. O meu muito obrigado!

Sendo sinergia (do grego sunergía, cooperação) o ato ou esforço simultâneo e coletivo de pessoas que cooperam umas com as outras para atingir um objetivo comum, essa é a palavra que devo utilizar para definir a forma como a turma de 2007 se uniu para que juntos concluíssemos a graduação.

Maria Freitas, muito obrigado pela mentoria e por incentivar-me a permanecer no centro da vontade de Deus e obedecê-lo. Assim sendo, desfrutar de todas as promessas dEle para comigo, e uma delas é a conclusão desta graduação. A você, minha amada namorada Daiane Matos, obrigado pelo apoio, pela paciência, compreensão e pelo incentivo. Hoje entendo o que o sábio quis dizer com do SENHOR vem a mulher prudente (Pv 19.14b). Você é uma dádiva, uma constante inspiração e um canal de bênçãos para minha vida!

Ao Deus do impossível, seja toda a glória, toda honra toda exaltação, todos os aplausos e todo o louvor! Tu és, Senhor quem me possibilitou a chegar e a concluir esta graduação! Sou eternamente grato a ti.

A você, caro leitor, que está lendo este trabalho, meus sinceros agradecimentos. Todos os passos que concedemos em direção a este trabalho foram pensando em você. Obrigado por existir. Desejo que seja uma benção para você.

Em nome de Jesus, o meu muito obrigado a todos!

A todos muito obrigado!

"E, respondendo o Rei, lhes dirá: Em verdade vos digo que quando o fizestes a um destes meus pequeninos irmãos, a mim o fizestes."

(MATEUS 25.40)

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso são abordadas as soluções do Sistema de Equações Diferenciais Lineares Homogêneas pelo Método dos Autovalores e Autovetores. O método consiste em determinar as raízes do polinômio característico da matriz de coeficientes do sistema de equações diferenciais, as quais podem ser todas reais, complexas ou com multiplicidade. São formulados teoremas para determinar os autovalores linearmente independentes, simples ou generalizados, em cada um destes casos e as respectivas soluções do sistema de equações diferenciais e são apresentados exemplos de aplicação para cada caso estudado. A principal contribuição deste trabalho é apresentar a solução do sistema de equações diferenciais quando as raízes do polinômio característico tem multiplicidade três ou quatro.

Palavras-Chave: Sistema de Equações Diferenciais, Método dos Autovalores e autovetores, Polinômio Característico.

Resumé

La réalisation de ce travail sont bien sûr discuté de solutions système d'équations différentielles linéaires Homogêngeas par la méthode des valeurs propres et vecteurs propres. Le procédé consiste à déterminer les racines du polynôme caractéristique de la matrice de coefficients du système d'équations différentielles qui peuvent être tout réel, complexe, ou de la multiplicité. Théorèmes sont formulés pour déterminer les valeurs propres linéairement indépendants, simples ou généralisées, dans chacun de ces cas et leurs solutions du système d'équations différentielles et des exemples d'application sont présentés pour chaque étude de cas. Aprincipal contribution de cet article est de présenter la solution du système d'équations différentielles lorsque les racines du polynôme caractéristique ont une multiplicité trois ou quatre.

Mots-clés: Système d'équations différentielles, la méthode des valeurs propres et vecteurs propres, polynôme caractéristique.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

As equações diferenciais começaram com o estudo de cálculo por Newton e Leibniz durante o século XVII. Apesar de Newton ter atuado relativamente pouco na área de equações diferenciais propriamente ditas, seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII. Leibniz compreendia o poder de uma boa notação matemática, e a nossa notação para derivada, $\dfrac{df(x)}{dy}$, assim como o sinal de integral, são devidos a ele. Descobriu o método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem. As contribuições de matemáticos que marcaram sua geração como Euler, Lagrange, Laplace expandiram consideravelmente informações das equações diferenciais no cálculo das variações, na mecânica celeste.

No final do século XVIII, muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos. No século XIX iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade, assim como o desenvolvimento de métodos menos elementares.

1.1 Independência linear

O conceito de Independência Linear é importante para determinar um conjunto de funções que gerem todas as soluções da equação diferencial, denominada Solução Geral. Prova-se que duas soluções linearmente independentes da equação diferencial linear de segunda ordem 1.1 geram o espaço solução ou solução geral da equação.

Definição 1.1. Consideremos uma combinação linear das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que verificam,

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b) \tag{1.1}$$

onde, c_1 e c_2 são números reais. Se,

a) $c_1 = c_2 = 0$, dizemos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são Linearmente Independentes (LI).

b) $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$, dizemos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são Linearmente Dependentes (LD).

Exemplo 1.1. Seja a combinação linear das funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$, que verifica

$$c_1x + c_2x^2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

derivando, temos

$$c_1 + 2c_2x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Como a equação 1.3 é válida para qualquer $x \in \mathbb{R}$, é válida em particular para $x = 0$, isto é, $c_1 + 2c_2 \cdot 0 = 0$ e portanto $c_1 = 0$. Substituindo $c_1 = 0$ e fazendo $x = 1$ em 1.2, temos $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0$ e portanto $c_2 = 0$. Como $c_1 = c_2 = 0$ em 1.2 pode-se afirmar que as funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x_2$ são linearmente independentes.
Observe que as equações 1.2 e 1.3 podem-se escrever como um sistema algébrico:

$$\begin{bmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde, a primeira linha da matriz são funções e a segunda linha são suas derivadas. Além mais, o determinante da matriz

$$det \begin{bmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2,$$

é em geral diferente de zero.

Exemplo 1.2. Seja a combinação linear das funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 2x$, que verifica

$$c_1x + c_2(2x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

derivando, temos

$$c_1 + 2c_2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

Da equação 1.5 temos que $c_1 = -2c_2$, fazendo $c_2 = 1$ temos que $c_1 = -2$. Como $c_1 = -2$ e $c_2 = 1$ verificam 2.4, pode-se afirmar que as funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 2x$ são linearmente dependentes.

Observe que as equações 1.4 e 1.5 podem-se escrever como um sistema algébrico:

$$\begin{bmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde, a primeira linha da matriz são as funções e a segunda linha são as suas derivadas. Além mais, o determinante da matriz

$$\det \begin{bmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = x \cdot 2 - 2x \cdot 1 = 0,$$

é identicamente nulo.

1.2 Wronskiano

No exemplo 1.1 observa-se que as funções são linearmente independentes e o determinante formado pelas funções e suas derivadas é não nulo. Enquanto no exemplo 1.2 as funções são linearmente dependentes e o determinante é nulo. Nesta seção definimos este determinante e o aplicamos na avaliação da independência linear de funções.

Definição 1.2. O Wronskiano das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de classe $C^1[a, b]$, denotado por $W[y_1(x),\, y_2(x)]$ é o determinante da matriz formada pelas funções e suas derivadas. Isto é,

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Teorema 1.1. *Se as funções $y_1(x)$, $y_2(x)$ de classe $C^1[a, b]$ são linearmente dependentes, então*

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = 0, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{1.7}$$

O Teorema 1.1 afirma que se duas funções são linearmente dependentes, então seu wronskiano é nulo para todos os pontos do domínio comum.
A contra-positiva do Teorema 1.1 fornece uma condição necessária, e muito útil, para verificar se duas funções são linearmente independentes, tal como afirma o seguinte corolário.

Corolário 1.1. *Sejam as funções $y_1(x)$, $y_2(x)$ de classe $C^1[a,b]$. Se existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $W[y_1(x0), y_2(x_0)] \neq 0$, então as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes.*

Exemplo 1.3. Sejam as funcões $y_1(x) = 3x$ e $y_2(x) = 2x+5$ linearmente dependentes, logo o Teorema 1.1 afirma que o Wronskiano das funções é identicamente nulo. Com efeito,

$$W[3x, 2x] = \det \begin{bmatrix} 3x & 2x \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 3x \cdot 2 - 2x \cdot 3 = 6x - 6x = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.4. Sejam as funções $y_1(x) = \sin(x)$ e $y_2(x) = \cos(x)$ definidas em $\mathbb{R}$. Como o wronskiano

$$\begin{aligned} W[\cos(x), \sin(x)] &= \det \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \\ &= \cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x) \cdot \sin(x)) = \cos^2(x) + \sin^2(x) \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

não é identicamente nulo, então o Corolário 1.1 afirma que as funções são linearmente independentes.

Exemplo 1.5. Sejam as funções $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = x^5$ definidas em $\mathbb{R}$. Como o wronskiano

$$\begin{aligned} W[x^3, x^5] &= \det \begin{bmatrix} x^3 & x^5 \\ 3x^2 & 5x^4 \end{bmatrix} \\ &= x^3 \cdot 5x^4 - 3x^2 \cdot x^5 = 5x^7 - 3x^7 \\ &= 2x^7 \end{aligned}$$

não é identicamente nulo, pois $W[y_1(1), y_2(1)] = 2 \cdot 1^7 = 2 \neq 0$, então o Corolário 1.1 afirma que as funções são linearmente independentes.

Os determinantes wronskianos recebem esse nome por causa de Jósef Maria Hoené-Wronski, que nasceu na Polônia, mas viveu a maior parte de sua vida na França. Wronski era um homem talentoso, mas complicado, e sua vida foi marcada por disputas acaloradas frequentes com outros indivíduos e instituições.

1.3 Métodos de Eliminação de Gauss e Gauss-Jordan

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad &\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Se A denota a matriz de coeficientes em 1.8. Sabemos que pode-se aplicar a regra de Cramer para resolver o sistema, desde que $\det A \neq 0$. Mas a regra exige grande esforço se A é superior a 3×3. O método de eliminação de Gauss-Jordan tem a vantagem de constituir não somente um meio eficiente de lidarmos com grandes sistemas, mas também um meio de resolver sistemas do tipo 1.8 com coeficientes constantes, em que $\det A = 0$ e, ainda, um meio de resolver m equações lineares em n incógnitas.

Definição 1.3. A **matriz aumentada** do sistema 1.8 é a matriz $n \times (n+1)$ definida por

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & & & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right)$$

Se B é a matriz coluna b_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, a matriz aumentada de 1.8 se denota por $(A|B)$.

1.3.1 Operações Elementares com linhas

Recordemos, da álgebra, que é possível transformar um sistema algébrico de equações em um sistema equivalente (isto é, que tenha a mesma solução) multiplicando uma equação por uma constante não nula, permutando as posições de duas equações quaisquer do sistema e adicionando a uma equação um múltiplo constante(não zero) da equação. Essas operações sobre as equações de uma sistema são, por sua vez equivalente a **operações elementares com linhas** em uma matriz aumentada:

(i) Multiplicar uma linha por uma constante não nula.

(ii) Permutar duas linhas quaisquer.

(iii) Adcionar a uma linha um múltiplo constante (não zero) de outra linha.

1.3.2 Métodos de Eliminação

Para resolver um sistema como 1.8 com auxílio de uma matriz aumentada, utilizando a **eliminação gaussiana** ou o **método de eliminação de Gauss-Jordan**. No primeiro método, efetuamos um sucessão de operações elementares com linhas até chegar a uma matriz aumentada em **forma escalonada por linha**.

(i) O primeiro elemento não zero em uma linha não nula é 1.

(ii) Em linhas não nulas consecutivas, o primeiro elemento 1 na linha inferior aparece à direita do primeiro 1 na linha superior.

(iii) As linhas que consistem exclusivamente de $0's$ aparecem na base da matriz. No método de Gauss-Jordan as operações com linhas prosseguem até obtemos uma matriz aumentada, **reduzida escalonada por linha**. Uma matriz reduzida escalonada por linha apresenta as três propriedades relacionadas acima.

(iv) Uma coluna que contém 1 como primeiro elemento e tem zeros em todos os outros lugares.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss foi o primeiro de uma geração de matemáticos precisos e exigentes - os "rigoristas". Ainda menino, Gauss foi um prodígio em matemática. Seu pai era um laborioso trabalhador de Brunswick, teimoso em seus pontos de vista, que tentou evitar que seu filho recebesse instrução adequada; mas sua mãe, ela própria sem instrução, encorajou o filho nos seus estudos e orgulhou-se grandemente de seu sucesso até sua morte aos noventa e sete anos. Como adulto, costumava dizer que podia contar antes de poder falar. Entretanto, como estudante universitário, Gauss viu-se dividido entre duas paixões: filosofia e matemática. Mas foi inspirado por algumas conquistas matemáticas originais quando ainda não tinha vinte anos e encorajado pelo matemático Wolfang Bolyai, de modo que a escolha não foi difícil. Aos vinte anos, Gauss seguiu a carreira de matemático. Aos vinte dois anos, completou um livro sobre a teoria dos números, Disquisitiones Arithmeticae. Publicado em 1801, esse texto foi saudado como uma obra-prima, permanecendo ainda hoje como um clássico no assunto. A tese de doutorando de Gauss de 1799 também constitui um documento memorável. Utilizando a teoria das funções de uma variável complexa, Gauss foi o primeiro a demonstrar o chamado teorema fundamental da álgebra: Toda equação polinomial tem ao menos uma raiz.

Embora Gauss tenha sido sem dúvida reconhecido e respeitado como um matemático destacado, o pleno alcance do seu gênio só foi compreendido com a publicação do seu diário científico em 1898, quarenta anos após sua morte. Para desgosto de alguns matemáticos do século XIX, o diário revelou que Gauss já havia previsto, às vezes com décadas de antecedência, muitas de suas descobertas - ou melhor, re-descobertas, Gauss era indiferente à fama; suas pesquisas matemáticas eram, não raro, feitas como uma criança brincando em uma praia - apenas por prazer e satisfação própria, e não pela instrução que pudesse proporcionar através de sua publicação.

Em qualquer relação dos "Maiores Matemáticos Que Existiram", Karl Friedrich Gauss estará sempre no topo. Pelo profundo impacto que causou em tantos ramos da matemática, Gauss é chamado às vezes de o "príncipe dos matemáticos".

Wilhelm Jordan (1842-1899). Engenheiro alemão, Jordan utilizou este método para resolver sistemas lineares em seu livro de 1888, Handbook of Geodesy (Manual de Geodésia).

Neste trabalho apresentaremos alguns resultados da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, com enfoque no estudo de solução de equações diferenciais ordinárias lineares pelo método dos autovalores e autovetores, bem como alguns exemplos e aplicações desta teoria. Este texto está organizado como segue: no capítulo 1 apresentamos alguns conceitos que serão utilizados nos capítulos posteriores. No capítulo 2, conceitos básicos de autovalores e autovetores e as soluções do sistema de equações para raizes reais simples, com multiplicidade e raízes reais são apresentados nos capítulos 3,4 e 5 respectivamente.

Capítulo 2

Sistema de Equações Diferenciais

Consideramos neste capítulo sistema de equações diferenciais lineares homogêneas, associando a solução do sistema com a técnica de autovalor e autovetor.

2.1 Autovalor e Autovetor

Consideremos uma matriz real quadrada não nula A de ordem n, isto é, existe pelo menos uma componente não nula a_{ij} (sendo $a_{ij} \neq 0$ para igual i e j).

Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

são matrizes não nulas.

O problema a considerar é:

Dada a matriz real A não nula, determinar um número λ e um vetor X não nulo de ordem n tal que verifiquem: $AX = \lambda X$

Definição 2.1. Dada a matriz real não nula A de ordem n, dizemos que λ é um autovalor de A e X é um autovetor de A associado a λ, se

$$AX = \lambda X$$

onde, λ é um número real ou complexo e X é um vetor não nulo de ordem n.

Notação. Os autovalores são também denominados valores característicos e os autovetores são também denominados vetores característicos.

Exemplo 2.1. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

e o vetor

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Desejamos verificar se X é autovetor de A. Isto é, desejamos verificar se $AX = \lambda X$, para algum número λ. Logo,

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 \\ \frac{1}{4} \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} X.$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = \frac{1}{4}$.

Exemplo 2.2. Na matriz A do Exemplo 2.1 desejamos verificar se $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é autovetor de A. Temos:

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 \\ \frac{1}{4} \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

De outro lado,

$$\lambda X \;=\; \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix}$$

Se $AX = \lambda X$, então

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ 2\lambda = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ \lambda = 1/8 \end{cases}$$

O qual é uma contradição, pois

$$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{8}.$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ não é autovetor de A.

Exemplo 2.3. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 8 & 9 & 9 \\ -8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ e o vetor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Temos:

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 8 & 9 & 9 \\ -8 & 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-9) \cdot 1 \\ 8 \cdot 1 + 9 \cdot (-1) + 9 \cdot 1 \\ (-8) \cdot 1 + 7 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} = (-8) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-8)\, X. \end{aligned}$$

Logo, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = -8$.

Os Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 mostram como verificar se um vetor X é autovetor de A, e ainda determina o autovalor se a resposta for positiva. Estes exemplos não identificam no caso geral como determinar os autovalores e autovetores.

Para determinar os autovalores e autovetores de A, deve-se responder a seguinte questão:

"Dada uma matriz quadrada real não nula A, existem autovalores e autovetores para esta matriz?"

Para isto consideramos a equação

$$AX = \lambda X \tag{2.7}$$

onde $X \neq 0$. Isto equivale a:

$$AX - \lambda X = 0 \tag{2.8}$$

ou

$$(A - \lambda I)X = 0 \tag{2.9}$$

assumindo A e λ conhecidas em 4.7, este sistema admite solução não nula para X se, e somente se,

$$det(A - \lambda I) \tag{2.10}$$

denotamos

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

o polinômio característico da matriz associado ao autovalor λ.

Observando que $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ é um polinômio de grau n, temos que existem n raízes para λ. Temos provado o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Dada uma matriz quadrada não nula A de ordem n, o sistema*

$$AX = \lambda X$$

onde λ é um número e X é um vetor não nulo de ordem n, admite solução para λ e X. Ainda mais, existem n valores λ associado à matriz A, raízes de polinômio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

Nota: Como A é uma matriz real de ordem n, $P(\lambda)$ é um polinômio da forma:

$$P(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda^1 + \alpha_0$$

com coeficientes α_k reais. O Teorema Fundamental da Algebra, assegura que existem n raízes, as quais, podem ser reais ou complexas. Ainda mais, como coeficientes de $P(\lambda)$ são reais, se tiver raízes complexas elas ocorrem em pares conjugados, ou seja, se $\lambda = a + ib$, é raiz de $P(\lambda)$ $(a, b \in \mathbb{R})$, então $\bar{\lambda} = a - ib$ também é raíz de $P(\lambda)$. Podem ocorrer várias situações em relação à natureza das autovalores, como por exemplo.

i) Todos os autovalores são reais e distntos.

ii) Um único autoavalor com multiplicidade n.

iii) Autovetores complexas (em pares conjugados).

iv) Combinação dos casos **i)**, **ii)** e **iii)**.

Em relação aos autovetores temos os casos:

i) Se todos os autovalores são reais e distintos, gera-se n autovetores linearmente independentes.

ii) Se um autovetor tem multiplicidade k, ele gera j autovetores linearmente independentes, com $1 \leq j \leq k$.

iii) Para cada par autovalor complexo conjugado, se associam dois autovetores em geral complexo.

iv) Combinação dos casos **i)**, **ii)** e **iii)**.

2.2 Sistema de EDO lineares homogêneas

O Problema de determinar os autovalores e autovetores de uma matriz não nula A de ordem n é de utilidade na solução do seguinte tipo de EDO:

Definição 2.2. Dada uma matriz real não nula A de ordem n e coeficientes constantes, dizemos que o sistema

$$\frac{dX}{dt} = AX \qquad , \qquad X \neq 0 \tag{2.11}$$

é um sistema linear homogênea de coeficientes constantes.

Ou seja, deve-se determinar o vetor X não nulo que verifica 4.3. Se A e X são da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

pode-se escrever a EDO 4.3 como

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Obviamente X é uma função da variável independente t, isto é, $X = X(t)$ é a desconhecida que depende de t.

Exemplo 2.4. Os seguintes sistemas

a) $X' = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} X$ **b)** $X' = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} X$ **c)** $X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X$

são sistemas lineares homogêneas de coeficientes constantes, pois a matriz associada tem componentes reais constantes em cada caso.

Em geral, um sistema do tipo

$$X' = AX + b \quad , \quad x \neq 0 \tag{2.14}$$

onde A é uma matriz de ordem n, X e b são vetores de ordem n, é denominado um *sistema linear de equações diferenciais ordinárias.* Se A é constante, o sistema é dito *sistema linear de coeficiente constantes.* No caso de $b = 0$, o sistema é dito *sistema linear homogêneo*, que é o caso em estudo desta secção. Na próxima secção, serão representados os métodos para resolver o sistema $X' = AX$, usando os autovalores e autovetores da matriz A.

2.3 Solução do Sistema Linear Homogêneo

Consideremos o problema escalar

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) \quad , \quad a \neq 0 \tag{2.15}$$

o qual pode-se escrever na forma diferencial como

$$dx = a\ x\ dt$$

dividindo por x $(x \neq 0)$ temos

$$\frac{dx}{x} = adt$$

integrando

$$\int \frac{dx}{x} = a \int dt$$

obtém-se

$$\ln x = at + c$$

onde, c é uma constante arbitrária.

Aplicando exponencial temos:

$$X = e^c e^{at}$$

como c é uma constante arbitrária, então $k = e^c$ é também uma constante arbitrária. Logo, a equação diferencial 2.15 tem por solução

$$X(t) = ke^{at}. \tag{2.16}$$

Com base em 2.15 e 2.16 consideremos a solução do sistema linear

$$\frac{d}{dx}X(t) = AX(t) \tag{2.17}$$

onde A é uma matriz constante de ordem n, da forma

$$X(t) = e^{\lambda t}V \tag{2.18}$$

onde V é um vetor constante de ordem n.

Se isto acontecer, $X(t)$ em 2.18 deve verificar o sistema linear a equações de diferencial ordinárias homogêneas 2.17.

Substituindo 2.18 em 2.17 resulta

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}V\right] = A\left[e^{\lambda t}V\right] \\ \Longleftrightarrow\quad & \left[\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\right]V = e^{\lambda t}AV \\ \Longleftrightarrow\quad & \lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}AV \\ \Longleftrightarrow\quad & e^{\lambda t}\left[AV - \lambda V\right] = 0 \end{aligned}$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$ resulta necessariamente que

$$AV - \lambda V = 0$$

ou

$$AV = \lambda V. \tag{2.19}$$

Portanto, resolver o sistema 2.17 equivale a resolver o problema de autovalor e autovetor 2.19.

Logo resolver o sistema de EDO homogêneas $X' = AX$ segue o seguinte procedimento:

a) Determinar os autovalores da matriz A, os quais são as raízes do polinômio característico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{2.20}$$

ou de forma equivalente, resolver a equação característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.21}$$

desta forma obtém-se n raízes de $P(\lambda)$ os quais podem ser reais ou complexas, com ou sem multiplicidade.

b) Conhecidos os autovalores $\lambda_k \;,\quad k = 1, \cdots, n$, determinar os autovetores associados a cada um dos autovalores, isto será descrito nas próximas subseções, de modo que os autovetores $V_k \;,\quad k = 1 \cdots n$, sejam linearmente independentes.

c) Para cada autovalor λ_k e autovetor associado V_k a solução é do tipo 2.18:

$$X_k(t) = e^{\lambda_k t}V_k \tag{2.22}$$

.

Entretanto considerações devem ser feitas para o caso de raízes com multiplicidade e raízes complexas, os quais são detalhados nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Sistema Linear Homogêneo: Raízes reais e distintas

Consideramos o sistema linear homogêneo de EDO:

$$\frac{dX}{dt} = AX(t)$$

onde A é uma matriz quadrada não nula de ordem n e consideremos também que o polinômio

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

admite n raizes reais e distintas dois a dois:

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots, \lambda_n.$$

Obverva-se que

a) Cada equação algébrica

$$(A - \lambda_k I)V = 0, \quad k = 1, \cdots, n$$

gera um autovetor V_k, isto é:

$$AV_k = \lambda_k V_k, \quad k = 1, \cdots, n.$$

b) Verifica-se que os autovetores são linearmente independentes, para isto consideremos a combinação linear

$$\sum_{i=1}^{n} c_i V_i = 0,$$

aplicando

$$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_{j-1})(A-\lambda_{j+1})\cdots(A-\lambda_n)$$

todos os termos se anulam exceto o $j-$ésimo termo:

$$c_j V_j = 0.$$

Como $V_j \neq 0$ resulta que

$$c_j = 0,$$

variando o procedimento para $j = 1.\cdots, n$ conclui-se que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Portanto, os autovetores $V_1, V_2, \cdots, V_n$ são linearmente independentes.

c) Cada par λ_k e V_k gera a função

$$X_k(t) = e^{\lambda_k t} V_k, \quad k = 1, \cdots, n$$

a qual é solução da equação diferencial. Com efeito:

$$\begin{aligned} X_k'(t) &= \lambda_k e^{\lambda_k t} V_k \quad \text{e} \\ AX_k(t) &= e^{\lambda_k t} AV_k = \lambda_k e^{\lambda_k t} V_k. \end{aligned}$$

Como $X_k'(t) = AX_k(t)$ temos que cada $X_K(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais.

d) Vejamos que as soluções são linearmente independentes, para isto consideremos a combinação linear:

$$\sum_{i=1}^{n} c_k X_k(t) = 0,$$

substituindo $X_k(t) = e^{\lambda_k t} V_k$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} V_k = 0.$$

Como os autovetores V_k são linearmente independentes temos que

$$c_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \cdots, n,$$

e como $e^{\lambda_k t} \neq 0$ resulta que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

e portanto que as funções $X_k(t), \quad k = 1, \cdots, n$, são linearmente independentes.

Temos provado assim o seguinte Teorema:

Teorema 3.1. *Se o polinômio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ admite n-raizes $\lambda_k, \quad k = 1, \cdots, n$ reais e distintas dois a dois, então são gerados n- autovetores $V_k, \quad k = 1, \cdots, n$ linearmente independentes, solução das equações algébricas*

$$(A - \lambda_k I)V_k = 0, \quad k = 1, \cdots, n.$$

São geradas n-soluções linearmente independentes do sistema de equações diferenciais:

$$X_k(t) = e^{\lambda t} V_k, \quad k = 1, 2, \cdots n.$$

Exemplo 3.1. Seja o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d_1} & = & 5x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{d_2} & = & x_1 + 5x_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

em forma matricial, 3.1 é escrita como

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

onde, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad$ e $\quad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

O primeiro passo é calcular os autovalores, para isto determinamos as raízes da equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \left[\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$
\begin{aligned}
(5-\lambda)^2 - 1 &= 0 \\
(\lambda - 5)^2 &= 1 \\
\lambda - 5 &= \pm 1 \\
\lambda &= 5 \pm 1.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 5-1 &= 4 \\
\lambda_2 &= 5+1 &= 6
\end{aligned}
$$

portanto, temos raízes reais distintas $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 6$.

O segundo passo é determinar os autovalores:

a) Para $\lambda_1 = 4$, temos que achar V_1 tal que $(A - \lambda_1 I)V_1 = 0$, ou

$$
\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{onde} \quad V_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.
$$

Logo,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

O qual pode-se escrever como

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \widetilde{L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
$$

ou $u + v = 0$. Se $u = 1$, então $v = -1$, portanto um autovetor é da forma

$$
V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

a qual associa a solução

$$
X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}
$$

b) Para $\lambda = 6$, temos que achar V_2 tal que $(A - \lambda_2 I)V_2 = 0$, ou

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{onde} \quad V_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O qual pode-se escrever como

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \widetilde{L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ou $-u + v = 0$. Se $u = 1 \Rightarrow v = 1$, portanto um autovetor é da forma

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a qual associa a solução

$$X_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2. \tag{3.3}$$

c) Pelo Teorema 3.1 as soluções $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são linearmente independentes, logo a solução geral do sistema de equações diferenciais é:

$$X(t) = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Verificando que $X_1(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dX(t)}{dt} = 4C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 6C_2 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

e

$$AX(t) = C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{6t} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$= C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + C_2 e^{6t} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Como 3.7 é igual a 3.5 temos que $X(t)$ em 3.4 é solução 3.1.

Capítulo 4

Sistema Linear Homogêneo: Raízes reais com Multiplicidade

4.1 Raíz real de multiplicidade 2

Seja λ raiz real de multiplicidade 2 de polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, onde A é uma matriz real de ordem n do sistema de EDO: $X' = AX$.

Os autovalores são determinado pela solução do sistema:

$$(A - \lambda I)V = 0$$

Aplicando a solução de matriz aumentada temos:

$$(A - \lambda I|0)$$

fazendo redução das linhas e considerando que λ é multiplicidade 2, pode acontecer os seguintes casos:

Caso 1. O resultado final é da forma

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc:c} * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]}_{n\times n}$$

onde linha contendo $*$ indica uma linha não nula, ou seja, temos uma única linha nula.

Portanto uma das componentes pode-se escolher arbitrariamente e as outras são determinadas de maneira única pela solução do sistema $(n-1)\times(n-1)$ da forma:

$$\left[\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{matrix}}_{(n-n)\times(n-1)} \begin{matrix} \vdots & * \\ \vdots & * \\ \vdots & * \\ \vdots & * \end{matrix} \end{array}\right]$$

isto é $dim(A-\lambda I)=n-1$ e geramos um único autovetor.

Caso 2. O resultado é da forma

$$\left[\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{n\times n} \begin{matrix} \vdots & 0 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & 0 \end{matrix} \end{array}\right]$$

Neste caso, duas components podem-se escolher arbitrariamente e as outras são determinadas de maneira unica pela solução do sistema $(n-2)\times(n-2)$ da forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{matrix}}_{(n-2)\times(n-2)} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} \end{array}\right]$$

isto é, $dim(A-\lambda I)=n-2$ e geramos dois autovetores linearmente independentes.

A seguir analisamos cada um destes casos.

4.1.1 Um único autovetor linearmente independente

Consideremos que a equação algébrica

$$(A - \lambda I)V = 0$$

gera um único autovetor linearmente independente V_1 o qual gera a solução do sistema algébrico

$$X_1(t) = e^{\lambda t} V_1.$$

Para gerar um segundo vetor V_2, denominado autovetor generalizado, vamos supor uma segunda solução da forma

$$X_2(t) = te^{\lambda t} V_1 + e^{\lambda t} V_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_2'(t) &= e^{\lambda t} V_1 + \lambda t e^{\lambda t} V_1 + \lambda e^{\lambda t} V_2 \quad \text{e} \\ AX_2(t) &= te^{\lambda t} AV_1 + e^{\lambda t} AV_2 \\ &= te^{\lambda t} \lambda V_1 + e^{\lambda t} V_2. \end{aligned}$$

Substituindo em $X_2' = AX_2(t)$ temos

$$e^{\lambda t} V_1 + \lambda t e^{\lambda t} V_1 + \lambda e^{\lambda t} V_2 = \lambda t e^{\lambda t} V_1 + e^{\lambda t} AV_2$$

Cancelando termos e simplificando a exponencial resulta,

$$V_1 + \lambda V_2 = AV_2,$$

ordenando termos, o autovetor generalizado V_2 deve verificar a relação:

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1. \tag{4.1}$$

O vetor V_2 em 4.1 é denominado autovetor generalizado de A associado ao autovalor λ.

Temos provado assim, o seguinte teorema

Teorema 4.1. *Se o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite uma raíz com multiplicidade dois, sendo associado um único autovetor V_1, então pode-se gerar um autovetor generalizado V_2 pela solução do sistema algébrico:*

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1$$

As soluções linearmente independentes do sistema de EDO $X' = AX$ associado, ao autovalor λ são

$$\begin{cases} X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\ X_2(t) &= te^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}V_2 \end{cases}$$

Exemplo 4.1. A equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + 5y \end{aligned}$$

Pode-se escrever na forma matricial como

$$X'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} X(t) \quad ,$$

onde,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

a) Cálculo de autovalores.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 + 9 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &= (\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

Logo, temos um único autovalor $\lambda = 2$ com multiplicidade 2.

b) Cálculo do autovetor.

De $(A - \lambda I)V_1 = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

na forma da matriz aumentada,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Temos uma linha nula, logo uma componente pode-se escolher arbitrariamente na equação

$$-3v_1 + 3v_2 = 0,$$

se v_1=1, então $v_2 = 1$, logo temos o autovetor

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o qual gera a solução

$$X_1(t) = e^{2t}V_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Cálculo do autovetor generalizado.

Seja $V_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ o autovetor generalizado definido por

$$(A - 2I)V_2 = V_1.$$

Logo

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

como temos linha nula, uma das componentes pode-se escolher arbitrariamente na equação

$$-3u_1 + 3u_2 = 1,$$

se $u_1 = 0$, então $u = 1/3$. Logo o autovetor generalizado é

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução

$$X_2(t) = te^{2t}V_1 + e^{2t}V_2 = te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Verificação,

i) Verificando que $X_1(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais:

Como

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= 2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \\ AX_1(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

temos que $X_1'(t) = AX_1(t)$, e portanto $X_1(t)$ é solução da equação diferencial.

ii) Verificando que $X_2(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais:

Como

$$\begin{aligned} X_2'(t) &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \\ AX_2'(t) &= te^{2t}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \\ &= te^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

temos que $X_2'(t) = AX_2(t)$, e portanto $X_2(t)$ é solução de equação diferencial.

A solução geral é dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1X_1(t) + C_2X_2(t) \\ &= C_1e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2\left(te^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

onde, C_1 e C_2 são constantes reais arbitrárias.

4.1.2 Dois autovetores linearmente independentes

Neste caso $dim(A - \lambda I) = n - 2$ e portanto o polinômio característico

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

gera dois autovetores linearmente independentes V_1 e V_2 associados ao autovalor λ. Neste caso elas geram as seguintes soluções do sistema $X^{'}(t) = AX(t)$,

$$\begin{cases} X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2 \end{cases}$$

Afirmamos o seguinte Teorema,

Teorema 4.2. *Se λ é autovalor real de multiplicidade 2, com autovalores associados linearmente independentes V_1 e V_2, então as funções*

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2 \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes do sistema $X^{'}(t) = AX$.

Prova: Seja a combinação linear

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) = 0 \quad , \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$$

substituindo os valores das funções $X_i(t)$, temos

$$c_1e^{\lambda t}V_1 + c_2e^{\lambda t}V_2 = 0$$

cancelando o termo comum $e^{\lambda t}$, temos

$$c_1V_1 + c_2V_2 = 0$$

como V_1 e V_2 são linearmente independentes, então $c_1 = c_2 = 0$ o qual prova que $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são linearmente independentes.

De outro lado,

$$X_i^{'}(t) = \frac{d}{dt}[e^{\lambda t}V_i] = \lambda e^{\lambda t}V_i \quad , \quad i = 1, 2.$$

e

$$AX_i(t) = A[e^{\lambda t}V_i] = e^{\lambda t}AV_i = \lambda e^{\lambda t}V_i \quad , \quad i = 1, 2.$$

como $X_i'(t) = AX_i(t)$, então $X_i(t) = e^{\lambda t}V_i$ são soluções do sistema $X^{'}(t) = AX(t)$ para cada $i = 1, 2$. ■

Exemplo 4.2. Seja o sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Cálculo dos autovalores

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 \end{aligned}$$

logo, temos um único autovalor $\lambda = 3$ com multiplicidade 2.

b) Cálculo dos autovetores.

De $(A - \lambda I)V_1 = 0$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como as duas linhas são nulas, as duas componentes do vetor podem ser arbitrárias.

Fazendo $v_1 = 1$ e $v_2 = 0$, temos o autovetor

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o qual gera a solução do sistema de equações diferenciais:

$$X_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo $v_1 = 0$ e $v_2 = 1$, temos o autovetor

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o qual gera a solução do sistema de equações diferenciais

$$X_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verificação,

i) Verificando que $X_1(t)$ é solução diferencial:

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ AX_1(t) &= e^{3t}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como $X_1'(t) = AX_1(t)$, temos que $X_1(t)$ é solução da equação diferencial.

ii) Verificando que $X_2(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\begin{aligned} X_2'(t) &= 3e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ AX_2(t) &= e^{3t}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como $X_2'(t) = AX_2$, temos que $X_2(t)$ é solução da equação diferencial.

A solução geral da equação diferencial é dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1X_1(t) + c_2X_2(t) \\ &= c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

4.2 Raíz real de multiplicidade 3

Consideremos que o polinômio característico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

tenha um autovalor real λ de multiplicidade 3. Neste caso pode acontecer que o sistema algébrico

$$(A - \lambda I)V = 0$$

gere um, dois ou três autovalores linearmente independentes. A seguir determinamos para cada um destes casos as soluções associadas ao sistema de EDO

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

4.2.1 Três autovetores linearmente independentes

Consideremos que o sistema algébrico $(A - \lambda I)V = 0$ gere três autovetores V_1, V_2 e V_3 linearmente independentes associados ao autovalor λ. Neste caso elas geram as seguintes soluções do sistema $X' = AX$,

$$X_1(t) = e^{\lambda t} V_1$$
$$X_2(t) = e^{\lambda t} V_2$$
$$X_3(t) = e^{\lambda t} V_3$$

Afirmamos o seguinte Teorema,

Teorema 4.3. *Se λ é autovalor real de multiplicidade 3, com autovetores associados linearmente independentes V_1, V_2 e V_3, então as funções*

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t} V_1 \\ X_2(t) &= e^{\lambda t} V_2 \\ X_3(t) &= e^{\lambda t} V_3 \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes do sistema $X' = AX$.

Prova: Seja a combinação linear

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + c_3 X_3(t) = 0 \quad , \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$$

substituindo os valores das funções $X_i(t)$, temos

$$c_1 e^{\lambda t} V_1 + c_2 e^{\lambda t} V_2 + c_3 e^{\lambda t} V_3 = 0$$

cancelando o termo comum $e^{\lambda t}$, temos

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 = 0$$

como V_1, V_2 e V_3 são linearmente independentes, então $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ o qual prova que $X_1(t)$, $X_2(t)$ e $X_3(t)$ são linearmente independentes.
De outro lado,

$$X_i'(t) = \frac{d}{dt}[e^{\lambda t} V_i] = \lambda e^{\lambda t} V_i \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

e

$$AX_i(t) = A[e^{\lambda t}V_i] = e^{\lambda t}AV_i = \lambda e^{\lambda t}V_i \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

como $X_i'(t) = AX_i(t)$, então $X_i(t) = e^{\lambda t}V_i$ são soluções do sistema $X'(t) = AX(t)$ para cada $i = 1, 2, 3$. ■

Exemplo 4.3. Seja o sistema de EDO,

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$$

O polinõmio característico é dado por

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^3 \end{aligned}$$

cuja raíz é $\lambda = 2$ com multiplicidade 3. Os autovalores associados a $\lambda = 2$ são determinados pela solução do sistema algébrico,

$$(A - 2I)V = 0$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V = 0$$

isto significa que na matriz aumentada temos três linhas nulas, pela qual as três componentes do vetor $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ podem ser escolhidos arbitrariamente, isto é:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

com c_1, c_2 e c_3 constantes reais arbitrárias. Logo, para qualquer autovalor V pode-se escrever,

$$V = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda = 2$. Logo temos as soluções linearmente independentes do sistema de EDO.

$$X_1(t) = e^{2t}V_1 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = e^{2t}V_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3(t) = e^{2t}V_3 = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verificação,

a) Verificando que $X_1(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ AX_1(t) &= e^{2t} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $X_1'(t) = AX_1(t)$, então foi verificado que $X_1(t)$ é solução de EDO.

b) Verificando que $X_2(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\begin{aligned} X_2'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ AX_2(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $X_2'(t) = AX_2(t)$, então foi verificado que $X_2(t)$ é solução de EDO.

c) Verificando que $X_3(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\begin{aligned} X_3'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ AX_3(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $X_3'(t) = AX_3(t)$, então foi verificado que $X_3(t)$ é solução de EDO.

4.2.2 Um único autovetor linearmente independente

Consideremos que o sistema algébrico $(A - \lambda I)V = 0$ gere um único autovetor V_1. Neste caso a solução associada ao par $\lambda_1,\ V_1$, é

$$X_1(t) = e^{\lambda t}V_1$$

Para gerar, outras duas soluções $X_2(t)$ e $X_3(t)$, tal que $X_1(t)$, $X_2(t)$ e $X_3(t)$ sejam linearmente independentes seguimos o seguinte procedimento.

1. Gerar um autovetor generalizado V_2, tal que a solução associado seja da forma

$$X_2(t) = te^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}V_2.$$

Como $X_2'(t) = AX_2(t)$, temos:

$$X_2'(t) = e^{\lambda t}V_1 + \lambda te^{\lambda t}V_1 + \lambda e^{\lambda t}V_2$$

e

$$\begin{aligned} AX_2(t) &= te^{\lambda t}AV_1 + e^{\lambda t}AV_2 \\ &= \lambda te^{\lambda t}AV_1 + e^{\lambda t}AV_2, \end{aligned}$$

pois V_1 é autovetor de A.

Igualando em $X_2'(t) = AX_2(t)$, temos

$$e^{\lambda t}V_1 + \lambda te^{\lambda t}V_1 + \lambda e^{\lambda t}V_2 = \lambda te^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}AV_2$$

simplificando termos, obtém-se

$$e^{\lambda t}V_1 + \lambda e^{\lambda t}V_2 = e^{\lambda t}AV_2$$

cancelando $e^{\lambda t}$, resulta

$$V_1 + \lambda V_2 = AV_2$$

a qual pode-se escrever como,

$$AV_2 - \lambda V_2 = V_1$$

Portanto o autovetor generalizado é determinado pela solução do sistema algébrico:

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1$$

2. Gerar um segundo vetor generalizado V_3, tal que a solução associada seja da forma,

$$X_3(t) = \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}V_1 + te^{\lambda t}V_2 + e^{\lambda t}V_3$$

Nota: A derivada de t^2 é $2t$, por isto precisamos dividir t^2 por dois.

Como $X_3'(t) = AX_3(t)$ temos:

$$\begin{aligned} X_3'(t) &= te^{\lambda t}V_1 + \lambda\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}V_2 + \lambda te^{\lambda t}V_2 + \lambda e^{\lambda t}V_3 \\ AX_3(t) &= \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}AV_1 + te^{\lambda t}AV_2 + e^{\lambda t}AV_3 \\ &= \frac{t^2}{2}\lambda e^{\lambda t}V_1 + te^{\lambda t}AV_2 + e^{\lambda t}AV_3, \end{aligned}$$

pois V_1 é autovetor de A. Substituindo em $X_3'(t) = AX_3(t)$, obtém-se

$$te^{\lambda t}V_1 + \frac{t^2}{2}\lambda e^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}V_2 + \lambda te^{\lambda t}V_2 + \lambda e^{\lambda t}V_3 = \frac{t^2}{2}\lambda e^{\lambda t}V_1 + te^{\lambda t}AV_2 + e^{\lambda t}AV_3$$

simplificando termos, e cancelando $e^{\lambda t}$, temos:

$$tV_1 + V_2 + \lambda t V_2 + \lambda V_3 = tAV_2 + AV_3$$

reordenando os termos,

$$\begin{aligned} AV_3 + tAV_2 - \lambda t V_2 - \lambda V_3 - tV_1 &= V_2 \\ AV_3 + t(A - \lambda I)V_2 - \lambda V_3 - tV_1 &= V_2 \\ AV_3 + tV_1 - \lambda V_3 - tV_1 &= V_2, \end{aligned}$$

pois V_2 é autovetor generalizado. Cancelando termos, resulta

$$AV_3 - \lambda V_3 = V_2$$

portanto o segundo autovetor generalizado é obtido pela solução do sistema algébrico.

$$(A - \lambda I)V_3 = V_2.$$

Temos provado assim, o seguinte teorema

Teorema 4.4. *Se o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite uma raíz com multiplicidade três, sendo associado um único autovetor V_1, então pode-se gerar outros dois autovetores generalizados V_2 e V_3 pela solução do sistema algébrico.*

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)V_2 &= V_1 \\ (A - \lambda I)V_3 &= V_2 \end{aligned}$$

As soluções linearmente independentes do sistema de EDO $X' = AX$ associado, ao autovalor λ são

$$\begin{cases} X_1(t) &= e^{\lambda t} V_1 \\ X_2(t) &= t e^{\lambda t} V_1 + t e^{\lambda t} V_2 \\ X_3(t) &= \dfrac{t^2}{2} e^{\lambda t} V_1 + t e^{\lambda t} V_2 + e^{\lambda t} V_3 \end{cases}$$

Exemplo 4.4. Seja o sistema de EDO,

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

O polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

logo $P(\lambda)$ admite uma única raíz $\lambda = 1$ de multiplicidade três.

Determinamos os autovalores, pela solução do sistema algébrico:

$$(A - \lambda I) = 0.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} V = 0.$$

Como temos uma única linha nula na matriz, uma das componentes de vetor pode-se escolher arbitrariamente. Portanto. o sistema $(A - \lambda I)V = 0$ gera um único autovalor V_1. A seguir geramos todos os autovalores:

a) Geração do autovetor V_1.

Se $V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, temos:

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0$$
$$v_2 - v_3 = 0.$$

Escolhendo $v_3 = 1$, obtém-se o sistema não singular

$$2v_1 + v_2 = 0$$
$$v_2 = 1$$

cuja solução é: $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ e $v_3 = 1$. Logo, o autovalor V_1 é dado por

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

b) Geração do primeiro autovetor generalizado V_2.

Da equação algébrica

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1$$

temos,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo o sistema em forma explicita resulta,

$$\begin{aligned} 2u_1 + u_2 - u_3 &= 1 \\ U_2 - u_3 &= 1 \end{aligned}$$

se $u_3 = 0$, então $u_2 = 1$ e $u_1 = 0$, logo

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Geração do segundo autovetor generalizado V_3.

Da equação algébrica

$$(A - \lambda I)V_3 = V_2$$

temos

$$ou \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo o sistema algébrico em forma explicita, temos

$$\begin{aligned} 2w_1 + w_2 - w_3 &= 1 \\ w_2 - 3_3 &= 0 \end{aligned}$$

se $w_3 = 0$, então $w_2 = 0$ e $w_1 = \dfrac{1}{2}$, logo

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As soluções linearmente independente são geradas segundo o Teorema 4.4 por

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^t V_1 = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ X_2(t) &= te^t V_1 + e^t V_2 = te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_3(t) &= \frac{t^2 e^t}{2} V_1 + te^t V_2 + e^t V_3 \\ &= \frac{t^2 e^t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verificação,

a) Verificando que $X_1(t)$ é solução da equação diferencial

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ AX_1(t) &= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $X_1'(t) = AX_1(t)$, então $X_1(t)$ é solução da equação diferencial.

b) Verificando que $X_2(t)$ é solução da equação diferencial:

$$X_2'(t) = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} AX_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \\ &= te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \end{aligned}$$

como $X_2'(t) = AX_2(t)$, então $X_2(t)$ é solução da equação diferencial.

c) Verificando que $X_3(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\begin{aligned} X_3'(t) &= te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{t^2e^t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{t^2e^t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ AX_3(t) &= \frac{t^2e^t}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{t^2}{2}e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $X_3'(t) = AX_3(t)$, então $X_3(t)$ é solução da equação diferencial.

4.2.3 Dois autovetores linearmente independentes

Consideremos que o sistema $(A - \lambda I)V = 0$ gere dois autovetores V_1 e V_2 linearmente independentes associados ao autovalor λ. Neste caso elas geram as seguintes soluções do sistema $X' = AX$,

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2 \end{aligned}$$

Para gerar uma terceira solução $X_3(t)$ linearmente independente a $X_1(t)$ e $X_2(t)$, segue-se o seguinte procedimento:

a) Observe primeiro que a combinação linear $c_1V_1 + c_2V_2$ é autovetor de A, onde c_1, c_2 $\in \mathbb{R}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)(C_1V_1 + C_2V_2) &= C_1(A - \lambda I)V_1 + C_2(A - \lambda I)V_2 \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por ser V_1 e V_2 autovetores da matriz A. Esta combinação linear gera todos os autovetores associados ao autovalor λ.

b) Vamos supor que a solução $X_3(t)$ é da forma:

$$X_3(t) = te^{\lambda t}U + e^{\lambda t}W$$

isto é, estamos supondo que W é um autovetor generalizado de A e U é um autovetor de A. Para determinar U e W, vamos susbstituir $X_3(t)$ na equação diferencial,

$$\begin{aligned} X_3'(t) &= e^{\lambda t}U + \lambda te^{\lambda t}U + \lambda e^{\lambda t}W \\ AX_3(t) &= te^{\lambda t}AU + e^{\lambda t}AW \end{aligned}$$

susbstituindo em $X_3'(t) = AX_3(t)$ temos:

$$e^{\lambda t}U + \lambda e^{\lambda t}W + \lambda e^{\lambda t}U = te^{\lambda t}AU + e^{\lambda t}AW$$

ordenando termos:

$$(e^{\lambda t}AW - e^{\lambda t}W) + te^{\lambda t}AU - \lambda te^{\lambda t}U = e^{\lambda t}U$$

simplificando o termo $e^{\lambda t}$

$$(AW - \lambda W) + t(AU - \lambda U) = U$$

ou

$$(A - \lambda I)W + t(A - \lambda I)U = U$$

Pelo fato de U se comportar como autovetor de A, pode-se desacoplar a equação no sistema:

$$\begin{cases} t(A - \lambda I)U = 0 \\ (A - \lambda I)W = U \end{cases}$$

ou cancelando o termo t, temos

$$\begin{cases} (A - \lambda I)U = 0 \\ (A - \lambda I)W = U \end{cases} \tag{4.2}$$

Do item a), temos que o autovetor U é da forma

$$U = c_1V_1 + c_2V_2, \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbf{R},$$

e portanto o autovetor generalizado W é obtido da equação

$$(A - \lambda I)W = c_1V_1 + c_2V_2$$

Temos provado assim o seguinte Teorema,

Teorema 4.5. *Se o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite uma raíz com multiplicidade três, sendo associado dois autovetoeres V_1 e V_2 linearmente independentes, então pode-se gerar um autovetor generalizado V_3, solução de sistema algébrico.*

$$(A - \lambda I)V_3 = c_1V_1 + c_2V_2$$

onde $c_1,\ c_2$, são constantes reais arbitrárias.
As soluções linearmente independentes de sistema $X' = AX$, associado ao autovalor λ, é dada por:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2 \\ X_3(t) &= te^{\lambda t}(c_1V_1 + c_2V_2) + e^{t}V_3. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5. Seja o sistema de EDO

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} X$$

O polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\left[\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & -2 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ -4 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (5-\lambda)\, det \begin{pmatrix} -5-\lambda & -4 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} + 3\, det \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
& \quad -2\, det \begin{pmatrix} 8 & -5-\lambda \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 \\
&= (\lambda-1)^3.
\end{aligned}$$

Logo $P(\lambda)$ admite uma única raíz $\lambda = 1$ de multiplicidade três.

Determinamos os autovalores, pela solução do sistema algébrico:

$$(A-\lambda I)V_1 = 0$$

ou,

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Em termos da matriz aumentada, obtém-se

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 0 \\ 8 & -6 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \xrightarrow{L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

isto significa que temos duas linhas nulas, pelo qual duas das componentes do vetor podem-se escolher arbitrariamentes, o qual gera dois autovetores.

Determinamos a seguir os autovetores e o autovetor generalizado:

a) Cálculo dos autovetores.

Se $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, temos

$$4v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 0.$$

Colocando em evidência v_3 resulta,

$$v_3 = 2v_1 - \frac{3}{2}v_2.$$

Substituindo em V, obtém-se

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 2v_1 - 3v_2/2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

Fazendo $v_1 = 1$ e $v_2 = 0$, obtém-se o autovetor V_1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e fazendo $v_1 = 0$ e $v_2 = 2$, obtém-se o autovetor V_2:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) Cálculo do autovetor generalizado $V_3(t)$.

Da equação do autovalor generalizado do Teorema 4.5, temos para $c_1 = c_2 = 1$:

$$(A - I)V_3 = V_1 + V_2,$$

ou

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$$
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando a matriz aumentada, resulta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 1 \\ 8 & -6 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \xrightarrow{L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

obtem-se a equação

$$4v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 1.$$

Colocando em evidência v_3 resulta,

$$v_3 = -\frac{1}{2} + 2v_1 - \frac{3}{2}v_2.$$

Substituindo em V_3, obtém-se

$$V_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -1/2 + 2v_1 - 3v_2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

Os dois termos da direita são autovalores calculados no item a). Fazendo $v_1 = v_2 = 0$ temos o autovetor generalizado V_3:

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

As soluções linearmente independente são geradas segundo o Teorema 4.5 por

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^tV_1 = e^t\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\\
X_2(t) &= e^tV_2 = e^t\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}\\
X_3(t) &= te^t(V_1+V_2)+e^tV_3\\
&= te^t\left(\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}\right)+e^t\begin{bmatrix}0\\0\\-1/2\end{bmatrix}\\
&= te^t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+e^t\begin{pmatrix}0\\0\\-1/2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Verificação,

a) Verificando que $X_1(t)$ é solução da equação diferencial.

$$\begin{aligned}
X_1'(t) &= e^t\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\\
AX_1(t) &= e^t\begin{bmatrix}5&-3&-2\\8&-5&-4\\-4&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=e^t\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

como $X_1'(t)=AX_1(t)$, então $X_1(t)$ é solução da equação diferencial.

b) Verificando que $X_2(t)$ é solução da equação diferencial.

$$\begin{aligned}
X_2'(t) &= e^t\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}\\
AX_1(t) &= e^t\begin{bmatrix}5&-3&-2\\8&-5&-4\\-4&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}=e^t\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

como $X_2'(t) = AX_2(t)$, então $X_2(t)$ é solução da equação diferencial.

c) Verificando que $X_3(t)$ é solução da equação diferencial.

$$
\begin{aligned}
X_3(t) &= te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\
X_3'(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
&= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
AX_3(t) &= te^t \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\
&= te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

como $X_3'(t) = AX_3(t)$, então $X_3(t)$ é solução da equação diferencial.

4.3 Raíz real com multiplicidade 4

Consideramos que o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ tenha um autovalor real λ de multiplicidade 4. Neste caso pode acontecer que o sistema algébrico

$$(A - \lambda I)V = 0$$

gere um, dois, três, ou quatro autovetores linearmente independentes. A seguir determinamos soluções associadas ao sistema de EDO $X' = AX$ em cada um destes casos.

4.3.1 Quatro autovetores linearmente independentes

O sistema algébrico $(A - \lambda I)V = 0$ gera quatro autovetores V_1, V_2, V_3 e V_4 linearmente independentes associados ao autovalor λ. Neste caso elas geram as soluções do sistema de EDO $X' = AX$:

$$X_1(t) = e^{\lambda t}V_1$$
$$X_2(t) = e^{\lambda t}V_2$$
$$X_3(t) = e^{\lambda t}V_3$$
$$X_4(t) = e^{\lambda t}V_4$$

O seguinte Teorema afirma que estas funções são soluções linearmente independentes do sistema de equações diferenciais:

Teorema 4.6. *Se λ é autovalor real de multiplicidade 4, com autovetores associados V_1, V_2, V_3 e V_4 llnearmente independentes, então as funções*

$$X_1(t) = e^{\lambda t}V_1$$
$$X_2(t) = e^{\lambda t}V_2$$
$$X_3(t) = e^{\lambda t}V_3$$
$$X_4(t) = e^{\lambda t}V_4$$

são soluções linearmente independente do sistema $X' = AX$.

Prova

Seja a combinação linear

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + c_3X_3(t) + c_4X_4(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo os valores das funções $X_i(t)$ temos,

$$c_1e^{\lambda t}V_1 + c_2e^{\lambda t}V_2 + c_3e^{\lambda t}V_3 + c_4e^{\lambda t}V_4 = 0$$

cancelando o termo comum $e^{\lambda t}$, temos

$$c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4 = 0.$$

Como V_1, V_2, V_3 e V_4 são linearmente independentes, então

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

o qual prova que $X_1(t) =$, $X_2(t) =$, $X_3(t) =$ e $X_4(t) =$ são linearmente independentes.

De outro lado,

$$X_i'(t) = \frac{d}{dt}[e^{\lambda t}V_i] = \lambda e^{\lambda t}V_i \quad i = 1, 2, 3, 4$$

e

$$AX_i(t) = A[e^{\lambda t}V_i] = e^{\lambda t}AV_i = \lambda e^{\lambda t}V_i \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Como $X_i'(t) = AX(t)$, então $X_i(t)$ é solução do sistema $X'(t) = AX(t)$ para cada $i = 1, 2, 3, 4.$■

Exemplo 4.6. Seja o sistema de EDO.

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$$

O polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
P(\lambda) &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) = (2-\lambda)^4
\end{aligned}$$

cuja raíz é $\lambda = 2$ com multiplicidade 4.

Os autovetores associados a $\lambda = 2$ são determinados pela solução do sistema algébrico,

$$(A - 2I)V = 0$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V = 0$$

isto significa que na matriz aumentada temos quatro linhas nulas, pelo qual as quatro componentes vetor $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ podem ser escolhido arbitrariamente, isto é:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

com c_1, c_2, c_3 e c_4 constantes reais arbitrárias. Logo, pode-se escrever para qualquer autovetor V,

$$V = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo um coeficiente igual a 1 e os outros iguais a zero, obtém-se 4 autovetores linearmente independentes:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos as soluções linearmente independentes do sistemas de EDO:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{2t}V_1 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_2(t) = e^{2t}V_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X_3(t) &= e^{2t}V_3 = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad X_4(t) = e^{2t}V_4 = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificação,

a) Verificando que $X_1(t)$ é solução da equação diferencial:

$$
\begin{aligned}
X_1'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right) = 2e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\
AX_1(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} = 2e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

como $X_1'(t) = AX_1(t)$, então foi verificado que $X_1(t)$ é solução de EDO.

b) Verificando que $X_2(t)$ é solução da equação diferencial:

$$
\begin{aligned}
X_2'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = 2e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\\
AX_2(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\end{bmatrix} = 2e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

como $X_2'(t) = AX_2(t)$, então foi verificado que $X_2(t)$ é solução de EDO.

c) Verificando que $X_3(t)$ é solução da equação diferencial:

$$
\begin{aligned}
X_3'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = 2e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\\
AX_3(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix} = 2e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

como $X_3'(t) = AX_3(t)$, então foi verificado que $X_3(t)$ é solução de EDO.

d) Verificando que $X_4(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\begin{aligned} X_4'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 2e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ AX_4(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $X_4'(t) = AX_4(t)$, então foi verificado que $X_4(t)$ é solução de EDO.

Logo a solução geral do sistema é

$$X(t) = c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes arbitrárias.

4.3.2 Um único autovetor linearmente independente

Consideremos que o sistema algébrico $(A-\lambda I)V = 0$ gere um único autovetor V_1 associado ao autovalor λ de multiplicidade 4. Neste caso a solução da equação diferencial é,

$$X_1(t) = e^{\lambda t}V_1.$$

Para gerar, outras três soluções $X_2(t)$, $X_3(t)$ e $X_4(t)$ da equação diferencial, tal que $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ e $X_4(t)$ sejam linearmente independente segue-se o seguinte procedimento.

a) Gerar um primeiro autovetor generalizado V_2.

Vamos supor que a solução associada ao par (λ, V_2) seja da forma,

$$X_2(t) = te^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}V_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_2'(t) &= e^{\lambda t}V_1 + \lambda t e^{\lambda t}V_1 + \lambda e^{\lambda t}V_2 \quad e \\ AX_2(t) &= te^{\lambda t}AV_1 + e^{\lambda t}AV_2 = \lambda t e^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}AV_2. \end{aligned}$$

Substituindo em $X_2'(t) = AX_2(t)$ temos,

$$e^{\lambda t}V_1 + \lambda t e^{\lambda t}V_1 + \lambda e^{\lambda t}V_2 = \lambda t e^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}AV_2$$

simpificando termos, resulta

$$e^{\lambda t}V_1 + \lambda e^{\lambda t}V_2 = e^{\lambda t}AV_2$$

cancelando $e^{\lambda t}$ temos,

$$V_1 + \lambda V_2 = AV_1$$

a qual pode-se escrever como

$$AV_2 - \lambda V_2 = V_1$$

Portanto o autovetor generalizado é determinado pela solução de sistema algébrico:

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1$$

b) Gerar um segundo autovetor generalizado V_3.

Vamos supor que a solução associada ao par (λ, V_3) seja da forma,

$$X_3(t) = \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2}V_1 + te^{\lambda t}V_2 + e^{\lambda t}V_3.$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_3'(t) &= te^{\lambda t}V_1 + \frac{\lambda t^2 e^{\lambda t}}{2}V_1 + e^{\lambda t}V_2 + \lambda t e^{\lambda t}V_2 + \lambda e^{\lambda t}V_3 \\ AX_3(t) &= \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2}AV_1 + te^{\lambda t}AV_2 + e^{\lambda t}AV_3 \\ &= \frac{\lambda t^2 e^{\lambda t}}{2}V_1 + te^{\lambda t}AV_2 + e^{\lambda t}AV_3 \end{aligned}$$

Substituindo em $X_3'(t) = AX_3$ temos:

$$te^{\lambda t}V_1 + \frac{\lambda t^2 e^{\lambda t}}{2}V_1 + e^{\lambda t}V_2 + \lambda t e^{\lambda t}V_2 + \lambda e^{\lambda t}V_3 = \frac{\lambda t^2 e^{\lambda t}}{2}V_1 + te^{\lambda t}AV_2 + e^{\lambda t}AV_3$$

simplificando termos, e cancelando $e^{\lambda t}$, resulta

$$tV_1 + V_2 + \lambda t V_2 + \lambda V_3 = tAV_2 + AV_3$$

Reordenando os termos,

$$\begin{aligned} AV_3 + tAV_2 - \lambda t V_2 - \lambda V_3 - tV_1 &= V_2 \\ AV_3 + t(A - \lambda I)V_2 - \lambda V_3 - tV_1 &= V_2 \\ AV_3 + tV_1 - \lambda V_3 - tV_1 &= V_2 \end{aligned}$$

pois V_2 é autovetor generalizado. Cancelando termos, obtém-se

$$A(V_3 - \lambda V_3) = V_2.$$

Portanto o segundo autovetor generalizado é obtido pela solução do sistema algébrico

$$(A - \lambda I)V_3 = V_2$$

c) Gerar um terceiro autovetor generalizado V_4.

Vamos supor que a solução associada ao par (λ, V_4) seja da forma,

$$X_4(t) = \frac{t^3 e^{\lambda t}}{3!} V_1 + \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2} V_2 + t e^{\lambda t} V_3 + e^{\lambda t} V_4$$

Lembrando,

$$\begin{aligned} AV_1 &= \lambda V_1, \\ (A - \lambda I)V_2 &= V_1 \Rightarrow AV_2 - \lambda V_2 = V_1 \text{ ou } AV_2 = V_1 + \lambda V_2, \\ (A - \lambda I)V_3 &= V_2 \Rightarrow AV_3 - \lambda V_3 = V_2 \text{ ou } AV_3 = V_2 + \lambda V_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_4'(t) &= \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2} V_1 + \frac{\lambda t^3 e^{\lambda t}}{3!} V_1 + t e^{\lambda t} V_2 + \frac{\lambda t^2 e^{\lambda t}}{2} V_2 + e^{\lambda t} V_3 + \lambda t e^{\lambda t} V_3 + \lambda e^{\lambda t} V_4 \\ AX_4(t) &= \frac{t^3}{3!} e^{\lambda t} AV_1 + \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} AV_2 + t e^{\lambda t} AV_3 + t e^{\lambda t} AV_4 \\ &= \frac{t^3}{3!} e^{\lambda t} (\lambda V_1) + \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} (V_1 + \lambda V_2) + t e^{\lambda t} (V_2 + \lambda V_3) + e^{\lambda t} AV_4 \\ &= \lambda \frac{t^3}{3!} e^{\lambda t} V_1 + \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} AV_1 + \lambda \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} V_2 + t e^{\lambda t} V_2 + \lambda t e^{\lambda t} V_3 + e^{\lambda t} AV_4 \end{aligned}$$

substituindo termos em $X_4'(t) = AX_4$, temos:

$$e^{\lambda t} V_3 + \lambda e^{\lambda t} V_4 = e^{\lambda t} AV_4$$

cancelando $e^{\lambda t}$ resulta a equação para determinar o vetor generalizado V_4:

$$AV_4 - \lambda V_4 = V_3$$

ou

$$(A - \lambda I)V_4 = V_3$$

.

Temos provado assim, o seguinte teorema.

Teorema 4.7. *Se o polinômio característico* $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *admite uma raíz com multiplicidade quatro, sendo associado um único autovetor* V_1*, então pode-se gerar outras três autovetores generalizados* V_2*,* V_3 *e* V_4 *pela solução dos seguintes sistemas algébricos:*

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1$$
$$(A - \lambda I)V_3 = V_2$$
$$(A - \lambda I)V_4 = V_3$$

As soluções linearmente independentes do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ *são descritas pelas funções:*

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\
X_2(t) &= te^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}V_2 \\
X_3(t) &= \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}V_1 + te^{\lambda t}V_2 + e^{\lambda t}V_3 \\
X_4(t) &= \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t}V_1 + \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}V_2 + te^{\lambda t}V_3 + e^{\lambda t}V_4.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.7. Seja o sistema de EDO.

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$$

O polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
P(\lambda) &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) = (2-\lambda)^4
\end{aligned}$$

cuja raíz é $\lambda = 2$ com multiplicidade 4.

Determinamos os autovetores, pela solução do sistema algébrico,

$$(A-2I)V = 0$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução deste sistema algébrico é

$$\begin{aligned}
v_2 &= 0 \\
v_3 &= 0 \\
v_4 &= 0 \\
v_1 & \quad \text{arbitrária},
\end{aligned}$$

gerando assim um único autovetor linearmente independente. Escolhendo $v_1 = 1$ temos o autovetor

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para gerar os autovalores generalizados usamos o Teorema 4.7:

$$(A - 2I)V_2 = V_1$$
$$(A - 2I)V_3 = V_2$$
$$(A - 2I)V_4 = V_3$$

a) Cálculo do autovalor generalizado V_2.

De $(A - 2I)V_2 = V_1$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução algébrica

$$\begin{aligned} v_2 &= 1 \\ v_3 &= 0 \\ v_4 &= 0 \\ v_1 & \quad \text{arbitrária.} \end{aligned}$$

Escolhendo $v_1 = 0$, o vetor V_2 é

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução do sistema de equações diferenciais:

$$X_2(t) = te^{\lambda t} V_1 + V_2 e^{\lambda t} = te^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

b) Cálculo do autovalor generalizado V_3.

De $(A-2I)V_3 = V_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução algébrica

$$\begin{aligned} v_2 &= 0 \\ v_3 &= 1 \\ v_4 &= 0 \\ v_1 & \quad \text{arbitrária.} \end{aligned}$$

Escolhendo $v_1 = 0$, o vetor V_3 é

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução do sistema de equações diferenciais:

$$X_3(t) = \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} V_1 + t e^{\lambda t} V_2 + e^{\lambda t} V_3$$

ou

$$X_3(t) = \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Cálculo do autovalor generalizado V_4.

De $(A-2I)V_4 = V_3$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução algébrica

$$\begin{aligned}
v_2 &= 0 \\
v_3 &= 0 \\
v_4 &= 1 \\
v_1 & \quad \text{arbitrária}
\end{aligned}$$

a qual gera a solução do sistema de equações diferenciais:

$$X_4(t) = \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t}V_1 + \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}V_2 + te^{\lambda t}V_3 + e^{\lambda t}V_4.$$

ou

$$X_4(t) = \frac{t^3}{3!}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{\lambda t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto a solução geral é

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + C_3X_3(t) + C_4X_4(t)$$

onde,

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
X_2(t) &= te^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}V_2 = te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_3(t) &= \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}V_1 + te^{\lambda t}V_2 + e^{\lambda t}V_3 \\
&= \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{\lambda t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
X_4(t) &= \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t}V_1 + \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}V_2 + te^{\lambda t}V_3 + e^{\lambda t}V_4 \\
&= \frac{t^3}{3!}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{\lambda t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Verificação,

a) Verificando que $X_1(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais:

$$
\begin{aligned}
X_1'(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
AX_1(t) &= e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Como $X_1'(t) = AX_1(t)$, então $X_1(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais.

b) Verificando que $X_2(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais:

$$
X_2(t) = te^{\lambda t}V_1 + e^{\lambda t}V_2 = te^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
X_2'(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\
AX_2(t) &= te^{2t}\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\\
&= te^{2t}\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

como $X_2'(t) = AX_2(t)$, então $X_2(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais.

c) Verificando que $X_3(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais:

$$
\begin{aligned}
X_3(t) &= \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\\
X_3'(t) &= te^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}\\
&= \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
AX_3(t) &= \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $X_3'(t) = AX_3(t)$, então $X_3(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais.

d) Verificando que $X_4(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
X_4(t) &= \frac{t^3}{3!}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
X_4'(t) &= \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{3!}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ te^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
X_4'(t) &= \frac{t^3}{3!}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
AX_4(t) &= \frac{t^3}{3!}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ te^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
AX_4(t) &= \frac{t^3}{3!}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

como $X_4'(t) = AX_4(t)$, então $X_4(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais.

4.3.3 Três autovetores linearmente independentes

Considere que o sistema algébrico $(A - \lambda I)V = 0$ gere três autovetores V_1, V_2 e V_3 linearmente independentes. Neste caso as soluções associadas linearmente independentes são:

$$
\begin{aligned}
X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\
X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2 \\
X_3(t) &= e^{\lambda t}V_3
\end{aligned}
$$

Para gerar uma quarta solução $X_4(t)$ linearmente independente a $X_1(t)$, $X_2(t)$ e $X_3(t)$ segue-se o seguinte procedimento:

a) Observe primeiro que a combinação linear $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3$, onde c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$ geram todos os autovetores associados ao autovalor λ. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
(A - \lambda I)(c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3) &= c_1(A - \lambda I)V_1 + c_2(A - \lambda I)V_2 + c_3(A - \lambda I)V_3 \\
&= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}
$$

por ser V_1, V_2 e V_3 autovetores da matriz A.

b) Vamos supor que a solução $X_4(t)$ é da forma:

$$X_4(t) = te^{\lambda t}U + e^{\lambda t}W$$

isto é, estamos supondo que W é um autovetor generalizado de A e U é autovetor de A.

Para determinar U e W, vamos substituir $X_4(t)$ na equação diferencial,

$$\begin{aligned} X_4'(t) &= e^{\lambda t}U + \lambda te^{\lambda t}U + \lambda e^{\lambda t}W \\ AX_4(t) &= te^{\lambda t}AU + e^{\lambda t}AW \end{aligned}$$

substituindo em $X_4'(t) = AX_4(t)$ temos:

$$e^{\lambda t}U + te^{\lambda t}W + te^{\lambda t}U = te^{\lambda t}AU + e^{\lambda t}AW$$

simplificando o termo $e^{\lambda t}$,

$$(AW - \lambda W) + t(AU - \lambda U) = U$$

ou

$$(A - \lambda I)W + t(A - \lambda I)U = U$$

como U é autovetor de A, pode-se desacoplar a equação no sistema:

$$\begin{cases} t(A - \lambda I)U = 0 \\ t(A - \lambda I)W = U \end{cases}$$

cancelando o termo t temos:

$$\begin{cases} (A - \lambda I)U = 0 \\ (A - \lambda I)W = U \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $U = c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3$ como explicado em a), logo 4.3 é da forma

$$(A - \lambda I)W = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3$$

Temos provado assim o seguinte Teorema,

Teorema 4.8. *Se o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite uma raíz com multiplicidade quatro, sendo associado três autovetores V_1, V_2 e V_3 linearmente independentes, então pode-se gerar um autovetor generalizado V_4 solução do sistema algébrico.*

$$(A - \lambda I)V_4 = (c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3)$$

onde, c_1, c_2, c_3 *são constantes arbitrárias .*

A solução linearmente independente do sistema $X' = AX$*, associado ao autovalor* λ*, é dado por:*

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\
X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2 \\
X_3(t) &= e^{\lambda t}V_3 \\
X_4(t) &= te^{\lambda t}(c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3) + e^{\lambda t}V_4.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.8. Seja o sistema de EDO.

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X$$

O polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
P(\lambda) &= (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) = (2-\lambda)^4
\end{aligned}$$

cuja raíz é $\lambda = 2$ com multiplicidade 4.

Determinamos os autovetores, pela solução do sistema algébrico.

$$(A - 2I)V = 0$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema algébrico é:

$$\begin{aligned} v_1 &= \text{arbitrária} \\ v_2 &= 0 \\ v_3 &= \text{arbitrária} \\ \\ v_4 &= \text{arbitrária} \end{aligned}$$

Logo,

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Se $v_1 = 1$ e $v_3 = v_4 = 0$ temos o autovalor

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o qual gera a solução

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Se $v_3 = 1$ e $v_1 = v_4 = 0$ temos o autovalor

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o qual gera a solução

$$X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Se $v_4 = 1$ e $v_1 = v_3 = 0$ temos o autovalor

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o qual gera a solução

$$X_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Para gerar o autovetor generalizado V_4 linearmente independentes com V_1, V_2 e V_3 resolvemos a equação:

$$(A - \lambda I)V_4 = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

simplificando,

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = c_1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Escolhendo $c_1 = 1$, temos $v_2 = 1$, enquanto v_1, v_3 e v_4 são arbitrários.

Fazendo $v_1 = v_3 = v_4 = 0$ temos o autovalor generalizado

$$V_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o qual gera a solução:

$$X_4(t) = te^{2t}(c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3) + e^{2t}V_4 = te^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A verificação que X_1, X_2 e X_3 é solução do sistema de equações diferenciais é imediata, vamos verificar que $X_4(t)$ é também solução:

$$\begin{aligned} AX_4(t) &= te^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= te^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_4'(t) &= e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2te^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_4'(t) &= te^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $X_4'(t) = AX_4'(t)$, então $X_4(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais.

4.3.4 Dois autovetores linearmente independentes

Considere que o sistema algébrico $(A-\lambda I)V = 0$ gera dois autovetores V_1 e V_2 linearmente independentes, as quais geram as soluções.

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2. \end{aligned}$$

Para gerar o terceiro autovetor V_3, vamos supor que a solução é da forma:

$$X_3(t) = te^{\lambda t}U + e^{\lambda t}V_3$$

onde, $U = c_1V_1 + c_2V_2$. Logo,

$$\begin{aligned} X_3'(t) &= e^{\lambda t}U + \lambda e^{\lambda t}U + \lambda e^{\lambda t}V_3 \\ AX_3(t) &= te^{\lambda t}AU + e^{\lambda t}AV_3 \end{aligned}$$

substituindo em $X_3'(t) = AX_3(t)$, temos

$$e^{\lambda t}U + \lambda e^{\lambda t}U + \lambda e^{\lambda t}V_3 = te^{\lambda t}AU + e^{\lambda t}AV_3.$$

Simplificando $e^{\lambda t}$ e ordenando os termos, temos

$$(A-\lambda I)V_3 + t(A-\lambda I)U = 0$$

como $(A-\lambda I)U = 0$, pois U é autovetor de A, então a equação para gerar os autovalores generalizados é dada por:

$$(A-\lambda I)V_3 = U.$$

Esta equação algébrica pode originar dois casos.

i) São gerados dois vetores linearmente independentes V_3 e V_4, as quais geram as soluções

$$X_3(t) = te^{\lambda t}(c_1V_1 + c_2V_2) + e^{\lambda t}V_3$$
$$X_4(t) = te^{\lambda t}(c_1V_1 + c_2V_2) + e^{\lambda t}V_4$$

ii) É gerado um único autovetor V_3, a qual gera a solução

$$X_3(t) = te^{\lambda t}(c_1V_1 + c_2V_2) + e^{\lambda t}V_3.$$

Para gerar a quarta solução consideramos a solução $X_4(t)$ da forma,

$$X_4(t) = te^{\lambda t}W + e^{\lambda t}V_4$$

onde, $W = k_1V_1 + k_2V_2 + k_3V_3$. Como

$$\begin{aligned} AW &= k_1AV_1 + k_2AV_2 + k_3AV_3 \\ &= k_1\lambda V_1 + k_2\lambda V_2 + \lambda V_3 \\ &= \lambda(k_1V_1 + k_2V_2 + k_3V_3) \\ &= \lambda W \end{aligned}$$

temos que W é autovetor de A.

Logo,

$$\begin{aligned} X_4'(t) &= e^{\lambda t}W + \lambda te^{\lambda t}W + \lambda e^{\lambda t}V_4 \\ AX_4(t) &= te^{\lambda t}AW + e^{\lambda t}AV_4 \end{aligned}$$

substituindo na equação diferencial $X_4'(t) = AX_4(t)$ temos:

$$e^{\lambda t}W + \lambda te^{\lambda t}W + \lambda e^{\lambda t}V_4 = te^{\lambda t}AW + e^{\lambda t}AV_4$$

Cancelando $e^{\lambda t}$ e ordenando os termos, temos:

$$(A - \lambda I)V_4 + t(A - \lambda I)W = W$$

como $(A - \lambda I)W = 0$, temos a equação para gerar o autovalor generalizado V_4

$$(A - \lambda I)V_4 = W$$

a qual gera a solução do sistema de equações diferenciais

$$X_4(t) = te^{\lambda t}(\tilde{K}_2V_1 + \tilde{K}_2V_2 + \tilde{K}_3V_3) + e^{\lambda t}V_4.$$

Temos provado assim o seguinte teorema,

Teorema 4.9. *Se o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite uma raíz com multiplicidade 4, sendo associados dois autovetores V_1 e V_2 linearmente independentes, então para gerar os autovetores generalizados, considera-se os seguintes casos:*

Caso 1. *A equação algébrica* $(A-\lambda I)V = c_1V_1+c_2V_2$ *gera dois autovetores generalizados linearmente independentes* V_3 *e* V_4*. O conjunto de soluções linearmente independentes do sistema de equações diferenciais é dado por:*

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2 \\ X_3(t) &= te^{\lambda t}(c_1V_1+c_2V_2)+e^{\lambda t}V_3 \\ X_4(t) &= te^{\lambda t}(c_1V_1+c_2V_2)+e^{\lambda t}V_4 \end{aligned}$$

Caso 2. *A equação algébrica* $(A-\lambda I)V = c_1V_1+c_2V_2$ *gera um único autovetor generalizado linearmente independente* V_3*. O autovetor generalizado* V_4 *é gerado pela equação algébrica*

$$(A-\lambda I)V_4 = c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3.$$

O conjunto de soluções linearmente independentes do sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{\lambda t}V_1 \\ X_2(t) &= e^{\lambda t}V_2 \\ X_3(t) &= te^{\lambda t}(c_1V_1+c_2V_2)+e^{\lambda t}V_3 \\ X_4(t) &= te^{\lambda t}(k_1V_1+k_2V_2+k_3V_3)+e^{\lambda t}V_4. \end{aligned}$$

Exemplo 4.9. Seja o sistema de EDO.

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X(t)$$

O polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)^4
\end{aligned}
$$

cuja raíz é $\lambda = 2$ com multiplicidade 4.

Determinamos os autovetores, pela solução do sistema algébrico.

$$(A - 2I)V = 0$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com solução

$$
\begin{aligned}
v_1 & \quad \text{arbitrário} \\
v_2 &= 0 \\
v_3 &= 0 \\
v_4 & \quad \text{arbitrário.}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geramos a seguir os autovetores,

a) Se $v_1 = 1$ e $v_4 = 0$ temos o autovalor

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução

$$X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Se $v_1 = 0$ e $v_4 = 1$ temos o autovalor

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a qual gera a solução

$$X_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Geração dos autovetores generalizados. Consideremos a equação

$$(A - 2I)V = c_1V_1 + c_2V_2$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Logo, $v_2 = c_1$, $v_3 = 0$, $c_2 = 0$, e v_2, v_3 arbitrários. Escolhendo $v_2 = c_1 = 1$, temos

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \\ 0 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se $v_1 = 1$ e $v_4 = 0$ temos o autovetor generalizado

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a qual gera a solução da equação diferencial

$$X_3(t) = te^{2t}(1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2) + e^{2t}V_3 = te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se $v_1 = 0$ e $v_4 = 1$ temos o autovetor generalizado

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a qual gera a solução da equação diferencial

$$X_3(t) = te^{2t}(1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2) + e^{2t}V_3 = te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verificando que $X_3(t)$ é solução:

$$X_3'(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX_3(t) = te^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= te^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como $X_3'(t) = AX_3(t)$, então $X_3(t)$ é solução do sistema de equações diferenciais.

Capítulo 5

Sistema Linear Homogêneo: Raízes Complexas

Sejam $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ raízes complexas de polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Seja V_1 o autovetor associado ao autovalor complexo λ_1, isto é V_1 verifica

$$(A - \lambda I)V_1 = 0 \tag{5.1}$$

como $A - \lambda I$ é em geral uma matriz complexa, então V_1 é em geral um vetor complexo.

$$\overline{(A - \lambda I)V_1} = 0$$

Tendo em conta que $\overline{ab} = \overline{a}\ \overline{b}$ e $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ se a e b são números complexos, temos:

$$(\overline{A} - \overline{\lambda I})\overline{V_1} = 0$$

como A e I são matrizes reais $\overline{A} = A$ e $\overline{I} = I$, logo:

$$(\overline{A} - \overline{\lambda}I)\overline{V_1} = 0 \tag{5.2}$$

a equação 5.2 indica que $\overline{V_1}$ é um vetor associado ao autovalor $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Assim, temos provado o seguinte teorema, que é válido para matrizes reais de dimensão n.

Teorema 5.1. *Seja A uma matriz real de dimensão n. Seja o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, o qual admite as raízes complexas conjugadas λ_1 e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Se V_1 é um autovetor associado ao autovalor complexo λ_1, então $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ é uma autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2$.*

No caso de autovalores reais, se V_1 é um auvetor associado ao autovalor λ_1, o qual é raíz simples de $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, conhecemos que $e^{\lambda_1 t} V_1$ é solução do sistema de EDO $X' = AX$. Afirmamos no próximo Teorema, que o mesmo acontece se λ_1 e λ_2 são raízes complexas conjugados.

Teorema 5.2. *Seja o sistema linear homogêneo coeficientes constantes*

$$X' = AX \tag{5.3}$$

se o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite raízes complexas conjugadas λ_1 e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ com autovetores associados V_1 e $V_2 = \overline{V_1}$ respectivamente, então as funções

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 \qquad e \qquad X_2(t) = e^{\overline{\lambda_1} t} \overline{V_1} \tag{5.4}$$

são soluções complexas, linearmente independentes do sistema 5.3.

Prova

Tendo em conta que $AV_1 = \lambda V_1$ e $A\overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_1 V_1}$ temos:

$$\begin{aligned} AX_1(t) &= A(e^{\lambda_1 t} V_1) = e^{\lambda_1 t} AV_1 = e^{\lambda_1 t} \lambda_1 V_1 \\ X_1'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{\lambda_1} V_1) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2X_2(t) &= A(e^{\overline{\lambda_1} t} \overline{V_1}) = e^{\overline{\lambda_1} t} A\overline{V_1} = e^{\overline{\lambda_1} t} \overline{\lambda_1 V_1} \\ X_2'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{\overline{\lambda_1}} \overline{V_1}) = \overline{\lambda_1} e^{\overline{\lambda_1} t} \overline{V_1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$X_1'(t) = AX_1(t) \qquad e \qquad X_2'(t) = AX_2(t)$$

e $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções complexas do sistema 5.3.

Vejamos agora que $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções linearmente independentes, para isto consideremos o Wronskiano de $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\overline{\lambda_1} t}$:

$$\begin{aligned} \omega(e^{\lambda_1 t}, e^{\overline{\lambda_1}}) &= \det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\overline{\lambda_1} t} \\ \frac{d}{dt}(e^{\lambda_1 t}) & \frac{d}{dt}(e^{\overline{\lambda_1} t}) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\overline{\lambda_1} t} \\ \lambda e^{\lambda_1 t} & \lambda e^{\overline{\lambda_1} t} \end{bmatrix} \\ &= \overline{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} e^{\overline{\lambda_1} t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} e^{\overline{\lambda_1} t} \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \omega(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2}) &= (\lambda_1 - \lambda_2)e^(\lambda_1 + \lambda_2)t \\ &= 2iIm(\lambda_1)e^{2Re(\lambda_1)t} \end{aligned}$$

Dado que $e^{2Re(\lambda_1)t}$ é sempre positivo e $2iIm(\lambda_1) \neq 0$ pois λ_1 é complexo, tesmo que

$$\omega(e^{\lambda_1 t}, e^{\overline{\lambda_1}}) \neq 0$$

portanto $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\overline{\lambda_1}}$ são linearmente independentes.

Agora, vamos supor pelo absurdo que $X_1(t) = e^{\lambda_1 t}V_1 \quad e \quad X_2(t) = e^{\overline{\lambda_1}t}\overline{V_1}$ são linearmente dependentes. Logo existe uma constante $K \in C$ tal que $X_1 = KX_2(t)$. Pelo qual

$$e^{\lambda_1 t}V_1 = Ke^{\overline{\lambda_1}t}\overline{V_1}$$

multiplicando por V_1 temos

$$e^{\lambda_1 t}V_1\overline{V_1} = Ke^{\overline{\lambda_1}t}(\overline{V_1})^2$$

ou

$$e^{\lambda_1 t}|V_1|^2 = Ke^{\overline{\lambda_1}t}(\overline{V_1})^2$$

o qual pode-se escrever como

$$e^{\lambda_1 t} = K_1 e^{\overline{\lambda_1}t}$$

onde $K_1 = \dfrac{K(\overline{V_1})^2}{|V_1|^2}$ constante complexo, mas isto significa que $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\overline{\lambda_1}t}$ são linearmente dependentes, o qual é uma contradição. Portanto, $X_1(t) = e^{\lambda_1 t}V_1$ e $X_2(t) = e^{\lambda_1 t}\overline{V_1}$ são soluções complexa linearmente independetes do sistemas de EDO 5.3.

Logo, se $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite duas raízes complexas, temos provado que o sistema 5.3 admite duas soluções complexas conjugadas do tipo 5.4. Como a matriz A é real, desejamos obter soluções reais do sistema 5.3. Para isto, observe que

$$\overline{X_1}(t) = e^{\lambda_1 t}V_1 = e^{\overline{\lambda_1}t}\overline{V_1} = X_2(t)$$

isto é $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções complexas conjigadas. Além do mais

$$X_1(t) + \overline{X_1}(t) = 2Re(X_1(t))$$

$$X_1(t) - \overline{X_1}(t) = 2Im(X_1(t))$$

Multiplicando por $-i$ a ultima equação temos,

$$-i(X_1(t) - \overline{X_1}(t)) = 2Im(X_1(t))$$

Portanto, pode-se escrever as funções reais,

$$Y_1(t) = 2Re(X_1(t)) = \frac{1}{2}\left[X_1(t) + \overline{X_1}(t)\right]$$
$$Y_2(t) = Im(X_1(t)) = \frac{-i}{2}\left[X_1(t) - \overline{X_1}(t)\right]$$

as quais são soluções do sistema 5.3, pois são combinações lineares das soluções complexas $X_1(t)$ e $\overline{X_1}(t)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &= Re\left[e^{\lambda_1 t}V_1\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[X_1(t) + \overline{X_1}(t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{\alpha t}e^{i\beta t}V_1 + e^{\alpha t}e^{-i\beta t}\overline{V_1}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{\alpha t}\left[(\cos\beta t + i\sin\beta t)V_1 + (\cos\beta t - i\sin\beta t)\overline{V_1}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{\alpha t}\left[(\cos\beta t(V_1 + \overline{V_1}) + \sin\beta t i(V_1 - \overline{V_1})\right] \\
&= e^{\alpha t}\left[(\cos\beta t\frac{1}{2}(V_1 + \overline{V_1}) - \sin\beta t\frac{i}{2}(-V_1 + \overline{V_1})\right]
\end{aligned}$$

$$Y_1(t) = e^{\alpha t}\left[\cos\beta t Re(V_1) - \sin\beta t Im(V_1)\right]$$

de outro lado

$$\begin{aligned}
Y_2(t) &= Im(X_1(t)) = \frac{-i}{2}\left[X_1(t) - \overline{X_1}(t)\right] \\
&= \frac{-i}{2}\left[e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)V_1 - e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)\overline{V_1}\right] \\
&= e^{\alpha t}\left[\cos\beta t\frac{i}{2}(-V_1 + \overline{V_1}) + \frac{sin\beta t}{2}(V_1 + \overline{V_1})\right] \\
Y_2(t) &= e^{\alpha t}\left[\cos\beta t Im(V_1) + \sin\beta t Re(V_1)\right]
\end{aligned}$$

O qual pode ser escrita, renomeando

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= e^{\alpha t}\left[\sin\beta t Re(V_1) + \cos\beta t Im(V_1)\right] \\ Y_2(t) &= e^{\alpha t}\left[\cos\beta t Re(V_1) - \sin\beta t Im(V_1)\right] \end{aligned}$$

A solução geral fica da forma

$$X(t) = C_1 Y_1(t) + C_2 Y(t) \quad ; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

a qual é a solução geral real do sistema 5.3.

Exemplo 5.1. Consideremos o sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X \tag{5.5}$$

O polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 2 \end{aligned}$$

Com raízes,

$$\lambda = \frac{-2_- + \sqrt{4} - 8}{2} = \frac{-2_- + 2i}{2} = -1_- + i$$

ou com autovalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + i \\ \lambda_2 &= \overline{\lambda} = -1 - i \end{aligned}$$

Calculamos agora, o autovetor $V_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ correspondente do autovalor $\lambda_1 = -1 + i$, resolvem o sistema:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$(1-i)u + v = 0$$

se $u = 1 + i$, então

$$\begin{aligned}(1-i)(1+i) + v &= 0\\ (1-i^2) + v &= 0\\ 2 + v &= 0\\ v &= -2\end{aligned}$$

logo $V_1 = \begin{pmatrix} i+i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Portanto, $Re(V_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Im(V_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ substituimos na solução:

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= e^{\alpha t}\left[\sin\beta t Re(V_1) + \cos\beta t Im(V_1)\right]\\ Y_2(t) &= e^{\alpha t}\left[\cos\beta t Re(V_1) - \sin\beta t Im(V_1)\right]\end{aligned}$$

Considerando que $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ temos,

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{-t}\left[\sin t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = e^{-t}\begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ -2\sin t \end{bmatrix} \\ X_2(t) = e^{-t}\left[\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{bmatrix} \end{cases}$$

A solução geral $X(t)$ é dada como combinação linear de $X_1(t)$ e $X_2(t)$:

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t)$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais arbitrárias. Vamos verificar que X_1 e X_2 são soluções do sistema 5.5:

i)

$$X_1'(t) = -e^{-t}\begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ -2\sin t \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} -2\sin t \\ 2\sin t - 2\cos t \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$AX_1 = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ -2\sin t \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} -2\sin t \\ 2\sin t - 2\cos t \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Como 5.7=5.8, então foi verificado que $X_1(t)$ é solução de 5.5.

$$\textbf{ii)} \qquad X_2'(t) = -e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} -\sin t - \cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} -2\cos t \\ 2\sin t + 2\cos t \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$AX_2 = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} -2\cos t \\ 2\sin t + 2\cos t \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

Como 5.10=5.11, foi verificado que $X_2(t)$ é solução de 5.5.

5.1 Multiplicidade de Raízes Complexas

Autovalores λ_1 e $\overline{\lambda_1}$, λ_2 e $\overline{\lambda_2}$. Se ω_1 é autovetor complexo, associado a λ_1, isto é, solução de

$$(A - \lambda I)\omega_1 = 0$$

aplicando conjugado, temos

$$(A - \bar{\lambda} I)\bar{\omega_1} = 0$$

isto é, $\bar{\omega_1}$ é autovetor complexo associado a $\bar{\lambda_1}$. Similarmente se ω_2 é autovetor complexa associado a λ_2, isto é,

$$(A - \lambda_2 I)\omega_2 = 0$$

aplicando conjugado, temos:

$$(A - \overline{\lambda_2} I)\bar{\omega_2} = 0$$

isto é, $\bar{\omega_2}$ é autovetor associado a $\bar{\lambda_2}$. São gerados as seguintes soluções complexas:

$$\begin{cases} Z_1(t) &= e^{\lambda t}\omega_1 \\ Z_2(t) &= e^{\bar{\lambda} t}\bar{\omega_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_3(t) &= e^{\lambda t}\omega_2 \\ Z_4(t) &= e^{\bar{\lambda} t}\bar{\omega_2} \end{cases}$$

Similar ao caso do sistema linear de ordem dois podem-se gerar soluções reis. Segue.

$$\begin{cases} V_1 &= Re(\omega_1) \\ V_2 &= Im(\omega_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_3 &= Re(\omega_2) \\ V_4 &= Im(\omega_2) \end{cases}$$

e

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$$

$$\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$$

Portanto, as soluções reais são:

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{\alpha_1 t}[\cos(\beta_1 t)]V_1 - \sin(\beta_1 t)V_2] \\ X_2(t) = e^{\alpha_1 t}[\cos(\beta_1 t)]V_2 + \sin(\beta_1 t)V_1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3(t) = e^{\alpha_2 t}[\cos(\beta_2 t)]V_3 - \sin(\beta_2 t)V_4] \\ X_4(t) = e^{\alpha_2 t}[\cos(\beta_2 t)]V_4 + \sin(\beta_2 t)V_3] \end{cases}$$

Temos provado o seguinte teorema.

Teorema 5.3. *Se o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite raízes complexos conjugado com autovalores λ_1 e $\bar{\lambda_1}$, λ_2 e $\bar{\lambda_2}$, sendo associados aos respectivos autovetores complexos ω_1 e $\bar{\omega_1}$, onde $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ e $\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, $V_1 = Re(\omega_1)$ e $V_2 = Im(\omega_1)$, $V_3 = Re(\omega_2)$ e $V_4 = Im(\omega_2)$ e*

$$X_1(t) = e^{\alpha_1 t}[\cos(\beta_1 t)V_1 - \sin(\beta_1 t)V_2]$$

$$X_2(t) = e^{\alpha_1 t}[\cos(\beta_1 t)V_2 + \sin(\beta_1 t)V_1]$$

$$X_3(t) = e^{\alpha_2 t}[\cos(\beta_2 t)V_3 - \sin(\beta_2 t)V_4]$$

$X_4(t)$ são soluções reais.

como $(A - \lambda I)V = 0$, obtém-se o autovetor generalizado complexo

$$A - \lambda I \omega = V$$

aplicando conjugado temos

$$A - \bar{\lambda} I \bar{\omega} = \bar{V}$$

isto é $\bar{\omega}$ é autovetor generalizado de $\bar{\lambda}$. Portanto ω e $\bar{\omega}$ geram as soluções

$$Z_3(t) = te^{\lambda t}V + e^{\lambda t}\omega$$
$$Z_4(t) = te^{\bar{\lambda} t}\bar{V} + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\omega}$$

Em resumo, temos as 4 soluções complexas

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= e^{\lambda t}V \\ Z_2(t) &= e^{\bar{\lambda} t}\bar{V} \\ Z_3(t) &= te^{\lambda t}V + e^{\lambda t}\omega \\ Z_4(t) &= te^{\bar{\lambda} t}V + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\omega} \end{aligned}$$

similar ao caso do sistema de ordem, podem obter soluções reais. Se

$$V_1 = Re(V)$$
$$V_2 = Im(V)$$
$$V_3 = Re(\omega)$$
$$V_4 = Im(\omega)$$

e $\lambda = \alpha + i\beta$ as soluções reais são.

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{\alpha_1 t}[\cos(\beta_1 t)V_1 - \sin(\beta_1 t)V_2] \\ X_2(t) = e^{\alpha_1 t}[\cos(\beta_1 t)V_2 + \sin(\beta_1 t)V_1] \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_3(t) = e^{\alpha_2 t}[\cos(\beta_2 t)V_3 - \sin(\beta_2 t)V_4] \\ X_4(t) = e^{\alpha_2 t}[\cos(\beta_2 t)V_4 + \sin(\beta_2 t)V_3] \end{cases}$$

complexo $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ de multiplicidade 2. Seja o autovetor complexo V solução de

$$(A - \lambda I)V = 0$$

aplicando conjugado na equação e tendo em conta que $\bar{A} = A$, pois A é matriz real, temos

$$(A - \bar{\lambda}I)\bar{V} = 0$$

Portanto, $\bar{V}$ é autovetor de $\bar{\lambda}$. Logo, λ e V geram a solução complexa

$$Z_1(t) = e^{\lambda t}V$$

e $\bar{\lambda}$ $\bar{V}$ geram a solução complexa

$$Z_2(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{V}$$

Para gerar as outras soluções, vamos supor que a solução complexa $Z_3(t)$ é da forma:

$$Z_3(t) = te^{\lambda t}V + e^{\lambda t}\omega$$

substituindo

$$z_3'(t) = \lambda te^{\lambda t}V + e^{\lambda t}V + \lambda e^{\lambda t}\omega AZ_3(t) = te^{\lambda t}AV + e^{\lambda t}A\omega$$

na equação diferencial $Z_3'(t) = AZ_3(t)$ temos $\lambda te^{\lambda t}V + e^{\lambda t}V + \lambda e^{\lambda t}\omega = te^{\lambda t}AV + e^{\lambda t}A\omega$ cancelando $e^{\lambda t}$ e ordenando os termos resulta, $(A - \lambda I)\omega + t(AV - \lambda V) = V$.

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_1 - \sin(\beta t)V_2] \\
X_2(t) &= e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_2 + \sin(\beta t)V_1] \\
X_3(t) &= e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_1 - \sin(\beta t)V_2] + e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_3 - \sin(\beta t)V_4] \\
X_4(t) &= e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_2 + \sin(\beta t)V_1] + e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_4 + \sin(\beta t)V_3]
\end{aligned}$$

Teorema 5.4. *Se o polinômio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ admite raízes complexas conjugados com autovalores λ_1 e $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$, sendo associados, aos respectivas autovetores complexos V e $\bar{V}$, onde $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\lambda_1} = \alpha_2 - i\beta$ de multiplicidade 2. Sejam V e ω soluções de:*

$$\begin{cases} (A - \lambda I)V = 0 \\ (A - \lambda I)\omega = V \end{cases}$$

onde, V é autovetor complexo e ω é autovetor generalizado complexon associado ao autovalor complexo λ. Se

$$V_1 = Re(V)$$

$$V_2 = Im(V)$$

$$V_3 = Re(\omega)$$

$$V_4 = Im(\omega)$$

então, as soluções reais da EDO são:

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_1 - \sin(\beta t)V_2] \\
X_2(t) &= e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_2 + \sin(\beta t)V_1] \\
X_3(t) &= te^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_1 - \sin(\beta t)V_2] + e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_3 - \sin(\beta t)V_4] \\
X_4(t) &= te^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_2 - \sin(\beta t)V_1] + e^{\lambda t}[\cos(\beta t)V_4 + \sin(\beta t)V_3].
\end{aligned}$$

Considerações Finais

Neste Trabalho de Conclusão de Curso abordamos a solução de sistemas de equações diferenciais lineares pelo método dos autovalores e autovetores. São descritos ao detalhe todo o processo para determinar estas soluções e formulados os teoremas para cada um destes casos. Para esclarecer a teoria são apresentados exemplos para cada caso, os quais foram escolhidos com a dimensão mínima da matriz de coeficientes do sistema linear de equações diferenciais.

Sistemas lineares de equações diferenciais lineares cujo polinômio característico apresenta simultaneamente uma combinação dos três tipos de raízes são facilmente resolvíveis com os teoremas desenvolvidos neste trabalho, por exemplo o sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} X$$

tem polinômio característico

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (0-\lambda)\cdot(0-\lambda)\cdot(4-\lambda) + 2 - (-5)\cdot(0-\lambda) \\ &= -(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-2) \end{aligned}$$

tem raízes, ou autovalores, $\lambda_{1=}1$ com multiplicidade dois e $\lambda_2 = 2$ uma raíz real simples. O processo solução consiste em determinar os autovalores e as soluções do sistema de equações diferenciais associadas ao autovalor real com multiplicidade dois e similarmente com à raiz real simples. A solução geral será a combinação linear de todas estas soluções.

No caso do sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

o polinômio característico

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)\cdot(1-\lambda)^3 \end{aligned}$$

admite raízes reais $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$ de multiplicidade três. Aplicando os teoremas para cada caso, obtêm-se a solução geral do sistema de equações diferenciais ordinárias.

Nos livros e bibliografia consultada não foram encontrados exemplos e teoria completa para o caso do polinômio característico ter uma raiz com multiplicidade maior ou igual a três, o qual foi analisado neste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] BOYCE, William E.; RICHARD, C. Diprima *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* 9º Edição; Tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Íório [Reimpr.]Rio de Janeiro-RJ: Editora Gen LTC - Livros Técnicos e Cientifícos.2011.

[2] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. *Equações Diferenciais.* Terceira edição. Tradução:Alfredo Alves de Farias; revisão técnica: Antonio Pertence junior - São Paulo: Pearson Markron Books, 2001.

[3] BOYER, Carl Bejamm *Historia da Matemática*; Tradução: Elza F. Gomide. Edgard Blücher, ED. da Universidade de São Paulo. 1974.