UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LAUDIANE RUFINO GOMES
MÔNICA CRISTINA DOS REIS PINHEIRO
ROSÂNGELA LEAL FEITOZA

ESTUDO DOS POLIEDROS

Macapá-AP
2012

LAUDIANE RUFINO GOMES
MÔNICA CRISTINA DOS REIS PINHEIRO
ROSÂNGELA LEAL FEITOZA

ESTUDO DOS POLIEDROS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof^{o}. Dr. GUZMÁN EULALIO ISLA CHAMILCO.

Macapá-AP
2012

LAUDIANE RUFINO GOMES
MÔNICA CRISTINA DOS REIS PINHEIRO
ROSÂNGELA LEAL FEITOZA

ESTUDO DOS POLIEDROS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado pela comissão avaliadora do Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá. Composta pelos seguintes membros :

AVALIADORES:

Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco

Prof. Dr. Jose Walter Cardenas Sotil

Prof(a). Josiane Oliveira Santos

Avaliado em: ____/____/____

Macapá-AP
2012

Dedicamos este trabalho primeiramente a Deus, à nossas famílias e ao nosso orientador, professor Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco que nos ajudou muito e contribuiu para a conclusão do mesmo.

Em primeiro lugar agradecemos a Deus por nos dar forças para chegarmos ao término do nosso curso. Agradecemos aos familiares que sempre nos incentivaram e nos apoiaram em especial aos nossos pais que nos deram a oportunidade e o incentivo para que tivéssemos amor pelos estudos. Agradecemos aos amigos pelo apoio e os bons momentos compartilhados que, de uma forma ou de outra contribuíram para a nossa formação. Agradecemos aos professores do curso que, com seu profissionalismo e suas aulas nos prepararam para esta jornada possibilitando nossa formação em Licenciatura em Matemática. E em especial ao nosso orientador Professor Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco pela dedicação, paciência e por todas as contribuições ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

"A principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe."

(Jean Piaget)

Resumo

Esse trabalho é dedicado ao estudo dos poliedros, analisando seus aspectos históricos desde seu surgimento com relatos de grandes historiadores, filósofos e matemáticos, como Euclides, que formulou e organizou todo o conhecimento sobre geometria de sua época nos Elementos e Platão, que estudou os poliedros regulares conhecidos posteriormente como os poliedros de Platão, entre outros que deram sua contribuição para a geometria. Até chegarmos a sua construção, visualização e aplicações de teoremas. O foco desse trabalho é entender de modo significativo os conceitos geométricos dos poliedros, identificar seus elementos e diferenciá-los quanto a sua classificação.
Palavras-chave: geometria, história, poliedros, teorema, demonstração.

Resumen

Este trabajo es dedicado al estudio de los poliedros, analisando sus aspectos históricos desde su surgimiento com relatos de grandes historiadores, filósofos e matemáticos, como Euclides, que formuló y organizó todo el conocimiento sobre geometria de su época nos Elementos y Platon, que estudió los poliédros regulares conocidos posteriormente como los poliédros de Platon, entre otros que dieran su contribuición para a geometria. Hasta obtener su construcción,visualización y aplicaciones de teoremas. El foco deste trabajo es entender de modo significativo los conceptos geométricos de los poliédros, identificar sus elementos e diferenciárlos cuanto a su clasificación.

Palavras-clave: geometria, história, poliédros, teorema, demonstración.

Lista de Figuras

Índice

Capítulo 1

Introdução

Podemos dizer que na matemática a geometria é a parte que estuda o espaço e as figuras que podem ocupá-lo. Assim, temos uma natureza repleta de formas geométricas variadas como os círculos, triângulos, cubos, pentágonos, hexágonos, decaedros, espirais e outros. Antigas civilizações, como a babilônica e a egípcia, tinham a necessidades de medir as terras para demarcar os limites das propriedades e plantações, projetar templos e pirâmides e prever o movimento dos astros. Assim teria nascido a geometria, palavra de origem grega que significa "medida da terra". Na Grécia a geometria se desenvolveu como uma forma de conhecimento organizada.

As primeiras construções geométricas surgiram com problemas simples como a medida e divisão de terra, e a construção da roda, o homem aprendeu que soluções retilíneas eram mais econômicas, aprendeu a trabalhar com figuras regulares e fazer divisões que são fáceis de se construir. As construções mais primitivas, já eram modelos de cones e cilindros, como, por exemplo, as cabanas de índios e poços artesanais. E por volta de 1000 a.c monumentos imensos como pirâmides já tinham sido erguidos. Também já se sabia construir ângulos retos, verificar a circunferência, e já se tinha um bom cálculo aproximado do número.

A criação e o desenvolvimento da geometria contaram com os estudos de diversos gênios da matemática. Os gregos Tales de Mileto, Pitágoras e Euclides foram os primeiros a dar forma a este estudo. No século XVIII, o suíço Leonhard Euler decifrou dois enigmas que há séculos não tinham solução. Platão, Arquimedes e Kepler e desenvolveram o estudo dos Poliedros. Esses foram alguns dos grandes estudiosos responsáveis por desvendar o espaço e suas formas.

No estudo da geometria os poliedros regulares fascinaram os antigos como símbolo de perfeição da natureza. Os Gregos mais precisamente os Pitagóricos já sabiam da existência de três dos cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro e o dodecaedro. Estes poliedros foram muito estudados por Platão que construiu uma teoria filosófica baseada neles, comparando-os com os cinco elementos da natureza.

Se fossem quadradas, teríamos:

Figura 1.1: Cubo - O elemento terra
Fonte: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm205/historia.htm

Se fossem triângulos equiláteros, teríamos:

Figura 1.2: Tetraedro, octaedro e Icosaedro.
Fonte: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm205/historia.htm

Se fossem pentágonos, teríamos:

Figura 1.3: Dodecaedro - Simbolizava o Universo
Fonte: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm205/historia.htm

No capítulo 2 apresentaremos a história da evolução da geometria e de seus estudiosos, destacando suas contribuições para o desenvolvimento do estudo do espaço e das formas geométricas. No capítulo 3 as definições preliminares e os teoremas importantes a serem utilizados no desenvolvimento do trabalho. No capítulo 4 apresentaremos os poliedros e dois teoremas, **o de Euler:** Todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$. **E o teorema** 2 **:** Existem apenas cinco poliedros regulares convexos. com suas respectivas demonstrações de forma simples para um melhor entendimento. No capítulo 5 as construções dos poliedros e no capítulo 6 as considerações finais do trabalho.

Capítulo 2

A História da Evolução da Geometria e de Seus Estudiosos

A geometria nasceu no antigo Egito segundo registros de filósofos como Heródoto e Aristóteles. No século V, ela foi trazida pelo filósofo Tales de Mileto para a Grécia, adquirindo embasamento teórico fundamentado na razão, graças a Euclides de Alexandria, que reuniu em seu tratado "Os Elementos de Euclides"os cinco postulados geométricos que são ensinados até hoje nas escolas.

De acordo com Heródoto, conforme registrado no segundo livro da sua obra "História", a geometria teria surgido graças ao Faraó Sesóstris III, que dividiu as terras da região para a agricultura, fazendo com que cada proprietário pagasse tributos conforme o tamanho do terreno. Quando o Rio Nilo transbordava, e tomava parte dessa terra, os agricultores requeriam nova metragem para pagar menos impostos. A partir dessas medições, teria surgido a geometria. Aristóteles dizia que no Egito havia uma classe sacerdotal que se dedicava aos estudos geométricos. Ou seja, nas duas versões, percebemos origens distintas para o surgimento da geometria, uma voltada para prática e outra para teoria.

No Egito e na Grécia as visões filosóficas eram completamente diferentes. No Egito e na Babilônia, por exemplo, o critério de verdade era a experiência, ou seja, acreditava-se naquilo que a pessoa via. Já a visão que se tinha na Grécia era diferente, pois não bastava ver para crer, e sim provar com a razão. De posse dos conhecimentos práticos, os gregos começaram a aperfeiçoar a geometria.

Quem dominava o conhecimento tanto no Egito quanto na Babilônia era a classe sacerdotal, que se colocava como intermédio entre os deuses e o povo. Logo, eles "interpretavam"a vontade dos deuses. Ou seja, se algo era do jeito que era, isso se devia à vontade dos deuses e os sacerdotes não tinham que explicar nada. Quando o conhecimento chega à Grécia, não havia a classe sacerdotal e o conhecimento tinha que ser explicado pela razão. E com a geometria não foi diferente, era preciso explicar os resultados geométricos. Com isso, criou-se uma base para ela, com definições para os objetos geométricos, estipulando algumas de suas propriedades. Os postulados são as primeiras noções geométricas que

são aceitas sem contestações. A partir desses postulados, são apresentadas outras regras. Transformando a geometria em uma ciência dedutiva, baseada em princípios. Com tudo isso, Euclides fez o primeiro grande resumo de tudo que se conhecia antes dele em matemática. Ele foi um chefe de escola em Alexandria, 300 a.c, e a sua obra "Os Elementos de Euclides"resume muito bem tudo que se conhecia em matemática elementar.
Os gregos deram à geometria uma base teórica de definições a partir de cinco postulados, além de uma coleção de noções comuns. O 1º diz que de qualquer ponto a outro se pode traçar uma reta, o 2º defende que dado uma reta limitada, é possível prolongá-la ilimitadamente para qualquer um dos dois lados, o 3º destaca que um círculo pode ser feito dado o centro e um ponto, e o 4º enfatiza que todos os ângulos retos são iguais. Já o 5º postulado, chamado também de "Postulado de Euclides", ou de "Postulados das Paralelas", é o mais complexo. Nele, caso uma reta caindo sobre duas outras faça ângulos internos do mesmo lado menores que dois retos, as duas retas prolongadas indefinidamente se encontrarão em um ponto no mesmo lado em que os dois ângulos são menores que dois ângulos retos.
Segundo Leonardo Da Vinci "não há na natureza nada suficientemente pequeno ou insignificante que não mereça ser visto pelo olho da geometria: há sim, uma agradável geometria das criações da natureza. Dificilmente encontraremos algo que não possa se relacionar com a geometria".

2.1 A História dos Estudiosos da Geometria

A criação e o desenvolvimento da geometria contaram com os estudos de diversos gênios da matemática. Os gregos Tales de Mileto, Pitágoras e Euclides foram os primeiros a dar forma a este estudo. No século XVIII, o suíço Leonhard Euler decifrou dois enigmas que há séculos não tinham solução. Platão, Arquimedes e Kepler desenvolveram o estudo dos Poliedros. Esses foram alguns dos grandes estudiosos responsáveis por desvendar o espaço e suas formas.

2.1.1 Tales de Mileto (Mileto 634 - 548 a.c)

Filósofo, matemático e astrônomo grego *(figura 2.1)*. Grande viajante conheceu as culturas científicas do Egito e da Babilônia, principalmente em matéria de geometria e astronomia, o que influenciou o seu teorema. Como astrônomo, previu um eclipse do Sol no ano de 585 a.c, foi um dos primeiros cientistas a observar as propriedades magnéticas de certos minerais. Em sua obra filosófica mantém algumas passagens em textos de Teofrasto, onde distinguiu quatro elementos constituintes do Universo: água, ar, terra e fogo.
Segundo alguns historiadores da matemática antiga, a geometria demonstrativa iniciou-se a partir de Tales de Mileto, um dos sete sábios da Grécia. Foi o fundador da escola jônica,

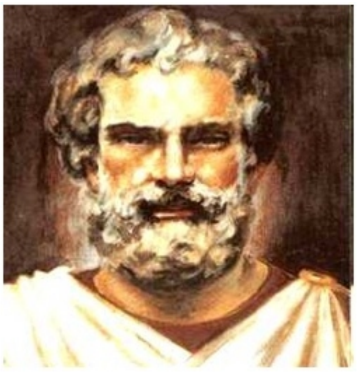


Figura 2.1: Tales de Mileto
Fonte:http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/tales-de-mileto/imagens

escola de pensamento dedicada à investigação da origem do universo e de outras questões filosóficas, entre elas a natureza e a validade das propriedades matemáticas dos números e das figuras.
As primeiras descobertas matemáticas associam-se a Tales de Mileto. Acredita-se que obteve seus resultados mediante alguns raciocínios lógicos e não apenas por intuição ou experimentação.
Alguns fatos geométricos cuja descoberta é atribuída a Tales são:

- A demonstração de que os ângulos da base de dois triângulos isósceles são iguais;
- A demonstração do seguinte teorema: se dois triângulos tem dois ângulos e um lado respectivamente iguais, então são iguais;
- A demonstração de que todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais;
- A demonstração de que ao unir-se qualquer ponto de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obtém-se um triângulo retângulo em C. Provavelmente, para demonstrar este teorema, Tales usou também o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos;

2.1.2 Pitágoras (Samos 570 - Metaponto 497 a.c)

Filósofo grego. Filho de Mnesarco de Samos, emigrou para Crotona no ano 535 a.c*(figura 2.2)*. A sua biografia constrói-se a partir de conjeturas, devido a ausência de informações. Em Crotona fundou uma comunidade onde religião, ciência e política se fundiam num ideal de vida que teve grande influência na Magna Grécia. É bastante provável que Pitágoras tenha estado em contato com as culturas egípcia, mesopotâmica e hindu.
Quando uma conjuração o obrigou a refugiar-se em Metaponto, a comunidade pitagórica dispersou-se, mas reagrupou-se em Tarento, lugar onde os ensinamentos de Pitágoras foram difundidos até o séc. IV a.c. Os seus discípulos deram continuidade aos estudos da

Figura 2.2: Pitágoras
Fonte:http://fabiopestanaramos.blogspot.com/2011/07

Matemática e Astronomia. No campo musical, o filósofo calculou em termos matemáticos as relações entre os intervalos, com base nas experiências realizadas com o monocórdio e partindo da determinação da relação entre a oitava e a quinta. A escala pitagórica baseia-se no ciclo das quintas e difere ligeiramente da natural.
O símbolo utilizado pela escola Pitagórica era o pentagrama, que, segundo a descoberta de Pitágoras, possui algumas propriedades interessantes. Um pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular; pelas interseções dos segmentos desta diagonal, é obtido um novo pentágono regular, que é proporcional ao original exatamente pela razão áurea.
Pitágoras foi o primeiro a elevar a ciência dos números e da geometria à categoria das artes maiores e a estabelecer o princípio de que uma proposição científica deve ser totalmente convincente, isto é, demonstrada; notáveis descobertas são atribuídas a Pitágoras, tais como o sistema de numeração decimal, tabelas de multiplicação e a demonstração do célebre teorema que leva o seu nome que afirma: Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.
Os pitagóricos estudaram e demonstraram várias propriedades dos números figurados. Entre estes o mais importante era o número triangular 10, chamado por eles de tetraktys, tétrada em português *(figura 2.3)*. Este número era visto como um número místico uma vez que continha os quatro elementos fogo, água, ar e terra: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, e servia de representação para a completude do todo.

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha\ \alpha \\ \alpha\ \alpha\ \alpha \\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha \end{array}$$

Figura 2.3: Tétrada

A tétrada, era um dos símbolos principais do seu conhecimento avançado das realidades teóricas, que os pitagóricos desenhavam com um α em cima, dois abaixo deste, depois três e por fim quatro na base. Representação toda perfeita em si de qualquer um dos

lados que se observe.
Números perfeitos onde a soma dos divisores de determinado número com exceção dele mesmo, é o próprio número. Exemplos:
1. Os divisores de 6 são: 1,2,3 e 6. Então, $1 + 2 + 3 = 6$.
2. Os divisores de 28 são: 1,2,4,7,14 e 28. Então, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

O primeiro número irracional a ser descoberto foi a raiz quadrada do número 2, que surgiu exatamente da aplicação do teorema de Pitágoras em um triângulo de catetos valendo 1: $1^2 + 1^2 = X^2 => X^2 = 2 \Rightarrow X = \pm\sqrt{2}$. Os gregos não conheciam o símbolo da raiz quadrada e diziam simplesmente: "o número que multiplicado por si mesmo é 2".A partir da descoberta da raiz de 2 foram descobertos muitos outros números irracionais. Segundo os pitagóricos, a essência, que é o princípio fundamental que forma todas as coisas é o número. Os pitagóricos não distinguem forma, lei, e substância, considerando o número o elo entre estes elementos.

2.1.3 Platão (Atenas ca. 427-ca. 347 a.C.)

Figura 2.4: Platão
Fonte: $http://www.cdcc.usp.br/ciencia/artigos/art_26/proporcao.html$

Filósofo grego. Depois da morte de Sócrates, seu mestre, mudou-se para Mégara e, posteriormente, para o Egito, Cirene e Itália meridional, onde entrou em contato com as comunidades pitagóricas *(figura 2.4)*. Filósofo clássico, escolheu o diálogo como gênero literário, em vez dos tradicionais poemas ou aforismos, porque, segundo ele, os diálogos refletem a forma literária do discurso e respondem à idéia da procura do conhecimento. Entre as suas primeiras obras destacam-se Apologia de Sócrates e Críton. Posteriormente, escreveu obras consideradas de transição, diálogos que vão conformando o seu pensamento como filósofo. Entre elas destacam-se Górgias e Mênon. As obras de maturidade são os diálogos que abordam os temas centrais da filosofia platônica e os mais ricos do ponto de vista literário. São Banquete, que explora a beleza e o amor; Fédon, sobre a imortalidade da alma; A República, sobre o Estado; e Fedro, sobre o amor e a natureza tripartida da

alma. Finalmente, as últimas obras são diálogos mais dialéticos, no quais Platão revê a sua própria obra e expõe a sua cosmogonia. Neste âmbito, destaca-se Timeu, que explora a gênese do Universo. Platão foi autor de uma vasta obra filosófica, onde preocupou-se com o conhecimento das verdades essenciais que determinam a realidade e, a partir disso, estabeleceu os princípios éticos que, segundo ele, deveriam nortear o mundo social. Seu pensamento foi absorvido pelo cristianismo primitivo e, junto com o seu mestre Sócrates e discípulo Aristóteles, lançou os alicerces sobre os quais se assentariam as bases de toda a filosofia ocidental. Em Atenas foi o fundador da Academia, escola destinada à investigação filosófica, e dirigiu-a pelo resto da vida.
Platão elaborou o pensamento pitagórico, vinculando matemática e misticismo na tentativa de compreensão humana do universo. Citando seus pensamentos, "os números governam o mundo". Através de seu raciocínio, obteve os sólidos platônicos, volumes espaciais compostos por apenas uma única figura geométrica regular.
Através do triângulo equilátero, Platão obteve o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, de quatro, oito e vinte faces respectivamente; Com o quadrado, obteve o cubo (ou hexaedro) e suas seis faces idênticas; Finalmente, através do pentágono regular, Platão conseguiu um dodecaedro, com doze faces iguais.Platão, por volta do século VI a.c, estudou certa classe de poliedros; que vieram posteriormente, ser conhecidos como os poliedros de Platão, entre os quais se incluem os poliedros regulares.

2.1.4 Euclides (325-265 a.C.)

Figura 2.5: Euclides
Fonte:http://matematica.com.br/site/biografias/104-euclides-de-alexandria.html

Matemático grego, viveu em Alexandria e ensinou no Museu, onde fundou uma escola de matemática que foi famosa durante séculos *(figura 2.5)*. Obras suas que chegaram aos nossos dias: os Dados, 95 proposições relativas às condições sob as quais é determinada uma figura geométrica; os Fenômenos, geometria esférica aplicada à astronomia; a Óptica, um conjunto de proposições fundamentais de óptica geométrica; e a Divisão das Figuras, 36 proposições acerca das divisões em várias partes das figuras planas. Porém, perderam-

se as obras: Prismas, uma coleção de Paralogismos, um tratado sobre Cônicas e um estudo de Lugares nas Superfícies. Sua obra principal, os Elementos, estrutura-se através de um rígido sistema dedutivo com base nas definições dos entes fundamentais, a que seguem os cinco postulados, as cinco noções comuns. As demonstrações das proposições realizam-se segundo o esquema seguinte: enunciado, exemplo, pormenores da proposição, construções adicionais, demonstrações verdadeiras e conclusão. De um ponto de vista metodológico, as técnicas mais utilizadas nas demonstrações são: método da análise e da síntese, de redução ao absurdo, exaustivo, de determinação e de redução. Os Elementos, no entanto, não estão isentos de erros.
A grande obra de Euclides, os Elementos, era subdividida em 13 livros. Entre gregos e romanos, durante toda a Idade Média e até o Renascimento, os Elementos foram considerados o livro por excelência para o estudo da geometria. Os Elementos são - a seguir à Bíblia - o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental. Foi o texto mais influente de todos os tempos, tão marcante que os sucessores de Euclides o chamavam de "elementador". Esta obra é considerada um dos maiores best-sellers de sempre, admirada pelos matemáticos e filósofos de todos os países e de todos os tempos pela pureza do estilo geométrico e pela concisão luminosa da forma, modelo lógico para todas as ciências físicas pelo rigor das demonstrações e pela maneira como são postas as bases da geometria. As definições, os axiomas ou postulados (conceitos e proposições admitidos sem demonstração que constituem os fundamentos especificamente geométricos e fixam a existência dos entes fundamentais: ponto, reta e plano) e os teoremas não aparecem agrupados ao acaso, mas antes expostos numa ordem perfeita. Cada teorema resulta das definições, dos axiomas e dos teoremas anteriores, de acordo com uma demonstração rigorosa.
Os treze livros:

- Os livros I-IV tratam de geometria plana elementar. Partindo das mais elementares propriedades de retas e ângulos conduzem à congruência de triângulos, à igualdade de áreas, ao teorema de Pitágoras (livro I, proposição 47) e ao seu recíproco (livro I, proposição 48), à construção de um quadrado de área igual à de um retângulo dado, à secção de ouro, ao círculo e aos polígonos regulares. O teorema de Pitágoras e a secção de ouro são introduzidos como propriedades de áreas. Como a maioria dos treze livros, o livro I começa com uma lista de definições (23, ao todo) sem qualquer comentário como, por exemplo, as de ponto, reta, círculo, triângulo, ângulo, paralelismo e perpendicularidade de retas tais como:
  "um ponto é o que não tem parte"
  "uma reta é um comprimento sem largura"
  "uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura".
  A seguir às definições, aparecem os Postulados e as Noções Comuns ou Axiomas,

por esta ordem. Os Postulados são proposições geométricas específicas. "Postular"significa "pedir para aceitar". Assim, Euclides pede ao leitor para aceitar as cinco proposições geométricas que formula nos Postulados:
1. Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une;
2.Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
3. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
4. Todos os ângulos retos são iguais;
5. Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos (É este o célebre 5º Postulado de Euclides). Assim, três conceitos fundamentais - o de ponto, o de reta e o de círculo - e cinco postulados a eles referentes, servem de base para toda a geometria euclidiana.

- O livro V apresenta a teoria das proporções de Eudoxo (408 a.c - 355 a.c) na sua forma puramente geométrica.
- O livro VI aplica-se à semelhança de figuras planas. Aqui voltamos ao teorema de Pitágoras e à secção de ouro (livro VI, proposições 31 e 30), mas agora como teoremas respeitantes a razões de grandezas. É de particular interesse o teorema (livro VI, proposição 27) que contém o primeiro problema de máxima que chegou até nós, com a prova de que o quadrado é, de todos os retângulos de um dado perímetro, o que tem área máxima.
- Os livros VII-IX são dedicados à teoria dos números tais como a divisibilidade de inteiros, a adição de séries geométricas, algumas propriedades dos números primos e a prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Aí encontramos tanto o algoritmo de Euclides, para achar o máximo divisor comum entre dois números, como o teorema de Euclides, segundo o qual existe uma infinidade de números primos (livro IX, proposição 20).
- O livro X, o mais extenso de todos e considerado o mais difícil, contém a classificação geométrica de irracionais quadráticos e as suas raízes quadráticas.
- Os livros XI-XIII ocupam-se com a geometria sólida e conduzem, pela via dos ângulos sólidos, aos volumes dos paralelepípedos, do prisma e da pirâmide, à esfera e àquilo que parece ter sido considerado o clímax - a discussão dos cinco poliedros regulares (platônicos) e a prova de que existem somente estes cinco poliedros regulares.

Ao escrever os Elementos, Euclides pretendia reunir num texto três grandes descobertas do seu passado recente: a teoria das proporções de Eudoxo, a teoria dos irracionais de Teteto e a teoria dos cinco sólidos regulares, que ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão.
Euclides compilou nos Elementos toda a geometria conhecida na sua época. Mas, não se limitou a reunir todo o conhecimento geométrico, ordenou-o e estruturou-o como ciência. Isto é, a partir de uns axiomas desenvolveu e demonstrou os teoremas e proposições geométricas, dando novas demonstrações quando as antigas não se adaptavam à nova ordem que havia dado às proposições. Além disso, esmiuçou a fundo as propriedades das figuras geométricas, das áreas e dos volumes e estabeleceu o conceito de lugar geométrico.

2.1.5 Arquimedes Siracusa(287-212 a.c.)

Figura 2.6: Arquimedes
Fonte:http://clubedematematica.esc-joseregio.pt/Archimedes.jpg

Matemático e físico grego. Filho do astrônomo Fídias, realizou parte dos seus estudos com os sucessores de Euclides em Alexandria *(figura 2.6)*. Arquimedes estudou campos científicos, mas seu principal destaque está vinculado às descobertas geométricas e às que realizou no campo da mecânica. No tratado Dos Corpos Flutuantes estabeleceu as bases da hidrostática, no qual se demonstra o princípio de Arquimedes. Formulou este princípio quando determinava a proporção de ouro e prata da coroa de Híeron II, rei de Siracusa, submergindo-a em água. Diz-se que, ao descobri-lo, saiu da banheira e percorreu nu as ruas de Siracusa gritando: Eureka! (Descobri-o!). Conseguiu determinar a área da superfície esférica e demonstrar o teorema da relação 2/3 entre o volume da esfera e o do cilindro que a circunscreve. Arquimedes liderou a defesa de Siracusa contra os ataques romanos. Construiu artefatos que podiam lançar pedras a grandes distâncias e diz-se que incendiou os navios dos inimigos através de um sistema de espelhos. Definiu a lei da alavanca e inventou a roldana composta e o parafuso que tem o seu nome *(figura 2.7)*.

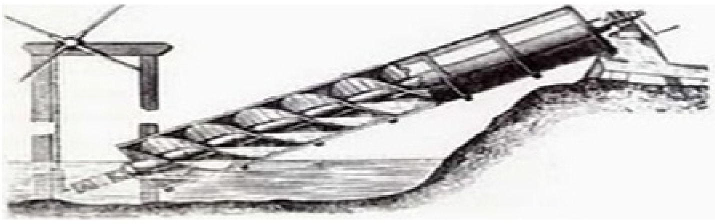


Figura 2.7: O parafuso de Arquimedes - Dispositivo capaz de transpor a água de um nível inferior para uma certa altura.
Fonte: http://fm-fiatlux.blogspot.com.br/2011/07/blog-post.html

A garra de Arquimedes foi uma arma projetada a fim de defender a cidade de Siracusa. Também conhecida como "sacudidora de navios", a garra consistia em um braço de guindaste a partir do qual pendia um grande gancho de metal. Quando a garra caia sobre um navio inimigo, o braço era usado para balançar e levantar o navio para fora da água *(figura 2.8)*.

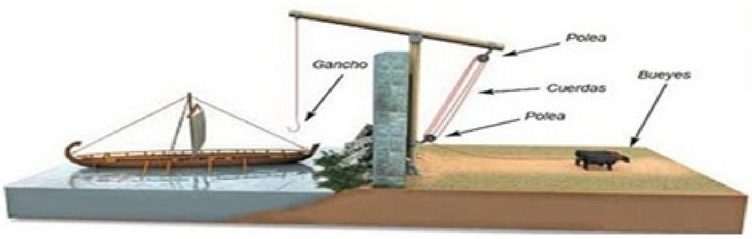


Figura 2.8: A Garra de Arquimedes
Fonte: http://fm-fiatlux.blogspot.com.br/2011/07/blog-post.html

O raio de calor de Arquimedes teria sido usado para concentrar a luz solar em navios que se aproximavam, levando-os a pegar fogo *(figura 2.9)*.

Figura 2.9: O Raio de Calor de Arquimedes
Fonte: http://fm-fiatlux.blogspot.com.br/2011/07/blog-post.html

Arquimedes não inventou a alavanca, mas deu uma explicação do princípio envolvido em sua obra Sobre o Equilíbrio dos Planos. Segundo Pappus de Alexandria, o trabalho de Arquimedes sobre as alavancas fez com que ele exclamasse: "Deem-me um ponto de apoio e moverei a Terra". Plutarco descreve como Arquimedes projetou sistemas de roldanas, permitindo a marinheiros a utilização do princípio da alavanca para levantar objetos que teriam sido muito pesados para serem movidos de outra maneira. Ele também foi responsável pelo aumento do poder e precisão da catapulta, e por inventar o hodômetro durante a Primeira Guerra Púnica. O hodômetro foi descrito como um carrinho com um mecanismo de engrenagens que a cada milha percorrida derrubava uma bola em um recipiente.
Arquimedes usou infinitesimais de uma maneira que é semelhante ao moderno cálculo integral. Através de provas por contradição, ele encontrou respostas aproximadas para problemas diversos, especificando os limites entre os quais se encontrava a resposta correta. Essa técnica é conhecida como o método da exaustão, que ele utilizou para aproximar o valor de π. Arquimedes também inventou o primeiro planetário, usado para pesquisa e ensino da astromomia.
As obras escritas de Arquimedes não foram conservadas tão bem quanto as de Euclides, e sabe-se da existência de sete de seus tratados apenas através de referências feitas a eles por outros autores. Pappus de Alexandria menciona Sobre a Construção de Esferas e outro trabalhado sobre poliedros.

2.1.6 Johannes Kepler (Weil der Stadt, Baden-Württemberg, 1571-Ratisbona 1630)

Figura 2.10: Kepler
$Fonte : http :$
$//upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d4/Johannes_Kepler_1$

Johannes Kepler foi um astrônomo, matemático e astrólogo alemão e figura-chave da revolução científica do século XVII *(figura 2.10)*. Estudou em Adelberg (1584) e na Uni-

versidade de Tübingen. Descobriu que as dificuldades para descrever o movimento de Marte desapareciam se fosse aceito que esse planeta seguia uma elipse e que varria áreas iguais em tempos iguais. É mais conhecido por formular as três leis fundamentais da mecânica celeste, conhecidas como Leis de Kepler, codificada por astrônomos posteriores com base em suas obras, Astronomia Nova, Harmonices Mundi e Epítome da Astronomia de Copérnico. Elas também forneceram uma das bases para a teoria da gravitação universal de Isaac Newton.
Kepler foi professor de matemática em uma escola seminarista em Graz, Áustria, e assistente do astrônomo Tycho Brahe, fez um trabalho fundamental no campo da óptica, inventou uma versão melhorada do telescópio refrator (o telescópio de Kepler) e ajudou a legitimar as descobertas telescópicas de seu contemporâneo Galileu Galilei.
Johannes Kepler descreveu dois poliedros estrelados em 1619, e Louis Poinsot definiu outros dois em 1809. Em 1813, Augustin Louis Cauchy demonstrou que os poliedros de Kepler-Poinsot são descritos a partir do dodecaedro e do icosaedro e que são os únicos poliedros regulares estrelados possíveis. Enquanto em dois deles as pontas são pirâmides pentagonais, nos outros dois são pirâmides triangulares. Cauchy chamou-os grande e pequeno dodecaedro estrelado e grande e pequeno icosaedro estrelado, respectivamente.

2.1.7 Leonhard Euler (Basiléia 1707-São Petersburgo 1783)

Figura 2.11: Leonhard Euler
$Fonte: http://sorumbatico.blogspot.com/2007/04/faces-arestas-e-vrtices.html$

Matemático suíço. Estudou Teologia, Medicina, Astronomia e línguas orientais na Universidade da Basiléia *(figura 2.11)*. Mudou-se para a Rússia e foi nomeado professor de Física na Academia de São Petersburgo. Em 1741 passou para a Academia de Berlim, onde permaneceu até 1755, ano em que voltou definitivamente a São Petersburgo como diretor da Academia. As suas obras mais importantes são: Traité de mécaniquegénérale (1736; Tratado de Mecânica Geral), o primeiro tratamento analítico da dinâmica de Newton; Introduction à l'analyseinfinitésimale (1748; Introdução à Análise

dos Infinitésimos), a primeira definição geral de função, um tratamento analítico das funções trigonométricas e a fórmula que relaciona as funções circulares com as exponenciais, e Traitéducalculdifférentiel (1755; Tratado do Cálculo Diferencial), distinguiu as derivadas ordinárias das derivadas parciais e elaborou um método para integrar as equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes. Estabeleceu as bases do cálculo de variações, introduziu as coordenadas polares e estudou as cônicas e as quádricas. Foi muito famosa a sua recompilação de lições de astronomia, física e filosofia publicada com o título de Lettresà une princesse D'Allemange (1751; Cartas a Uma Princesa Alemã), ilustração das relações lógicas com analogias geométricas.
Euler resolveu dois enigmas que há séculos esperavam por uma explicação. O primeiro problema envolvia as pontes de Königsberg, cidade da antiga Prússia (hoje, Kaliningrado, na Rússia). Os habitantes da cidade não conseguiam atravessar as sete pontes numa caminhada contínua, sem ter que passar duas vezes por um mesmo lugar. Ele demonstrou que tal caminhada era impossível. Verifique que, em cada porção de terra, A, B, C e D, há um número ímpar de pontes. Esse problema só tem solução em dois casos: 1) quando o número de pontes em cada porção de terra é par; 2) quando há, no máximo, duas porções de terra com um número ímpar de pontes *(figura 2.12)*.

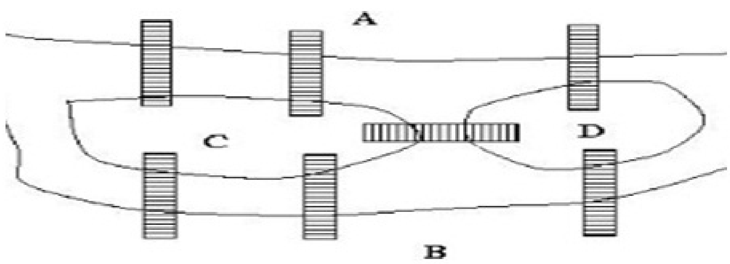


Figura 2.12: Caminhada demonstrada por Euler
Fonte : http : //redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/conheca − historia − da − evolucao − da − geometria − e − de − seus − estudiosos.html

O segundo problema famoso resolvido por Euler estava relacionado aos poliedros. Como saber quantos vértices, faces e arestas tem um poliedro, sem se perder na conta pelo caminho? Ele concluiu que, por maior que fosse o número de faces da figura, havia sempre uma relação entre o número de vértices e arestas. E elaborou a fórmula: a (arestas) + 2 = v (vértices) + f (faces). Por exemplo, o cubo tem 8 vértices, 6 faces e 12 arestas, e a fórmula então se confirma: $12 + 2 = 8 + 6$.
Foi com Leonhard Euler que nasceu o fascinante campo da geometria chamado topologia. A topologia trabalha com figuras improváveis, superfícies que podem ser torcidas, empenadas, puxadas, esticadas, que sofrem, enfim, deformações.

Capítulo 3

Definições Preliminares

3.1 Polígono

É uma figura formada por uma linha poligonal fechada, isto é, uma linha poligonal em que a origem do primeiro segmento coincide com o final do último segmento. Por conseguinte, também é possível definir polígono como uma figura plana fechada limitada por uma linha poligonal.

3.2 Linha Poligonal

É uma série finita de segmentos retilíneos em um plano, em que o extremo de cada segmento coincide com a origem do seguinte. O fato de estar contida ou não em um dos dois semi planos formados ao prolongar um dos segmentos determina se a linha poligonal é convexa ou côncava.

Os elementos que formam e definem um polígono são os lados, os vértices, as diagonais e os ângulos internos. Os lados de um polígono são os segmentos que o delimitam e os vértices são os pontos extremos dos seus lados.

Na natureza observam-se muitos exemplos de polígonos mais ou menos perfeitos, como as células hexagonais desta colmeia, feitas à base de madeira mastigada *(figura 3.1)*.

3.3 Ângulos Internos

A soma dos ângulos internos de qualquer polígono depende do número de lados (n), sendo usada a seguinte expressão para o cálculo: $S = (n - 2) * 180$, onde n o número de lados.

Os polígonos mais simples são os triângulos, que apresentam uma propriedade singular: a soma dos seus ângulos é sempre 180°. Essa propriedade permite estudar os ângulos dos demais polígonos convexos.

Figura 3.1: Colmeia
$Fonte: Barsa, vol.14.2.ed.2009, p.4744$

Um quadrilátero convexo pode decompor-se em dois triângulos. A soma dos seus ângulos é igual à soma dos ângulos dos dois triângulos que o formam. Por conseguinte, a soma dos ângulos de um quadrilátero é sempre 360°. Em geral, dado um polígono convexo de n lados, com $n > 4$, e um ponto interno O do polígono, unindo esse ponto aos vértices do polígono serão obtidos n triângulos. A soma de todos os ângulos desses n triângulos é $n.180°$, e a soma de todos os ângulos dos n triângulos que têm vértice em O é 360°, já que corresponde a uma volta completa de uma circunferência. A soma dos ângulos do polígono,φ , é a soma de todos os ângulos dos n triângulos que não têm o vértice em O, isto é, a soma dos ângulos dos n triângulos devem-se subtrair os ângulos à volta do ponto O:
$\varphi = n.180^o - 360^o = (n-2).180^o$
essa expressão também se pode aplicar ao triângulo e ao quadrilátero. A soma dos ângulos de um triângulo ($n = 3$) será $(n-2).180° = 180°$ e a soma dos ângulos do quadrilátero (ϕn = 4) será $(4-2).180° = 360°$.

3.4 Ângulos Externos

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono sempre será 360º, baseando-se no seguinte princípio: quanto maior o número de lados do polígono mais ele se assemelha a uma circunferência (possui giro completo igual a 360º). *veja a seguir.*

O ângulo externo de um polígono convexo define-se, para cada vértice, como o ângulo formado por um dos lados que concorrem no vértice e o prolongamento do outro lado. Os ângulos interno e externo de cada vértice de um polígono convexo são suplementares, isto é, a sua soma é 180°.
Desse modo, a soma dos ângulos exteriores, Y, de um polígono convexo de n lados sempre será 360° :Y= $n.180^o - \varphi = 360^o$
Para φ igual à soma dos ângulos internos, isto é, $(n-2).180°$.

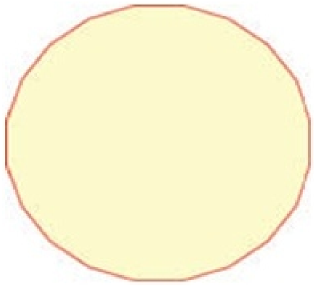


Figura 3.2: Icoságono (20 lados)
Fonte:http://www.brasilescola.com/matematica/poligonos.htm

3.5 Polígonos Côncavos e Convexos

Se os ângulos do polígono forem menores que 180º ele será convexo , *observe a figura 3.3.*

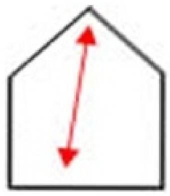


Figura 3.3: Polígono Côncavo
Fonte:http://www.brasilescola.com/matematica/poligonos.htm

Caso tenha um ângulo com medida maior que 180º ele será classificado como não convexo ou côncavo *(figura 3.4)*.

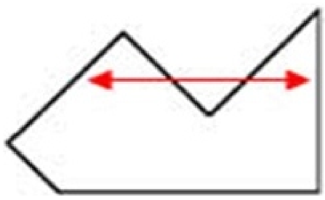


Figura 3.4: Polígonos convexo
Fonte:http://www.brasilescola.com/matematica/poligonos.htm

Uma linha poligonal é côncava quando ao se prolongar um dos seus segmentos em uma reta, esta divide o plano em dois semi planos, de maneira que a linha poligonal esteja nos dois semi planos.
Uma linha poligonal é convexa quando ao se prolongar qualquer um dos seus segmentos em uma reta, esta divide o plano em dois semi planos, de maneira que a linha poligonal esteja inserida em um dos semi planos.
Um polígono é côncavo ou convexo se a linha poligonal que o define for côncava ou convexa, respectivamente. Um polígono é côncavo quando alguma das suas diagonais não se

encontrar no interior do polígono, ou se uma reta puder cortá-lo em mais de dois pontos. Pelo contrário, um polígono é convexo quando todas as suas diagonais se encontrarem no interior do polígono, ou se uma reta puder cortá-lo em dois dos seus pontos.
Dois polígonos convexos são iguais quando os seus ângulos e os seus lados coincidirem. Por conseguinte, um polígono é determinado univocamente pelos seus lados e pelos seus ângulos. Dados, por exemplo, quatro ângulos $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$, $Y = 90°$ e $\delta = 75°$, e os comprimentos A, B, CeD de quatro lados, é possível traçar um polígono, neste caso um quadrilátero.

3.6 Polígonos Regulares

Um polígono é regular se os seus ângulos e os seus lados forem iguais, isto é, se for simultaneamente equiângulo e equilátero. Alguns exemplos de polígonos regulares *(figura 3.5)*.

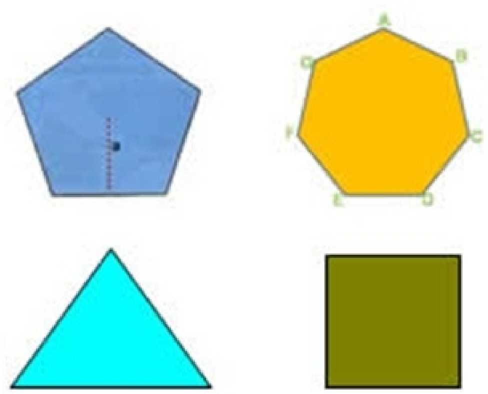


Figura 3.5: Polígonos Regulares
Fonte:http://www.brasilescola.com/matematica/poligonos.htm

O centro de um polígono é o ponto interno ao polígono que equidista de todos os seus vértices.
A circunferência circunscrita a um polígono é a circunferência que passa por cada um dos seus vértices. Em um polígono regular, o ponto de interseção das mediatrizes de dois lados do polígono regular determina o centro da circunferência circunscrita e, portanto, o centro do polígono. Se o número de lados do polígono for par, a interseção de duas diagonais, que são eixos de simetria do polígono, também determina o centro da circunferência circunscrita.
Se, em um polígono regular, cada um dos vértices de um lado for ligado ao centro da circunferência circunscrita, serão obtidos triângulos isósceles. Nos triângulos isósceles, o lado desigual é o lado c do polígono regular e a sua altura, a, é denominada apótema.

3.6.1 Ângulo Central de um Polígono Regular

É o ângulo cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono. A soma de todos os ângulos centrais de um polígono, analogamente à soma de todos os seus ângulos externos, equivale a um ângulo de volta inteira, isto é, a 360°.

3.6.2 Perímetro de um Polígono Regular

É a soma do comprimento dos seus lados. Em um polígono regular de n lados de comprimento c, o perímetro é:

$$P = n.c$$

3.6.3 Área de um Polígono Regular

É equivalente à soma das áreas dos triângulos isósceles definidos, em cada caso, pelo centro da circunferência circunscrita e pelos vértices de um dos lados do polígono. O apótema de um polígono regular é fundamental para calcular a sua área, já que se trata da altura de cada um dos triângulos cuja base é um dos lados do polígono. Esses triângulos, que são tantos quantos forem os lados do polígono, têm a mesma área, que se calcula facilmente, já que a sua base é c (lado do polígono) e a sua altura é a (apótema do polígono), pelo que resultará: $(c.a)/2$. Como o polígono regular tem n triângulos desse tipo (tantos como lados), a sua área será dada por:
Isto é, para obter a área de um polígono regular de n lados, de perímetro P e de apótema a, é necessário calcular a metade do produto do perímetro pelo apótema.

$$A = \frac{n.c.a}{2} = \frac{n.c.a}{2} = \frac{P.a}{2}$$

3.7 Polígonos Irregulares

Um polígono irregular é aquele que não possui os ângulos com medidas iguais e os lados não possuem o mesmo tamanho *(figura 3.6)*.

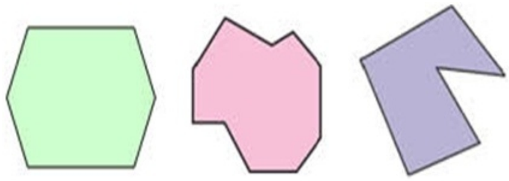


Figura 3.6: Polígonos Irregulares
Fonte:http://www.brasilescola.com/matematica/poligonos.htm

3.8 Diagonais de um Polígono

É o segmento de reta que liga um vértice ao outro, passando pelo interior da figura. O número de diagonais de um polígono depende do número de lados (n) Se um polígono tiver n vértices, é possível traçar $(n-3)$ diagonais para cada um. Assim, o número de diagonais é $n.(n-3)$. No entanto, em virtude de cada diagonal passar por dois vértices, o número total de diagonais diferentes é:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

3.9 Triângulo

É um polígono de três lados e, conseqüentemente, de três vértices e três ângulos. O lado de um triângulo sempre é menor que a soma dos outros dois lados e maior que a sua diferença, isto é, $b - c < a < b + c$, sendo a, b e c os lados do triângulo.
A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°, o que significa que um triângulo pode ter apenas um ângulo reto, ou apenas um ângulo obtuso, ou, em equivalência, dois ângulos agudos.
Os triângulos classificam-se, quanto aos seus lados, em:

- Equiláteros: os três lados são iguais.
- Isósceles: apenas dois dos seus lados são iguais.
- Escalenos: têm os lados todos desiguais.

Os triângulos também podem se classificar segundo os seus ângulos, em:

- Acutângulos: os três ângulos são agudos.
- Retângulos: têm um ângulo reto e dois ângulos agudos.
- Obtusângulos: têm um ângulo obtuso e dois ângulos agudos.

3.10 Quadrilátero

É um polígono de quatro lados. Os lados opostos de um quadrilátero não têm nenhum vértice em comum. A soma dos ângulos de um quadrilátero é 360°.
O excesso de calor e o solo ressecado dão lugar à formação de fissuras de forma poligonal. De acordo com o número de lados paralelos, os quadriláteros convexos classificam-se em:

- Trapezóides: quando o quadrilátero não têm nenhum par de lados paralelos.
- Trapézios: têm dois lados opostos paralelos e dois não paralelos.
- Paralelogramos: cada lado é paralelo ao seu oposto.

Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais, e as diagonais cortam-se no seu ponto médio. O grupo dos paralelogramos pode classificar-se segundo o comprimento dos seus lados e dos seus ângulos internos:

- Quadrados: paralelogramos com os quatro lados iguais e os ângulos retos. As suas diagonais iguais cortam-se no seu ponto médio, formando um ângulo de 90°.
- Retângulos: paralelogramos com os lados iguais dois a dois e os quatro ângulos retos. As diagonais cortam-se no seu ponto médio, formando ângulos não retos.
- Losangos: paralelogramos com os quatro lados iguais, os ângulos iguais dois a dois e diferentes de 90°. As suas diagonais perpendiculares cortam-se no seu ponto médio.
- Paralelogramo obliquângulo: paralelogramos com os lados iguais dois a dois e os ângulos iguais dois a dois, diferentes de 90°. As diagonais se cortam no seu ponto médio, formando ângulos diferentes de 90°.

3.11 Classificação dos Polígonos

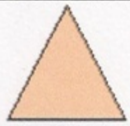
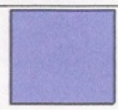
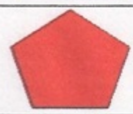
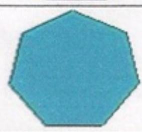
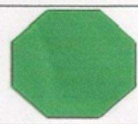
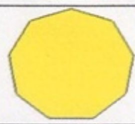
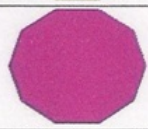
• Tem três lados iguais • Tem três vértices	Triângulo	
• Tem quatro lados iguais • Tem quatro vértices	Quadrilátero	
• Tem cinco lados iguais. • Tem cinco vértices.	Pentágono	
• Tem seis lados iguais • Tem seis vértices	Hexágono	
• Tem sete lados iguais • Tem sete vértices	Heptágono	
• Tem oito lados iguais • Tem oito vértices	Octógono	
• Tem nove lados iguais • Tem nove vértices	Eneágono	
• Tem dez lados iguais • Tem dez vértices	Decágono	
• Tem onze lados iguais • Tem onze vértices	Hendecágono ou Undecágono	
• Tem doze lados iguais • Tem doze vértices	Dodecágono	

Figura 3.7: Lados/Nomes dos poliedros

3.12 POLIEDROS

Definição 3.12.1 *é um sólido geométrico cuja superfície é composta por um número finito de faces, em que cada uma das faces é um polígono. Os seus elementos mais importantes são as faces, as arestas e os vértices.*

Definição 3.12.2 *é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:*

- *Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*

- *A intercessão de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.*
  Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.
- *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja cruzando apenas arestas).*

Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamado de interior desse poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo. "Um conjunto C, do plano ou do espaço, diz-se convexo, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C". No caso dos poliedros, podemos substituir essa definição por outra equivalente, que nos será mais útil:
"Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos" *(veja a seguir).*

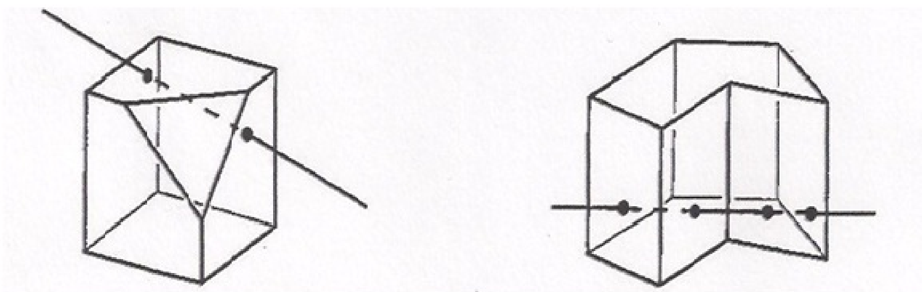


Figura 3.8: Poliedro convexo e não convexo
Fonte: Lima et.al.,1999, p.233

Definição 3.12.3 *Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces e a região do espaço limitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou um vértice, ou é vazia. Cada lado de uma região poligonal, comum a exatamente duas faces, é chamada aresta do poliedro. E cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.*

Obs:cada vértice do poliedro é um ponto comum a três ou mais aresta.

3.13 Classificação dos Poliedros

3.13.1 Os Regulares

- Convexos: tetraedro (quatro faces), hexaedro (seis faces), octaedro (oito faces), dodecaedro (doze faces) e icosaedro (vinte faces).

- Estrelados ou Côncavos: pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro estrelado, grande do dodecaedro e icosaedro estrelado.

3.13.2 Os Semi-Regulares:

tetraedro truncado, cubo truncado, cuboctaedro, octaedro truncado, cuboctaedro truncado, pequeno rombicuboctaedro, cubo achatado, icosidodecaedro, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, pequeno rombicosidodecaedro, icosidodecaedro truncado e dodecaedro achatado.

3.13.3 Os Irregulares.

pirâmides e prismas.

3.14 Teoremas

Teorema 1 (de Euler): Em todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação: $V - A + F = 2$

Teorema 2: Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

3.15 Geometria Plana e Espacial

A Geometria Plana e a Geometria Espacial baseiam-se nos chamados conceitos geométricos primitivos. Define-se como conceito primitivo todo aquele que não admite definição, isto é, o conceito que é aceito por ser óbvio ou conveniente para uma determinada teoria. Normalmente, em Matemática, os conceitos primitivos servem de base para a construção de postulados (ou axiomas) que formarão, por sua vez, a estrutura lógica e formal da teoria.

Os conceitos geométricos primitivos são os seguintes:

- Ponto: é o conceito geométrico primitivo fundamental. Euclides o definiu como "aquilo que não tem parte". Para Euclides é o conceito de "parte", e não de "ponto", que é primitivo. Diz-se que o ponto não tem dimensão (é adimensional), ou seja, ele é tão ínfimo quanto quisermos, e não faz sentido mencionar qualquer coisa sobre tamanho ou dimensão do ponto. A única propriedade do ponto é a localização.

- Linha: Imagine um pedaço de barbante sobre uma mesa, formando curvas ou nós sobre si mesmo: este é um exemplo de linha.

- Reta: É uma linha infinita e que tem uma única direção. Uma reta é o caminho mais curto entre dois pontos quaisquer.

- Plano: Você pode imaginá-lo como uma folha de papel infinita. Um plano é uma superfície plana que se estende infinitamente em todas as direções.

Capítulo 4

Poliedros

A palavra poliedro é formada por duas palavras gregas: polys que significa várias (dando origem ao prefixo poli) e hédrai que significa faces (dando origem ao sufixo edro).
Poliedro é o sólido limitado por superfícies planas poligonais, denominadas faces do poliedro, que definem o seu contorno. Os vértices dos polígonos que constituem o poliedro denominam-se vértices do poliedro; e os seus lados; arestas do poliedro. Esses sólidos não têm formas arredondadas e possuem dois a dois um lado comum.
O número mínimo de faces necessárias para formar um poliedro é 4. Dependendo do número de faces, os poliedros classificam-se em: tetraedros (4 faces), pentaedros (5 faces), hexaedros (6 faces), heptaedros (7 faces), octaedros (8 faces), etc.
Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces e a região do espaço limitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou um vértice *(figura 4.1)*.

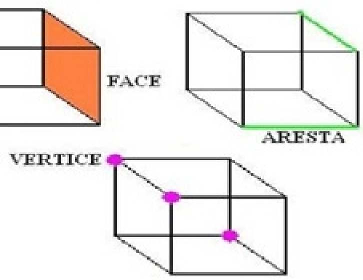


Figura 4.1: Composição de um Poliedro
Fonte:http://www.brasilescola.com/matematica/poliedros.htm

- Faces: são os polígonos que limitam o poliedro.
- Arestas: são os segmentos de reta que limitam suas faces.

- Vértices: são os pontos de interseção de três ou mais arestas.

O grau de regularidade nos poliedros é determinado pelo número, forma, e disposição das faces e dos vértices. Um poliedro é regular se todas as suas faces forem formadas por polígonos regulares iguais.
Os poliedros convexos formados por polígonos regulares iguais denominam-se sólidos de Platão. Os poliedros côncavos formados por polígonos regulares iguais denominam-se poliedros estrelados. Alguns exemplos de poliedros formados por diferentes tipos de polígonos regulares são os sólidos de Arquimedes, as famílias infinitas de prismas e antiprismas e as pirâmides.
Um poliedro é simples quando não tem buracos, isto é, quando pode deformar-se com continuidade até se transformar na superfície de uma esfera. O cubo e a bola de futebol são exemplos de poliedros simples.
Leonhard Euler demonstrou que para todos os poliedros simples se verifica a fórmula: $F - A + V = 2$, onde F designa o número de faces; A, o número de arestas, e V, o número de vértices do poliedro. Essa relação se cumpre para todos os poliedros convexos e para alguns poliedros côncavos, e limita o número de poliedros possíveis.

4.1 Poliedros regulares

Poliedros regulares são os poliedros cujas faces são polígonos regulares iguais entre si, e cujos ângulos poliédricos são todos iguais *(figura 4.2)*.
Poliedros regulares podem ser chamados de convexos ou de não-convexos.

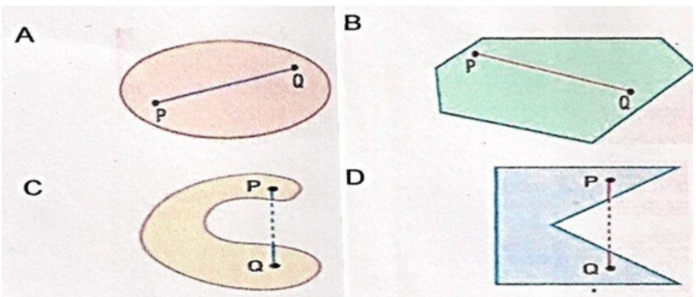


Figura 4.2: Poliedros regulares
$Fonte$: $Dante, 1.ed.1999, p.361$

Uma região do plano se diz convexa quando o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dessa região está inteiramente contida nela. Nas figuras acima, A e B são regiões convexas e C e D são regiões não-convexas do plano. De modo equivalente podemos dizer também que uma região plana é convexa se qualquer reta r desse plano intersecta seu contorno em, no máximo, dois pontos.

4.1.1 Poliedros Convexos

Um poliedro é convexo quando o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido nele. Podemos dizer que um poliedro é convexo se qualquer reta não-paralela a nenhuma das faces intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos *(figura 4.3)*.

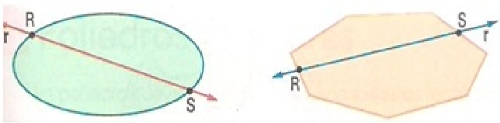


Figura 4.3: Regiões planas e convexas
Fonte: Dante, 1.ed. 1999, p.361

Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.
Os poliedros convexos não possuem reentrância e os poliedros não-convexos possuem essa particularidade. Poliedros convexos estão inteiramente situados em um mesmo semi-espaço em relação a qualquer uma de suas faces *(figura 4.4)*.

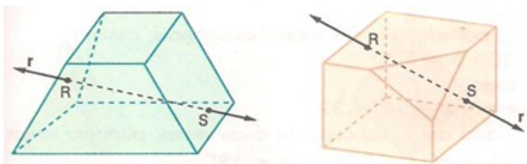


Figura 4.4: Convexos
Fonte: Dante, 1.ed. 1999, p.361

4.1.2 Poliedros não Convexos

Um poliedro é côncavo se todos os ângulos poliédricos que o formam forem não convexos *(figura 4.5)*.

É o poliedro onde o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes *(figura 4.6)*.

Poliedro estrelado, ou poliedro de Kepler-Poinsot, é aquele que se obtém prolongando as faces ou as arestas de um poliedro regular convexo e unindo os seus lados. Portanto,

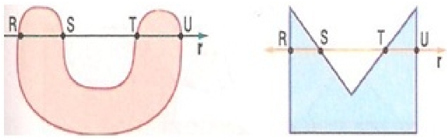


Figura 4.5: Regiões planas não-convexas
$Fonte : Dante, 1.ed.1999, p.361$

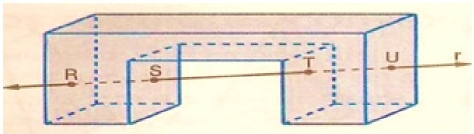


Figura 4.6: Não convexo
$Fonte : Dante, 1.ed.1999, p.361$

os poliedros estrelados originam os poliedros côncavos.
Estrelamento é um processo geométrico de construção de novos polígonos (em duas dimensões) ou de novos poliedros (em 3 dimensões). Consiste em estender os lados do polígono, ou as faces do poliedro, até se encontrarem novamente. A nova figura é um estrelamento da original.

4.2 Poliedro Semi-Regular

Um poliedro convexo denomina-se sólido de Arquimedes ou poliedro semi-regular se todas as suas faces forem formadas por polígonos regulares, e em todos os seus vértices concorrerem sempre os mesmos polígonos regulares, na mesma ordem. No entanto, ao contrário dos poliedros regulares, os polígonos que concorrem em um vértice nem sempre têm o mesmo número de lados.
De forma análoga ao caso dos poliedros regulares, é possível demonstrar que o número de poliedros semi-regulares é limitado. Johannes Kepler estudou este tipo de poliedro, tendo demonstrado, em 1619, que a lista completa constava de 13 sólidos, 12 dos quais já tinham sido utilizados por diversos artistas do Renascimento.

4.3 Poliedros Irregulares

Podemos definir um poliedro irregular como aquele que não admite lei de geração que o caracterize com perfeição.

4.3.1 Pirâmides

A pirâmide é um poliedro em que uma das faces, denominada base, é um polígono qualquer e as restantes, denominadas faces laterais, são triângulos com um vértice comum, denominado vértice da pirâmide.
Se n é o número de lados da base, uma pirâmide tem $n+1$ faces, $2n$ arestas e $n+1$ vértices. Nos vértices da base concorrem sempre 3 faces, enquanto no vértice da pirâmide concorrem tantos triângulos como lados tem a base.Desse modo, estabelece-se que a distância entre o vértice da pirâmide e a base é a altura da pirâmide.
Uma pirâmide é reta quando sua base for um polígono que pode ser inscrito em uma circunferência e, ao mesmo tempo, o seu vértice se encontrar sobre a perpendicular ao plano da base que passa pelo centro dessa circunferência.
Uma pirâmide reta recebe o nome de regular quando a sua base é um polígono regular. Nesse caso, todos os triângulos que concorrem no vértice da pirâmide são isósceles e iguais.
O tronco da pirâmide é uma seção de uma pirâmide com um plano paralelo à base, é um polígono semelhante ao da base. Os lados homólogos de ambos os polígonos são paralelos.
O polígono-seção divide a pirâmide em dois corpos. Um deles é uma pirâmide e o outro recebe o nome de tronco de pirâmide de bases paralelas. Essas bases denominam-se bases do tronco de pirâmide.

4.3.2 Prismas

Um prisma consiste de dois polígonos iguais situados em planos paralelos, chamados base e topo, e uma família de faces laterais, paralelogramos que possuem um lado em comum com a base e um em comum o topo. Um prisma regular reto que tem todas as faces iguais(quadrados) chama-se cubo, ou hexaedro regular. Um prisma que tem todas as arestas iguais chama-se romboedro. Um plano que intercepte todas as arestas laterais de um prisma o decompõe em dois sólidos que chama-se tronco de prisma.
Um prisma é reto quando as suas arestas laterais são perpendiculares às bases; é oblíquo quando as suas arestas laterais não são perpendiculares às bases.
Um prisma é regular se as suas bases são formadas por polígonos regulares. Os prismas denominam-se triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc., quando as bases são formadas, respectivamente, por triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.
O paralelepípedo é um prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos. É formado por três pares de faces paralelas. Pode considerar-se um prisma de três posições diferentes, tomando como bases duas faces opostas quaisquer.
O basalto, ao esfriar, pode formar colunas com forma de prismas hexagonais *(figura 4.7)*. Colunas basálticas da Calçada dos Gigantes na Irlanda do Norte (Reino Unido), onde se podem observar as bases quase hexagonais.

Figura 4.7: Basalto, exemplo de prisma hexagonal
$Fonte : Barsa, vol.14.2.ed.2009, p.4739$

As diagonais de um paralelepípedo são os segmentos que unem dois vértices opostos, isto é, dois vértices não pertencentes a uma mesma face. No total, um paralelepípedo tem 8 vértices e 4 diagonais. Todas as diagonais se cortam num ponto, denominado centro do paralelepípedo, que é o ponto médio de cada uma das diagonais.
Um paralelepípedo apresenta 12 arestas, que se dividem em três grupos, cada um formado por 4 arestas iguais e paralelas.

4.3.3 Anti-prismas

Os anti-prismas são poliedros cujas faces laterais são triângulos equiláteros e cujas bases, que são polígonos regulares paralelos, estão giradas de forma que cada vértice de uma se projeta no ponto médio de cada lado da outra.
Uma variação da construção do prisma é o anti-prisma também chamado de prismatóide. Este poliedro foi primeiramente reconhecido por Kepler. Ele é regular se todas as faces laterais são triângulos equiláteros, e neste caso ele é um poliedro uniforme. O anti-prisma regular de base triangular possui oito faces que são triângulos equiláteros e por isso ele se chama octaedro regular.

4.4 Teorema 1 (de Euler)

Em todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação: $V - A + F = 2$.

4.4.1 As Primeiras Relações

Dado um poliedro, vamos contar suas faces, vértices e arestas. Vamos representar por A, o número de arestas, por F, o número de faces e por V o número de vértices. Como as faces podem ser de gêneros diferentes representamos por $F_n (n \geq 3)$, o número de faces que possuem n lados.Os vértices também podem ser de gêneros diferentes, representamos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas. Dessa forma são evidentes as relações:

$F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + F_9 + F_{10} + ... + F_n$
$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10} + ... + V_n$

Agora, imagine que o poliedro foi desmontado e que todas as faces estão em cima de uma mesa. Para sabermos a quantidade de polígonos é só multiplicar o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de pentágonos por 5 e assim por diante,em seguida somar os resultados. Como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 + 8F_8 + 9F_9 + 10F_{10} + ... + NF_n$$

Observando os vértices do poliedro podemos contar as arestas. Se em cada vértice contarmos quantas arestas nele possuem, somando os resultados obtemos o dobro do número de arestas, pois cada aresta terá sido contada duas vezes (em um extremo e no outro). Logo,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 + 8V_8 + 9V_9 + 10V_{10} + ... + NV_n$$

Podemos deduzir dessas primeiras relações entre elementos de um poliedro duas desigualdades:
a) $2A \geq 3F$
b) $2A \geq 3V$
Veja a justificativa da primeira.

$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 + 8F_8 + 9F_9 + 10F_{10} + ... + NF_n$
$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + F_9 + F_{10} + ... + F_n) + F_4 + 2F_5 + ...$
$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + ...$
$2A \geq 3F$

A mesma relação vale para a segunda.

$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 + 8V_8 + 9V_9 + 10V_{10} + ... + NV_n$
$2A = 3(V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10} + ... + V_n) + V_4 + 2V_5 + ...$
$2A = 3V + V_4 + 2V_5 + ...$
$2A \geq 3V$

Observe que a igualdade só vale se $F_4 = F_5 = ... = 0$, se o poliedro tiver apenas faces triangulares. A segunda desigualdade se justifica da mesma forma e, neste caso, a

igualdade ocorrerá apenas quando em todos os vértices concorrerem 3 arestas. A relação de Euler não é verdadeira para todos os poliedros de acordo com nossa definição. Mas, para os poliedros convexos ela é verdadeira.
Esse teorema foi descoberto em 1758,e diversas demonstrações apareceram, algumas continham falhas,pela falta de precisão na definição de poliedro (como o de Cauchy), que foram descobertos anos mais tarde. Euler nunca se preocupou em definir precisamente essa palavra.

4.4.2 Demonstração do Teorema 1

Calculamos a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P. As faces são numeradas de 1 até F e seja n_k o gênero da k-ésima face (1≤k≤F). Lembrando que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de gênero n é igual a π(n-2) e observando que se um poliedro é convexo então todas as suas faces são polígonos convexos, temos para a soma dos ângulos internos de todas as faces de P a expressão:

$$S = \pi(n_1 \text{ - } 2) + \pi(n_2 - 2) + ... + \pi(n_F - 2)$$

Ou ainda,

$$S = \pi\left[(n_1 + n_2 + ... + n_F) - (2 + 2 + ... + 2)\right]$$

No primeiro parêntese, a soma dos números de lados de todas as faces é igual ao dobro do número de arestas e no segundo, a soma das F parcelas é igual a $2F$. Assim,

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F) - - - - - - - - - - - - -(1)$$

Escolha uma reta r, que não seja paralela a nenhuma das faces de P. Tomamos um plano H, que não intersecta P e que seja perpendicular a r. O plano H será chamado plano horizontal e as arestas paralelas a r (logo perpendicular a H) serão chamadas retas verticais. H divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contêm o poliedro P chamado semi-espaço superior e diremos que seus pontos estão acima de H. Imagine o sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto X do semi-espaço superior corresponde um X' em H, chamado sombra de X. A sombra de qualquer conjunto C, contido no semi-espaço superior é, por definição, o conjunto C', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de C.

Considere a sombra P' do poliedro P. Como P é convexo, cada ponto de P' é sombra de um ou dois pontos de P. A sombra de P' do poliedro P tem como contorno um polígono convexo K', sombra de uma poligonal fechada K formada por arestas de

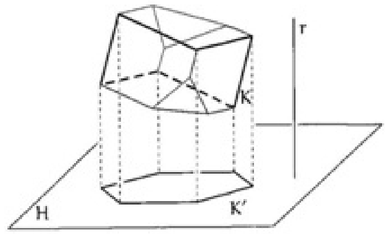


Figura 4.8: A região iluminada e a região sombria

P. Cada ponto de K' é sombra de um único ponto de P. A poligonal K é chamada de contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P' (portanto não pertence a K') é sombra de exatamente dois pontos de P. Dados dois pontos de P que tem mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamamos ponto iluminado e o mais baixo sombrio.*(observe a figura 4.8)*
Vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de P, observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua sombra (ambos são polígonos de mesmo gênero). Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente K. Então V=$V_0 + V_1 + V_2$. Note ainda que V_0 é o número de vértices (e de lados) da poligonal K', contorno de P'. *Observe a figura (4.9) abaixo:*

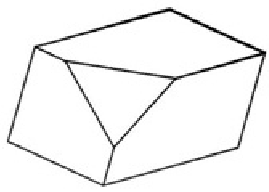


Figura 4.9: A sombra das faces iluminadas.

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de P. A sombra de todos os ângulos da figura anterior é:

$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)$
Por raciocínio análogo, podemos obter para a sombra de todos os ângulos da sombra das faces sombrias,
$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)$ Somando as duas, obtemos:
$S = S_1 + S_2 = [2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)] + [2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)]$
$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2)$
$S = 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2)$
$S = 2\pi(V - 2)$ ——(2)

Comparando (1) e (2) e dividindo por 2π,

resulta que :

$A - F = V - 2$ ou seja, $V - A + F = 2$ como queríamos demonstrar.

Fonte: Lima et. al.,1999, p.235 a 238

Exemplo: A bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Final da Copa do Mundo de futebol, realizada no México, em 1970, entre Brasil e Itália, foi inspirada em um conhecido poliedro convexo (descoberto por Arquimedes) formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. *(figura 4.10)*

Figura 4.10: Bola de futebol
$Fonte: Dante, 1.ed.1999, p.362$

4.5 Teorema 2

Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

4.5.1 Demonstração

Seja n o número de lados de cada face e seja p o número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos então: $2A = nF = pV$, ou $A = \dfrac{nF}{2}$ e $V = \dfrac{nF}{p}$

Substituindo na relação de Euler, obtemos:

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \Rightarrow \frac{2nF - pnF + 2pF}{2p} = 2 \Rightarrow 2nF - pnF + 2pF = 4p$$

$$\Rightarrow nF(2-p) = 4p - 2pF \Rightarrow F(2-p) = \frac{4p - 2pF}{n} \Rightarrow 2F - pF = \frac{4p}{n} - \frac{2pF}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{2pF}{n} - pF = \frac{4p}{n} - 2F \Rightarrow \frac{2pF - 4p}{n} = pF - 2F \Rightarrow \frac{2p(F-2)}{n} = F(p-2)$$

$$\Rightarrow F - 2 = \frac{F(p-2)}{2p} n \Rightarrow F = \frac{F(p-2)}{2p} n + 2 \Rightarrow F = \frac{F(p-2)n + 4p}{2p}$$

$\Rightarrow 2pF = F(p-2)n + 4p \Rightarrow 2pF = Fpn - 2Fn + 4p \Rightarrow 2pF - Fpn + 2Fn = 4p$

$\Rightarrow F(2p + 2n - pn) = 4p \Rightarrow F = \dfrac{4p}{2p + 2n - pn}$

Devemos ter $2p + 2n - pn > 0$, ou seja $\dfrac{2n}{n-2} > p$

Como $p \geq 3$, chegamos a $n < 6$. As possibilidades são então as seguintes:

$$n = 3 \Rightarrow F = \frac{4p}{6-p} = \begin{cases} p = 3 \Rightarrow F = 4(\text{tetraedro}) \\ \\ p = 4 \Rightarrow F = 8(\text{octaedro}) \\ \\ p = 5 \Rightarrow F = 20(\text{icosaedro}) \end{cases}$$

$$n = 4 \Rightarrow F = \frac{2p}{4-p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 6(\text{cubo})$$

$$n = 5 \Rightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow F = 12(\text{dodecaedro})$$

Fonte: Lima et. al.,1999, p.241 a 242

4.6 O Caso Plano do Teorema de Euler

Tomemos um poliedro convexo P e uma esfera S que o contenha. A partir de um ponto interior ao poliedro, projetamos P sobre S como mostra a *(figura 4.11)*

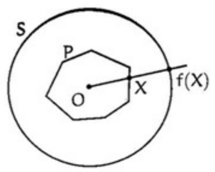


Figura 4.11: A projeção de P sobre S
Fonte: Lima et. al.,1999, p.243

A função $f : P \Rightarrow S$ é definida da seguinte forma. Sendo O um ponto interior a P, para cada ponto $X \in P$, definimos $f(X)$ como o ponto de interseção da semi-reta OX com S. A função f é contínua (o que significa que pontos próximos de P são levados em pontos próximos de S) e sua inversa $f^{-1} : S \Rightarrow P$ é também contínua. Vemos agora a esfera dividida em regiões limitadas por arcos de circunferência(ou simplesmente linhas). Chamamos de nó a projeção de cada vértice temos cada região limitada por pelo menos 3 linhas e também cada nó como extremidade de pelo menos 3 linhas.*(figura 4.12)*

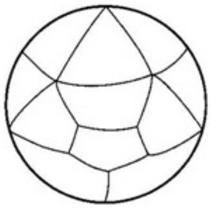


Figura 4.12: Esfera dividida em regiões
Fonte: Lima et. al.,1999, p.243

Para as linhas, regiões e nós da esfera S vale a relação de Euler, que já era válida em P. Tome agora um ponto N interior a região de S, um plano π perpendicular ao diâmetro de S que contem N e uma função $p : S - N \Rightarrow \pi$, tal que para cada ponto $Y \in S - N$, $p(Y)$ é a interseção da semi-reta NY com π.*(figura 4.13)*

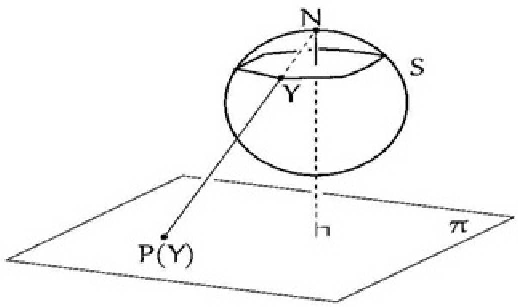


Figura 4.13: Projeção das regiões da esfera no plano
Fonte: Lima et. al.,1999, p.244

Se o poliedro original P tinha F faces, V vértices e A Aretas vemos agora o plano π dividido em F regiões por meio de A, linhas que se encontram em V nós. Por comodidade as linhas podem ser chamadas de "arestas"os nós de "vértices"e as regiões de "faces". Das F regiões, uma é ilimitada (chamada oceano) porque é projeção da região de S que contem o ponto N, mas a relação de Euler continua válida. A figura obtida em π pode ser agora continuamente deformada, mas a relação de Euler se matem inalterável.
Observe no desenho a seguir um exemplo onde o plano está dividido em 10 regiões (faces) através de 18 linhas (arestas) que concorrem em 10 nós (vértices).*(figura 4.14)*

$$V - A + F = 10 - 18 + 10 = 2$$

As transformações feitas são equivalentes a imaginar um poliedro de borracha e inflá-lo injetando ar até que se transforme em uma esfera. Em seguida, a partir de um furo feito em uma das regiões, esticá-lo até que se transforme em um plano. Não importa se as faces são planas ou não, ou se as arestas são retas ou não. Tudo pode ser deformado á vontade desde que essas transformações sejam funções contínuas cujas inversas sejam

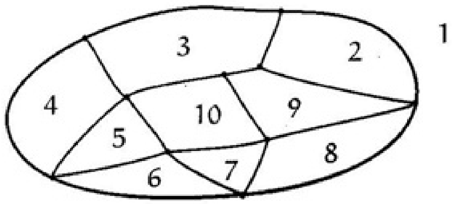


Figura 4.14: Plano dividido em 10 regiões
Fonte: Lima et. al.,1999, p.244

também contínuas.

4.6.1 Demonstração do Teorema de Euler no Plano.

Considere a região R do plano dividido em outras regiões justapostas como mostra a figura *(4.15)*.

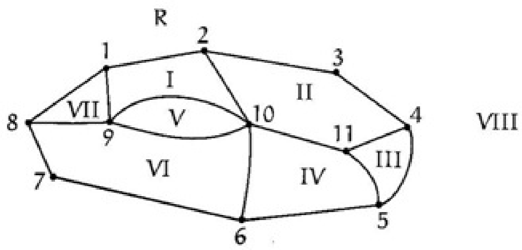


Figura 4.15: Divisão de uma região em outras justapostas

Cada região (seja R ou uma da decomposição) é limitada por pelo menos duas arestas, e um vértice é um ponto comum a pelo menos duas arestas. O termo aresta não significa um segmento de reta, mas sim qualquer curva contínua, sem auto-interseções, que liga um vértice a outro.

Considere o exterior de R como uma região. Observe a cima, temos o plano dividido em oito regiões. As regiões numeradas de I a VII são limitadas e a região $VIII$ é ilimitada, tendo o contorno de R como sua fronteira. A região ilimitada é comumente chamada de oceano. O contorno da região R é formado pelas arestas que ligam os vértices consecutivos de 1 a 8 e depois voltando a 1 (sem passar por 9). A região $VIII$, é formado pelos pontos exteriores ao contorno de R. A região I é formada pela arestas que ligam consecutivamente os vértices $1-2-10-9-1$ e a região V é limitada apenas pelas duas arestas que ligam os vértices 9 e 10. Considere agora o plano dividido em F regiões (sendo uma ilimitada), através de A arestas que concorrem em V vértices. Afirmamos que $V-A+F=2$.

A fórmula $V-A+F=2$ vale no caso simples em que apenas um polígono de r lados está desenhado no plano. Neste caso, $A = V = n, F = 2$.

Vamos usar indução para mostrar que se a relação de Euler vale para uma decomposição do plano em F regiões, então ela vale para uma decomposição em $F+1$ regiões. Uma determinada decomposição pode ser construída por etapas onde, em cada uma delas, uma nova região é acrescentada no oceano das anteriores. Considere uma decomposição do plano em F regiões através de A arestas que concorrem em V vértices *(como mostra a parte em linhas cheias da figura 4.16)*, satisfazendo a relação de Euler. Acrescente agora uma nova região contida no oceano das regiões anteriores (como mostra a parte em linha tracejada da figura), desenhando uma sequência de arestas ligando dois vértices do contorno da divisão anterior. Se acrescentamos r arestas, então acrescentamos $r-1$ vértices e uma nova região.

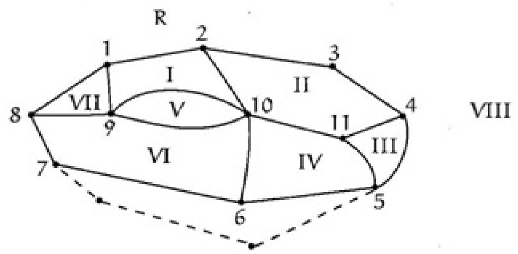


Figura 4.16: Acrescentando uma nova região
Fonte: Lima et. al.,1999, p.245 a 247

A relação de Euler permanece válida, pois, $V - A + F = (V + r - 1) - (A - r) + (F + 1)$ o que conclui a demonstração.

Capítulo 5

As construções dos poliedros

Para construir um poliedro, cada vértice têm que concorrer no mínimo 3 faces. Logo, os únicos polígonos regulares que podem ser faces de poliedros regulares convexos são os triângulos equiláteros, os quadrados e os pentágonos regulares.Nos triângulos equiláteros, o número de faces que podem concorrer em um vértice é 3, 4 ou 5, obtendo-se, respectivamente, três poliedros regulares: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro. Nos quadrados, o número de faces que podem concorrer em um vértice é 3, obtendo-se o hexaedro. E nos pentágonos regulares, o número de faces que podem concorrer em um vértice é 3, obtendo-se o dodecaedro regular. Portanto, no total existem cinco poliedros regulares convexos.

5.1 As Construções dos Sólidos de Platão.

Os cinco poliedros regulares convexos são:

O **tetraedro** é o primeiro sólido regular, e a partir dele se fazem todos os demais.Ele possui quatro vértices, quatro faces e seis arestas.
O **hexaedro** é um sólido sociável, onde, podemos juntar cubos sem que sobrem espaços vazios. Ele é composto de oito vértices, seis faces e doze arestas.
O **octaedro** é composto de seis triângulos equiláteros. Pode ser visto como um antiprisma de base triangular, ou como duas pirâmides de base quadrada. Possui seis vértices, oito faces e doze arestas.
O **dodecaedro** é composto de doze pentágonos. Ele possui vinte vértices, doze faces e trinta arestas.
O **icosaedro** é composto de vinte triângulos equiláteros.Ele possui doze vértices, vinte faces e trinta arestas.*(figura 5.1)*

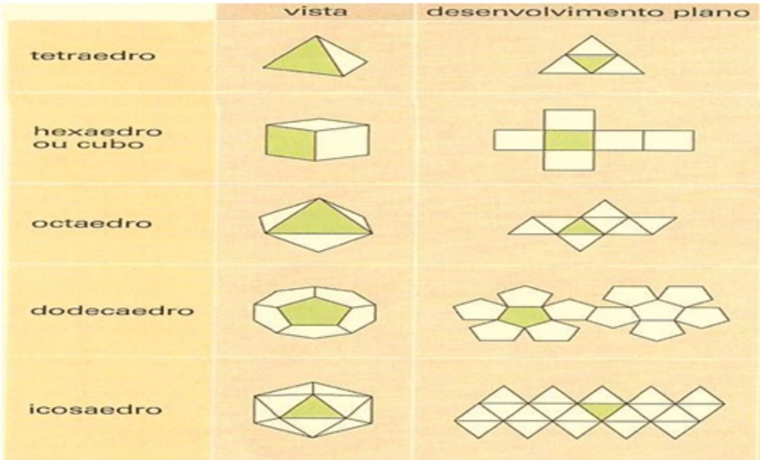


Figura 5.1: Sólidos de Platão
$Fonte: Barsa, vol.14.2.ed.2009, p.4739$

5.2 As Construções dos Sólidos de Kepler-Poinsot

Um Poliedro de Kepler-Poinsot é um poliedro regular não convexo. Todas as suas faces são polígonos regulares iguais.
Os quatro poliedros regulares não covexos são:

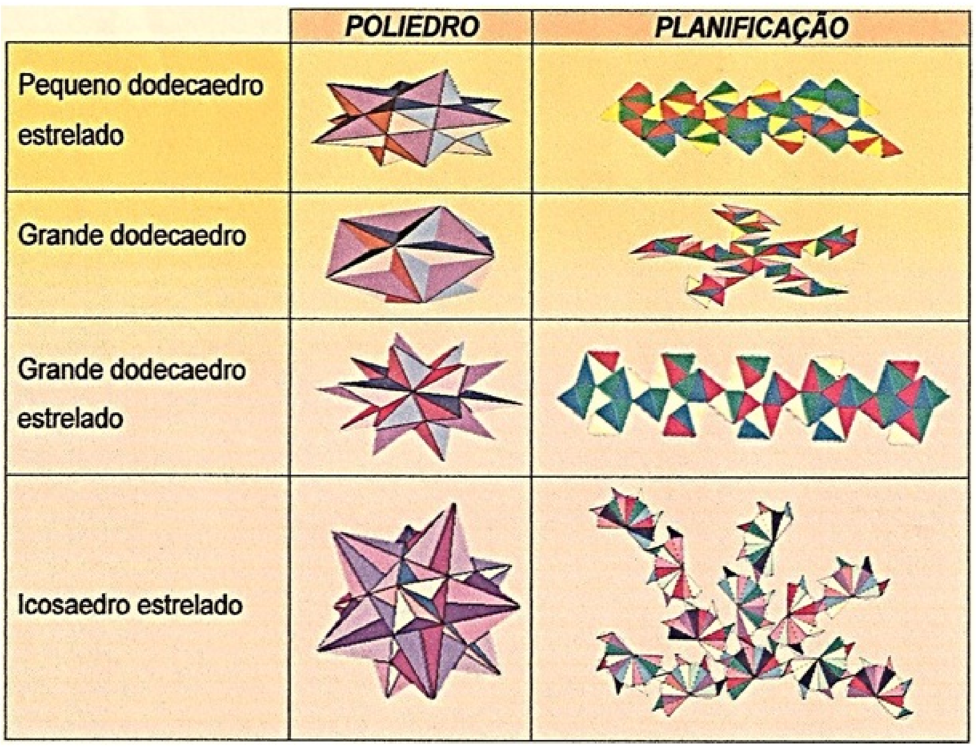


Figura 5.2: Sólidos de Kepler-Poinsot
$Fonte: www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../MC00166198706T.doc$

O **pequeno dodecaedro estrelado** é a primeira estrelação do dodecaedro, possui

doze faces em forma de pentagrama, doze vérticese e trinta arestas.
O **Grande dodecaedro** é a segunda estrelação do dodecaedro, possui doze faces em forma de pentágonos, doze vérticese e trinta arestas.
O **Grande dodecaedro estrelado** é a terceira estrelação do dodecaedro, possui doze faces em forma de pentagrama, vinte vérticese e trinta arestas.
O **Icosaedro estrelado**: suas faces são vinte triângulos equiláteros, doze vértices e trinta arestas.*(figura 5.2)*

5.3 As Construções dos Sólidos de Arquimedes

Os treze poliedros semi-regulares são:

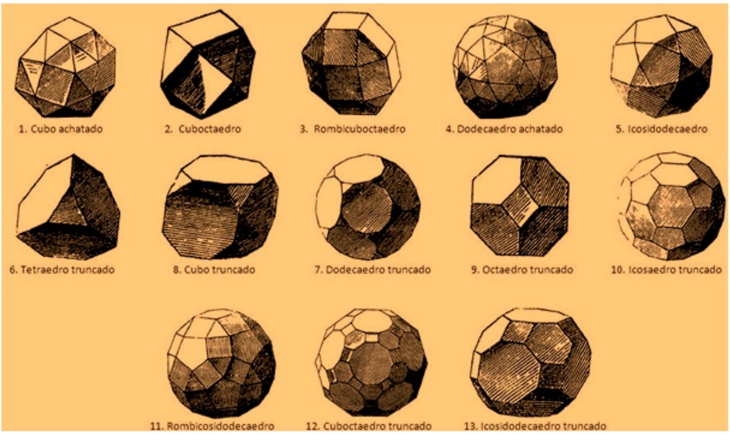


Figura 5.3: Sólidos de Arquimedes
$Fonte: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/talita_carvalho_almeida.pdf$

Os poliedros semi-regulares são gerados a partir do truncamento de algum dos cinco poliedros regulares e classificam-se segundo o poliedro regular de partida. No entanto, existe um único poliedro regular, construído a partir do truncamento de um tetraedro:

O **tetraedro truncado** é composto de 4 triângulos e 4 hexágonos. Constrói-se cortando os cantos do tetraedro a uma distância de um terço de aresta do vértice.
O **cubo truncado** é composto de 8 triângulos e 6 octágonos. Ele se constrói cortando os cantos do cubo a uma distância de um terço de aresta do vértice. Em cada vértice surge um triângulo equilátero, e de cada face quadrada do cubo obtém-se um octógono regular.
O **cuboctaedro** é formado por 8 triângulos e 6 quadrados. Se constrói cortando os cantos do cubo à altura do centro das arestas. Em cada vértice dele surge um triângulo equilátero, e de cada face quadrada do cubo obtém-se outro quadrado com a metade da área da face. Ele também se pode obter a partir do truncamento do octaedro.
O **octaedro truncado** é formado por 6 quadrados e 8 hexágonos. Se constrói cortando os cantos do octaedro a uma distância de um terço de aresta do vértice. Em cada vértice

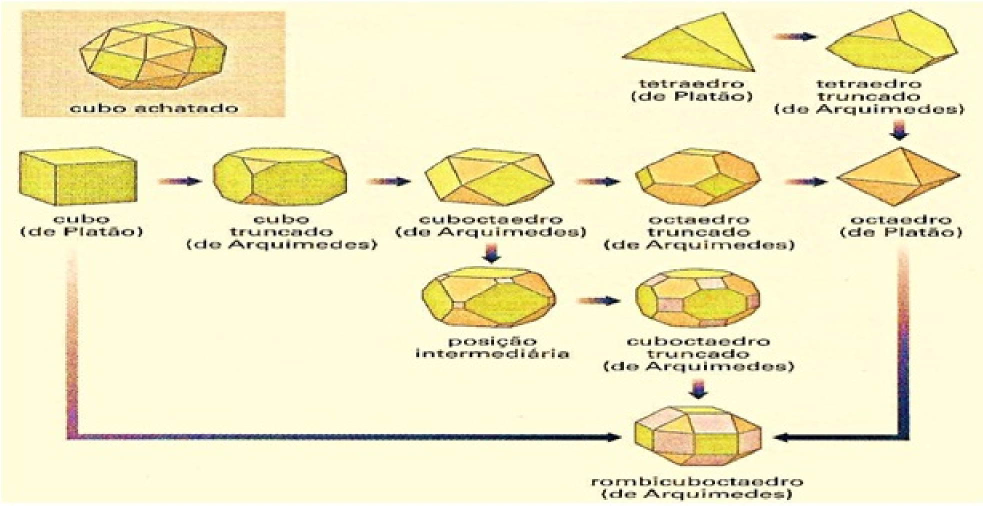


Figura 5.4: Construção dos sólidos de Arquimedes
$Fonte : Barsa, vol.14.2.ed.2009, p.4740$

obtém-se um quadrado, e de cada face triangular do octaedro resulta um hexágono regular.

O **cuboctaedro truncado** é formado por 12 quadrados, 8 hexágonos e 6 octógonos.

O **pequeno rombicuboctaedro** é formado por 8 triângulos e 18 quadrados.

O **cubo achatado** é composto de 32 triângulos e 6 quadrados.

O **dodecaedro ou icosaedro** é o ponto de partida para a construção de seis poliedros, que, juntamente com os sete anteriores, formam os treze sólidos de Arquimedes.

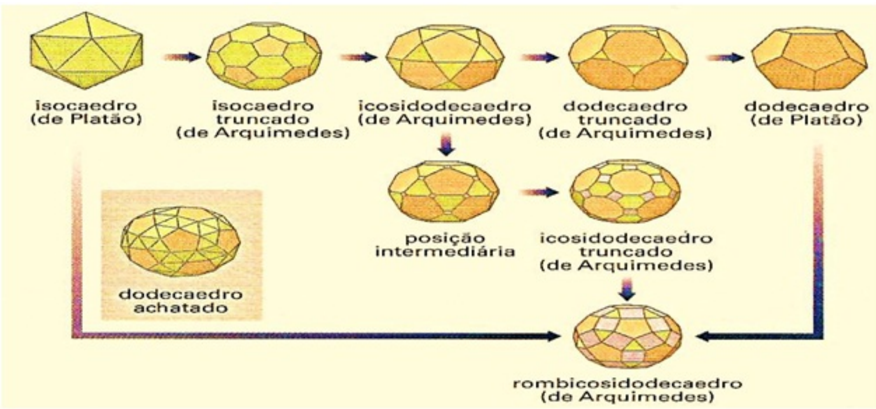


Figura 5.5: Truncamento
$Fonte : Barsa, vol.14.2.ed.2009, p.4740$

O **icosidodecaedro** é formado por 20 triângulos e 12 pentágonos. Constrói-se cortando os cantos do dodecaedro à altura do centro das arestas. De cada vértice obtém-se um triângulo equilátero, e de cada face pentagonal do octaedro resulta um pentágono regular. Também se pode obtê-lo a partir do icosaedro.

O **dodecaedro truncado** é formado por 20 triângulos e 12 decágonos. Se constrói cortando os cantos do dodecaedro a uma distância de um terço de aresta do vértice. Em cada vértice obtém-se um triângulo equilátero, e de cada face pentagonal do octaedro resulta um decágono regular.
O **icosaedro truncado** é formado por 12 pentágonos e 20 hexágonos.
O **pequeno rombicosidodecaedro** é composto de 20 triângulos, 30 quadrados e 12 pentágonos.
O **icosidodecaedro truncado** é formado por 30 quadrados, 20 hexágonos e 12 decágonos. Também se denomina grande rombicosidodecaedro.
O **dodecaedro achatado** é formado por 80 triângulos e 12 pentágonos.

5.4 As Construções dos Poliedros Irregulares

A **Pirâmide** é um poliedro formado pela ligação de todos os vértices de um lado poligonal de n lados com um único ponto, chamado vértice da pirâmide, através de n faces triangulares. Uma pirâmide é todo poliedro formado por uma face inferior e um vértice que une todas as faces laterais. As faces laterais de uma pirâmide são regiões triangulares, e o vértice que une todas as faces laterais é chamado de vértice da pirâmide. O número de faces laterais de uma pirâmide corresponde ao número de lados do polígono da base.
Os **prismas** são constituidos por duas faces paralelas chamadas diretrizes que dão o nome ao prisma, e uma série de retângulos, tantos como lados da face diretriz. Por exemplo, o prisma cujas faces diretrizes são triangulares chama-se prisma triangular e compõe-se de 2 triângulos e 3 retângulos; tem 9 arestas e 6 vértices de ordem 3 de onde convergem sempre dois retângulos e um triângulo. Outro exemplo seria o Prisma decagonal composto de 2 decágonos + 10 rectângulos; tem 30 arestas e 20 vértices de ordem 3.
Os **antiprismas** têm uma construção parecida, duas faces paralelas e ao uni-las uma série de triângulos. O número de triângulos é número de lados da face diretriz multiplicado por dois; assim o antiprisma pentagonal compõe-se de 2 pentágonos e 10 triângulos; tem 10 vértices e 20 arestas.

Considerações Finais

O estudo realizado tem nos levado a muitos outros questionamentos, considerando as ideias levantadas por estudiosos da área. É parte de um conceito maior, que consideramos imprescindível para o entendimento dos poliedros. Existe uma infinidade desses sólidos geométricos chamados poiedros, pois a partir de alguns processos de transformações podem ser construídos muitos outros, por isso destacamos em nosso trabalho os poliedros que por alguma particularidade são finitos como é o caso dos cinco poliedros regulares convexos (conhecidos como sólidos de Platão), os quatro regulares não convexos (chamados de sólidos de Kepler-Poinsot)e os treze semi-regulares (conhecidos como os sólidos de Arquimedes). Neste trabalho, apenas conseguimos sintetizar algumas questões do estudo da geometria, estudo este que é tão complexo e fascinante entre várias áreas do conhecimento humano. Deste modo, objetivamos estudar os poliedros desde sua origem até sua formação, buscando, finalmente, sintetizar características próprias, com a aplicação da transformação geométrica. Assim, para alcançarmos nossos objetivos de pesquisa recorremos a um estudo bibliográfico desenvolvido com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages et al.A matemática do ensino médio vol.2.6.ed.Rio de Janeiro: Imos, 1998;

[2] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau.Fundamentos da matemática elementar: Geometria espacial; Posição e métrica. 5.ed.São Paulo:Atual, 2001;

[3] BOSCH, José Manoel Lara et al. Enciclopédia Barsa Universal. 2.ed.Manaus: Grafos, 2009

[4] Dante, Luiz Roberto.Matemática Contexto e Aplicações.1.ed.São Paulo:Ática, 2009;

[5] < http : //www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm205/historia.htm >

[6] < http : //www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/tales − de − mileto >

[7] < http : //fabiopestanaramos.blogspot.com/2011/07/ >

[8] < http : //www.cdcc.usp.br/ciencia/artigos/art$_2$6/proporcao.html >

[9] < http : //matematica.com.br/site/biografias/104 − euclides − de − alexandria.html >

[10] < http : //clubedematematica.esc − joseregio.pt/Archimedes.jpg.imgrefurl >

[11] < http : //sorumbatico.blogspot.com/2007/04/faces − arestas − e − vrtices.html >

[12] < http : //www.brasilescola.com/matematica >

[13] < http : //pt.wikipedia.org >

[14] < http : //www.somatematica.com.br >

[15] < http : //www.grupoescolar.com/pesquisa/euclides >

[16] < http : //tudoexatas.blogspot.com >

[17] < http : //pt.wikibooks.org/wiki/MatemC3A1tica.elementa/Geometria.plana >