



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

*TEORIA DA CATÁSTROFE E APLICAÇÕES*

MACAPÁ-AP

2013



ADRIANE SANTOS BASTOS  
FAGNER GOMES DO CARMO

*TEORIA DA CATÁSTROFE E APLICAÇÕES*

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

MACAPÁ-AP

2013

ADRIANE SANTOS BASTOS  
FAGNER GOMES DO CARMO

*TEORIA DA CATÁSTROFE E APLICAÇÕES*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

---

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco

---

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil

---

Prof. Ms. Kelmem da Cruz Barroso

Avaliado em: 06/05/2013

MACAPÁ-AP  
2013

## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar, agradecemos a Deus pelo dom da vida, pela possibilidade de tantas realizações e por ter colocado em nossos caminhos algumas pessoas tão especiais, que de alguma forma nos ajudaram ao longo desta caminhada.

Os membros de nossas famílias, com um destaque para os nossos pais, Maria de Jesus Santos Bastos, Orlando Mendes Bastos, Rosilete Maria Paes do Carmo, Celivaldo Paes do Carmo e Maria Domingas Gomes, que nos acompanharam durante este tempo todo, são conhecedores de nossas dificuldades e sempre nos apoiaram no que se refere aos nossos estudos.

Os nossos professores, entre os quais citamos o nosso orientador Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco e o Dr. José Walter Cárdenas Sotil, que tantas vezes nos ajudaram em momentos de necessidade, não só na produção desta monografia, mas durante todo o processo de graduação.

E não poderíamos deixar de agradecer a todos que nos deram força, coragem e ânimo para seguirmos firmes, como o Fábio Dias, Francine Muryelle, Ademilton Melo, Jefte Souza, Joelma Nascimento, Luan Pinheiro, Tamires da Silva e Saulo Ferreira, que conviveram conosco até aqui e são testemunhas de que o caminho foi longo, as dificuldades foram grandes e a nossa vontade de vencer foi maior ainda.

“Há uma força motriz mais poderosa que o vapor, a eletricidade e a energia atômica: a VONTADE.”

(Albert Einstein)

## Resumo

Esta Monografia tem o objetivo de expor pontos importantes sobre a Teoria da Catástrofe, desenvolvida pelo matemático francês René Thom, que propõe dar uma explicação de alguns fenômenos de tipo descontínuo através do uso de modelos matemáticos de tipo contínuo. Apresentamos as Sete Catástrofes Elementares, onde destacamos as catástrofes do tipo Dobra e Cúspide, que são as que aparecem com mais frequência no cotidiano. Além disso, mostramos algumas aplicações desta teoria, originada da Teoria das Singularidades (análise de aplicações diferenciáveis) e dos estudos dos Sistemas Dinâmicos (quando algumas grandezas variam no tempo).

Palavras-Chave: Teoria da Catástrofe. Aplicações. René Thom. Sete Catástrofes Elementares. Dobra. Cúspide. Singularidades. Sistemas Dinâmicos.

## **Abstract**

This monograph aims to present important topics on the Catastrophe Theory, developed by a French René Thom. This theory proposes to explain some phenomenon of type discontinuous , by using mathematical models of type continuous. We will expose the Seven Elementary Catastrophes, where we will emphasize the catastrophes of type Fold and Cusp, which can be seen more often in daily environment. Moreover, we will show some applications of this theory, originated from the Theory of Singularities (analysis of differentiable applications) and from studies of Dynamic Systems (when some greatneses vary on time).

Keywords: Catastrophe Theory. Applications. René Thom. Seven Elementary Catastrophes. Fold. Cusp. Singularities. Dynamic Systems.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1	Sistemas Dinâmicos . . . . .	8
1.2	Série de Taylor . . . . .	10
1.2.1	Teorema (Expansão em Série de Taylor) . . . . .	10
1.3	Singularidades . . . . .	12
1.3.1	O Teorema da Função Implícita . . . . .	13
1.3.2	Trajetórias de Pontos Críticos . . . . .	13
1.3.3	Classificação de Singularidades . . . . .	15
1.3.4	Caso Unidimensional . . . . .	16
1.3.5	Caso N - Dimensional . . . . .	17
1.3.6	Genericidade de Singularidades . . . . .	18
1.3.7	Famílias de Funções . . . . .	20
1.3.8	Teorema da Classificação de Thom . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Contexto Histórico</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>A Teoria da Catástrofe</b>	<b>27</b>
3.1	A Matemática da Teoria . . . . .	27
3.1.1	Exemplo . . . . .	30
3.2	Sete Catástrofes Elementares . . . . .	34
3.3	Geometria das Catástrofes: Dobra e Cúspide . . . . .	36
3.3.1	Geometria da Catástrofe Dobra . . . . .	37
3.3.2	Geometria da Catástrofe Cúspide . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Aplicações da Teoria da Catástrofe</b>	<b>48</b>
4.1	A Crise de 2008 . . . . .	48



4.2	O Cofre do Tio Patinhas . . . . .	52
4.3	O Estudo da Atividade de uma Personalidade Criativa . . . . .	54
4.4	Atitude de um Cão . . . . .	55
4.5	Relação Entre Pais e Filhos . . . . .	56
4.6	Uma Curiosidade . . . . .	57
	<b>Considerações Finais</b>	<b>59</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>60</b>

# Lista de Figuras

1.1	Exemplo de Sistema Dinâmico . . . . .	10
1.2	Pontos Críticos de $F_s(x) = x^3 + sx$ ( $s$ é o eixo vertical). . . . .	19
2.1	Thom e Zeeman . . . . .	25
3.1	Um possível exemplo de função potencial numa variável $x$ . . . . .	28
3.2	Gráfico da função potencial $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$ para os valores do parâmetro $u = -4$ (vermelho), $u = -1$ (azul) e $u = 1$ (preto). . . . .	30
3.3	Gráfico da função $-(x^3 - 2x + 1)$ . . . . .	31
3.4	Gráfico de estabilidade da função $-(x^3 - 2x + 1)$ . . . . .	31
3.5	Gráfico da função $-(x^3 - x + 1)$ . . . . .	32
3.6	Gráfico da catástrofe . . . . .	32
3.7	Gráfico da função $-(x^3 + x + 1)$ . . . . .	33
3.8	Gráfico da instabilidade da função $-(x^3 + x + 1)$ . . . . .	33
3.9	Os sete tipos de catástrofes elementares . . . . .	36
3.10	(a) Membros da família de dobra de funções $f(x; a) = \frac{1}{3}x^3 + ax$ para diversos valores do parâmetro de controle $a$ . (b) Localização dos pontos críticos como uma função de $a$ . . . . .	39
3.11	(c) Valor da função nos pontos críticos. (d) Curvatura da função nos pontos críticos. . . . .	40
3.12	Catástrofe Dobra . . . . .	41
3.13	(a) Membros da família de cúspide de funções $f(x; a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$ para diversos valores dos parâmetros de controle $a, b$ . (b) Localização dos pontos críticos como uma função de posição sobre o plano dos parâmetros de controle. . . . .	44

3.14 (c) Valor da função nos pontos críticos. (d) Curvatura da função nos pontos críticos. . . . .	46
4.1 Catástrofe na Bovespa em 2008 . . . . .	49
4.2 Gráfico da dobra do espaço observado de cima . . . . .	50
4.3 Dados reais do Ibovespa . . . . .	51
4.4 Dados do Ibovespa . . . . .	51
4.5 A Christmas for Shacktown . . . . .	53
4.6 Gráfico das equações $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$ (azul), $x^2 + u = 0$ (verde) e $x = \sqrt{ u }$	53
4.7 Cúspide . . . . .	54
4.8 Comportamento de um Cão . . . . .	55
4.9 Atitude dois Pais em Relação aos Filhos . . . . .	56
4.10 O Rapto Topológico de Europa e A Cauda de Andorinha, segundo Salvador Dali . . . . .	57

# Introdução

A palavra catástrofe vem do grego *katastrophe*, que significa “fim súbito, virada de expectativas”, ou mais especificamente, *kata* quer dizer “para baixo” e *strophein* expressa “virar”. De modo genérico, é a denominação pela mudança brusca de padrão para um determinado evento. São exemplos de catástrofes: um deslizamento de terra devido às chuvas, que mata centenas de pessoas, pois devido a uma mudança repentina nos padrões de normalidade (no caso, a intensidade de chuvas) um morro não suporta a quantidade de água e se liquefaz vindo abaixo; quedas bruscas em bolsas de valores levando milhões de pessoas a perdas irrecuperáveis; um tsunami, que ocorre devido a terremoto e invade uma ilha alagando e matando milhares de pessoas; o interruptor de luz elétrica (exemplo clássico), tanto aceso ou apagado, pois você está no escuro total e acende a luz ou você está no claro total e apaga a luz, ambos são catástrofes. Logo, é uma mudança de estado que caracteriza a catástrofe.

René Thom, francês renomado, criou um modo qualitativo para a matemática representar uma catástrofe, o qual chamava modelos matemáticos da morfogênese na designação preferencial, e posteriormente passaria a chamar “Teoria da Catástrofe”. Na década de 1960 era natural se pensar neste assunto, pois o mundo vivia a pior fase da guerra fria. Ataques nucleares e catástrofes para a espécie humana eram debatidos constantemente.

No princípio, a teoria de Thom não foi muito empolgante quando ele a escreveu na década de 60, mas com a crise do petróleo, na década de 1970, todos os pesquisadores passaram a estudar sua teoria e começar a aplicar em diversas áreas. A teoria da catástrofe virou “mania” nas academias. As aplicações foram tantas que se banalizou demais a teoria a ponto de cair em total descrédito.

Dona de uma matemática muito complicada para leigos entenderem, a teoria da catástrofe foi bastante utilizada por astrofísicos e engenheiros para previsão repentina

na mudança de padrão nas variáveis dos modelos.

O referente Trabalho de Conclusão de Curso tem como característica mostrar aspectos importantes sobre a Teoria da Catástrofe, dividido em 5 (cinco) capítulos. No primeiro, apresentaremos alguns conteúdos que são básicos para a compreensão do tema; o segundo contém uma introdução ao estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis, de onde teve origem esta teoria; no terceiro, mostraremos o contexto histórico da mesma, onde destacaremos os nomes dos grandes estudiosos e como iniciaram as pesquisas sobre este assunto; o quarto capítulo irá expor a Teoria da Catástrofe propriamente dita, contendo toda a matemática que pode ser vista em sua essência, bem como o comportamento gráfico das equações diferenciais nela contidas, além de exibir os tipos de catástrofes existentes e enfatizar os dois que mais podem ser observados em nosso meio; e no quinto capítulo vamos expor exemplos de aplicações no cotidiano da teoria estudada.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Sistemas Dinâmicos

Quando Isaac Newton elaborou sua teoria sobre gravitação, fez com que a humanidade desse um salto gigante em relação à ciência do passado. Até então, a geometria dominava o mundo, os geômetras eram considerados os maiores e melhores matemáticos. Não é a toa que Kepler perdeu anos de sua vida tentando explicar a órbita dos planetas em termos de circunferências.

A lei de Newton sobre a dinâmica dos corpos introduziu a noção de diferenciabilidade, de derivada e de integral. A noção de como as taxas variam no tempo, fez com que conceitos antigos passassem por revisões. A própria lei de Kepler para a gravitação passou por correções e interpretações mais simples. A noção da derivada envolve outro bonito conceito sobre limites o que fez muitos matemáticos passarem a vida tentando alcançar o infinito através de séries e sequências. A seguinte fórmula:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Diz que uma taxa (taxa de crescimento do PIB, taxa de inflação, etc) varia no tempo e recebe o nome de derivada, quando para um tempo muito, mas muito pequeno, a diferença entre uma função no passado e seu valor “delta” no futuro ponderado pelo tempo se torna a declividade de uma reta tangente à trajetória dos dados. Assim, a derivada de uma função apresenta a declividade de uma reta que tangencia a trajetória, o que é bem diferente do simples cálculo da taxa pela fórmula:

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

No princípio, a resolução de sistemas com derivadas envolvia as regras de derivação e depois as regras para integração. A noção de sistemas dinâmicos, como é conhecida hoje em dia, foi moldada por *Poincaré*, que ficou famoso ao provar que o problema de três corpos (Sol, Terra e Lua) não tem solução fechada em sistemas dinâmicos. Foi ele o responsável por construir teoremas que envolveram assuntos novos até então tais como estabilidade, instabilidade, pontos estáveis e conceitos em geral sobre tipos e soluções para sistemas dinâmicos.

Um sistema dinâmico não se compõe apenas de derivadas, mas de relações entre derivadas que gerou outro conceito no século XIX: o conceito de modelagem matemática de sistemas. Modelos não param de surgir para tentar imitar a realidade. Muitos modelos são baseados em relações entre tantas derivadas que, do ponto de vista matemático, não existem soluções fechadas, apenas as conhecidas soluções numéricas que são obtidas somente via computador.

No princípio, eram modelos bem simples, tais como os que dependiam apenas de uma variável e do tempo. Exemplos como decaimento exponencial e crescimento exponencial rechearam livros antigos, tais como as aplicações de Malthus sobre a possível fome mundial com a escassez de alimentos.

Depois, a ampliação de inter-relações entre diversas derivadas geraram os conceitos de sistemas, com diversas variáveis, diversos parâmetros e, se perturbações aleatórias forem introduzidas, muitos cenários diferentes são obtidos para a mesma condição inicial. Hoje em dia, existem modelos com até 150 equações diferenciais para simular uma bolsa de valores, por exemplo, ou até mais, como no caso de games famosos como “flightsimulator” e “simcity”.

Uma equação diferencial é o centro de todo estudo sobre simulação computacional amplamente divulgado hoje em dia. É possível simular modelos sem saber que equações estão regendo o modelo? Sim, tal como todo simulador é possível brincar sem saber a matemática envolvida, mas se poderá chegar apenas como um excelente jogador e não um especialista.

Uma equação diferencial é uma regra que foi encontrada para a variação instantânea da derivada, por isso o nome modelo. A variação permitiu ao pesquisador descobrir como a taxa de crescimento de uma variável se altera, permitindo então a integração dessa taxa, ou seja, resolvendo a equação diferencial. A forma dessa equação é:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

Um exemplo pode ser o crescimento exponencial da inflação ou hiper-inflação que é regido pela equação diferencial  $\frac{dx}{dt} = ax$

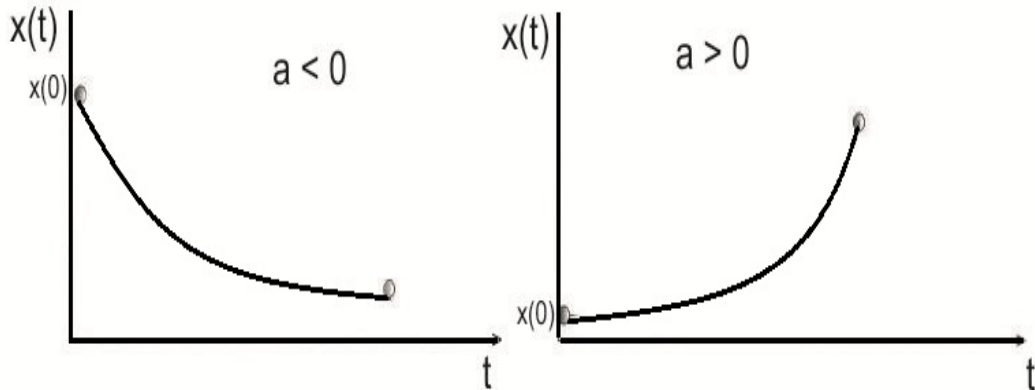


Figura 1.1: Exemplo de Sistema Dinâmico

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/SistemasDin.html>

Existem diversos softwares que promovem a simulação de sistemas dinâmicos proporcionando a alunos e professores apenas arrastarem caixas e retas ligando variáveis. O problema é que esses softwares, para se tornarem mais ágeis, já chegaram a utilizar nas primeiras versões integradores das equações dos mais banais e mais antigos. Conclusão: uma gama enorme de trabalhos “ditos científicos” se perdeu com sua inutilidade pois a solução estava toda fora da realidade. Era como se discutisse “sexo dos anjos”.

## 1.2 Série de Taylor

Nosso intuito é determinar, de acordo com a função, uma boa aproximação através de um polinômio a ela. Não vamos utilizar de pontos de sua imagem, mas, sim, de sua derivada de ordem  $n$ . Como resultados, podemos aproximar tão bem quanto quisermos a função por meio do polinômio, como diz nosso seguinte teorema:

### 1.2.1 Teorema (Expansão em Série de Taylor)

Seja uma função infinitamente diferenciável  $f(x)$  qualquer. Então, temos que:



$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + E(x)$$

Onde  $E(x)$  é a função que representa o erro de truncatura, e  $f^{(n)}(x)$  é a  $n$ -ésima derivada de  $f$ . Esta representação de  $f$  é dita centrada em  $a$ , pois o polinômio que aparece antes do erro de truncatura assume valor igual a  $f(a)$ , ou seja, o erro de  $a$  é igual a zero. Uma maneira alternativa de representar a função, iterando nosso processo o quanto quisermos, é:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n}{n!}$$

**Demonstração:** Como nossa intenção é achar um polinômio  $P(x)$  tal que este molde suficientemente bem a função, devemos querer que:

$$p(x) = f(x)$$

$$p'(x) = f'(x)$$

$$p''(x) = f''(x)$$

$$p'''(x) = f'''(x)$$

.

.

.

$$p^n(x) = f^n(x)$$

então temos que:

$$A_1(x - a)^n + A_2(x - a)^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x - a) + A_n \approx f(x)$$

Como queremos determinar o coeficiente independente de  $P$  de modo que a função se aproxime do ponto  $a$ , é natural tomar este coeficiente como  $f(a)$ . Os outros conseguimos através de sucessivas derivações: derivando até tornar o termo independente vemos que, de fato:

$$A_1 = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Integrando esta última equação, com o devido coeficiente líder em seu lugar, e fazendo  $x = a$ , encontramos  $A_2$ :

$$(n-1)!A_2 = f^{(n-1)}(a) \Leftrightarrow A_2 = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

Bom, o processo já deve estar claro: indutivamente, temos que:

$$A_k = \frac{f^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}$$

Logo, nosso método de aproximação polinomial que melhor molda a função em uma vizinhança de um ponto  $a$  é:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + E(x)$$

## 1.3 Singularidades

A Teoria da Catástrofe tem suas origens nos estudos dos Sistemas Dinâmicos e na Teoria das Singularidades dos mapeamentos suaves, estudada por Whitney (1907-1989, Nova York). Neste trabalho de conclusão de curso apresentaremos uma introdução ao estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis, que servirá como base para o melhor entendimento do que será descrito nos próximos capítulos.

A Teoria das Singularidades é um dos ramos mais produtivos e atraentes da matemática na atualidade. Ela não é uma teoria no sentido axiomático usual, e o que a torna tão atraente é sua dimensão abrangente, suas vagas fronteiras e suas interações com outros ramos, não só da Matemática, mas da ciência em geral.

É comum se pensar que a Teoria de Singularidades é um descendente direto do Cálculo Diferencial e uma vez que este é ferramenta, por excelência, para se estudar física, equações diferenciais e a geometria de curvas e superfícies é de se esperar que esta teoria tenha aplicações nestas áreas. Ela é uma extensão de vasto alcance do estudo de funções em pontos de máximo e mínimo; neste caso as funções são substituídas por famílias de funções.

A melhor maneira de se introduzir a Teoria de Singularidades é mostrando em ação uma situação concreta, onde não há dúvida sobre o que está ocorrendo e também que requeira um mínimo necessário de conhecimento prévio, como por exemplo, em algumas situações geométricas que de uma maneira oportuna serão introduzidas.

### 1.3.1 O Teorema da Função Implícita

Seja  $f : R^m \times R^n \rightarrow R^p$  uma função suave. A superfície de nível  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  é localmente um gráfico  $y = \tilde{y}(x)$  (com  $y_0 = \tilde{y}(x_0)$  e  $\tilde{y}$  suave) sempre que a aproximação linear correspondente  $Df|_{(x_0, y_0)}(x, y) = 0$  for um gráfico  $y = y(x)$ .

**Comentário:** Uma função é dita suave quando ela for infinitamente diferenciável. Note que  $x \in R^m$  e  $y \in R^n$  podem ter várias componentes. O Teorema da Função Implícita pode ser escrito sob condições mais fracas, mas isto será suficiente para nossas aplicações. Se escrevermos as  $p$  componentes de  $f$  explicitamente como:

$$(f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), f_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n))$$

Então  $Df$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é a transformação linear dada pela matriz  $p \times (m+n)$  abaixo

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(x_0, y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

**Exemplo:** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Note que  $Df|_{(x_0, y_0)} = (2x_0, 2y_0)$  e portanto de  $Df(x, y) = 2xx_0 + 2yy_0 = 0$  pode ser resolvido para  $y$  ( $y = -\frac{xx_0}{y_0}$ ) se, e somente se,  $y_0 \neq 0$ . Assim, podemos resolver  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  para  $y$  em função de  $x$  sempre que  $y_0 \neq 0$ . Este fato poderia, é claro, ser verificado sem o uso do teorema, afinal

$$x^2 + y^2 - 1 = x_0^2 + y_0^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{-x}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2}}$$

mostrar que  $y(x)$  é uma função diferenciável em  $x = x_0$  a menos que  $y_0 = 0$ . Note que a escolha do sinal depende do sinal de  $y_0$ , já que queremos  $y(x_0) = \pm \sqrt{y_0^2} = y_0 - n_0$  entanto, uma vez escolhido este sinal, a definição de  $y(x)$  é única.

### 1.3.2 Trajetórias de Pontos Críticos

Agora vamos analisar o comportamento de um ponto crítico e uma imagem  $F$  à medida que a escala muda. Em primeiro lugar, exibimos uma definição um pouco mais formal de “ponto crítico” e “ponto crítico não-degenerado”.

**Definição:** Seja  $f : R^n \rightarrow R$ ; dizemos que  $x_0 \in R^n$  é um ponto crítico de  $f$  sempre que  $\nabla f = \vec{0}$  em  $x_0$ . Dizemos que  $x_0$  é não-degenerado se a Hessiana de  $f$

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_2x_1} & \cdots \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

for não singular em  $x_0$ , isto é, se  $\det Hf \neq 0$ .

Agora estamos prontos para acompanhar a trajetória de um ponto crítico de  $F_t(x, y)$  enquanto ele não é degenerado. A demonstração a seguir chamará de  $P(x_1(t), y_1(t))$  a trajetória do ponto crítico de uma função  $F_t(x, y)$  que satisfaz a equação do calor. Também gostaríamos de obter uma expressão para a velocidade de  $P$  em função de  $F_t$ .

**Teorema:** Se  $x_0$  é um ponto crítico não-degenerado de um espaço de escala  $F_{t_0}(x)$  (na escala  $t = t_0 > 0$ ) então há um caminho suave  $(x_1(t), t)$  ( $t_1 < t < t_2$ ) tal que  $x_1(t)$  é ponto crítico não-degenerado de  $F_t(x)$  na escala  $t$  e  $x_1(t_0) = x_0$ . Mais ainda. Tem-se:

$$\dot{x}_1(t) = -(H)^{-1}(\nabla(\nabla^2 F_t))$$

Onde  $H$  é a matriz Hessiana de  $F_t$  no ponto  $x_1(t)$  e o vetor gradiente (calculado apenas nas coordenadas espaciais de  $x$ ) do Laplaciano  $\nabla(\nabla^2 F_t)$  também é calculado em  $x_1(t)$ .

**Demonstração:** É uma aplicação direta do *TFI*. Vamos demonstrá-lo no caso bi-dimensional, a demonstração geral sendo complementar é análoga (apenas com notação mais feia, como se vê acima). Escreveremos  $(x, y)$  ao invés de  $x$ . Defina

$$f(x, y, t) = \nabla F_t(x, y) = (\partial_x F_t(x, y), \partial_y F_t(x, y))$$

Queremos escrever a curva de nível  $f(x, y, t) = f(x_0, y_0, t_0) = 0$  como  $x = x_1(t)$  e  $y = y_1(t)$ . Para tanto, analisamos:

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_{xx} F_t & \partial_{xy} F_t & \partial_{xt} F_t \\ \partial_{xy} F_t & \partial_{yy} F_t & \partial_{yt} F_t \end{pmatrix}$$

Como  $(x_0, y_0)$  é ponto crítico não-singular de  $F_t$ , o determinante menor  $2 \times 2$  à esquerda de  $Df|(x_0, y_0)(x, y) = 0$  é um sistema linear que pode ser facilmente resolvido como  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ . O *TFI* garante então que o caminho  $(x_1(t), y_1(t))$  é suave e satisfaz as condições desejadas. Para a estimativa da velocidade, note que

$$\partial_x F_t(x_1(t), y_1(t)) \equiv 0$$

$$\partial_y F_t(x_1(t), y_1(t)) \equiv 0$$

(esta é, de fato, a definição do ponto  $P$ ). diferenciando com relação a  $t$  (e omitindo os argumentos)

$$(\partial_{xx} F_t)\dot{x} + (\partial_{xy} F_t)\dot{y} + \partial_t(\partial_x F_t) = 0$$

$$(\partial_{xy} F_t)\dot{x} + (\partial_{yy} F_t)\dot{y} + \partial_t(\partial_y F_t) = 0$$

isto é,

$$(HF_t) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = -\nabla(\partial_t F_t) \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = (HF_t)^{-1} \cdot \nabla(\partial_t F_t)$$

Note que até aqui todo o raciocínio acima poderia ser feito não só para a equação do calor, mas para qualquer evolução de  $F_t$ ! Somente agora é que usaríamos a definição do espaço de escala  $\partial_t F_t = \nabla^2 F_t$  para finalizar o resultado.

### 1.3.3 Classificação de Singularidades

**Definição:** Sejam  $U, V$  dois abertos em  $R^n$ . Uma função  $f : U \rightarrow R^n$  com  $f(U) = V$  é um difeomorfismo quando:

- $f$  é suave;
- $f$  tem uma inversa  $g : V \rightarrow R^n$ , isto é,  $f \cdot g = I_V$  e  $g \cdot f = I_U$ ;
- $g$  é suave.

**Definição:** Um difeomorfismo local em um ponto  $X$  é uma função cuja restrição a uma vizinhança de  $X$  é um difeomorfismo. Um difeomorfismo local é frequentemente chamado de troca de coordenadas.

**Comentário:** O Teorema da Função Implícita tem como consequência o Teorema da Função Inversa: se  $f : U \rightarrow R^m$  é suave,  $x \in U$  e  $Df|_x$  é não-singular, então  $f$  é um difeomorfismo local em  $x$ .

**Definição:** Duas funções  $f : R^n \rightarrow R$  (em  $x_0 \in R^n$ ) e  $g : R^n \rightarrow R$  (em  $y_0 \in R^n$ ) são ditas (localmente) equivalentes se elas forem idênticas a menos de uma constante e de uma troca de coordenadas (local) em  $R^n$ , isto é

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(H(x)) + c$$

onde  $C$  é uma constante e  $H(x)$  é um difeomorfismo com  $H(x_0) = y_0$ .

Não é difícil ver que a relação acima é de fato uma relação de equivalência. De fato:

- Tome  $H(x) = x$  e  $C = 0$ . Então  $g(H(x)) + C = g(x)$  e concluímos que  $g \sim g$  para qualquer  $g$  (em qualquer ponto  $x_0$ ).
- Se  $f(x) = g(H(x)) + C$ , então  $f(H^{-1}(x)) - C = (g(H(H^{-1}(x)))) + C - C = g(x)$  note que,  $H^{-1}$  é um difeomorfismo sempre que  $H$  o for e  $H^{-1}(y_0) = x_0$ ; assim  $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$ .
- Se  $f(x) = g_1(H_1(x)) + C_1$ , e  $g_1(x) = g_2(H_2(x)) + C_2$  então claramente  $f(x) = g_2(H_2(H_1(x))) + C_2 + C_1$ ; vemos que  $H = H_2 \circ H_1$  é um difeomorfismo. Assim  $f \sim g_1$  e  $g_1 \sim g_2 \Rightarrow f \sim g_2$ . Note que os gráficos de  $f$  e  $g$  são difeomorfos; de fato,

$$F : (x, \alpha) \mapsto (H(x), \alpha + C)$$

leva o gráfico  $(x, f(x))$  no gráfico  $(y, g(y))$

A relação de equivalência acima nos permite classificar as funções (em cada um de seus pontos). Vamos fazê-lo a seguir:

### 1.3.4 Caso Unidimensional

No caso Unidimensional, podemos mostrar que quase toda função  $f(x)$  no ponto  $x_0 \in R$  é equivalente a um monômio  $g(x)$  no ponto  $x = 0$ , onde:

- $g(x) = 0$  se  $f$  é constante numa vizinhança de  $x_0$ ;
- $g(x) = x$  se  $x_0$  não é um ponto crítico (isto é,  $f'(x_0) \neq 0$ );
- $g(x) = \pm x^2$  se  $x_0$  é um ponto crítico não- degenerado (isto é,  $f'(x_0) = 0 \neq f''(x_0)$ ); o sinal correspondente ao sinal de  $f''(x_0)$ ;
- $g(x) = x^3$  se  $x_0$  é um ponto crítico degenerado com  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \neq f'''(x_0)$ ;
- $g(x) = \pm x^4$  se  $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0 \neq f^{iv}(x_0)$ ; o sinal é o sinal de  $f^{iv}(x_0)$ ;

- etc etc etc

Esta classificação não diz nada a respeito de pontos onde todas as derivadas de  $f$  são 0 mas  $f$  não é constante (como é o caso de  $f(x) = e^{-1/x^2}$  em  $x = 0$ ). Estas funções pertencerão a outras classes.

**Demonstração:** Translações de coordenadas fazem com que  $x_0 = 0$  e  $f(x_0) = 0$ . O caso em que  $f$  é constante é trivial; assim, seja  $f^{(k)}(0)$  a primeira derivada não nula de  $f$  em 0. Assuma  $f^{(k)}(0) > 0$ . Aplicando a regra de **L'Hôpital** repetidas vezes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{kx^{k-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} > 0$$

já que todos os limites intermediários são da forma  $\frac{0}{0}$ . Assim,  $f(x) \geq 0$  numa vizinhança de  $x = 0$ . Tome

$$H(x) = (f(x))^{1/k}$$

Note que

$$H'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(f(x)\right)^{\frac{1}{k}}}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} \neq 0$$

e pelo Teorema da Função Inversa,  $H$  é um difeomorfismo local. Mas

$$f(x) = (H(x))^k$$

e, portanto,  $f \sim x^k$ . Caso  $f^{(k)} < 0$ , a demonstração acima mostra que  $-f \sim x^k$ , isto é,  $f \sim -x^k$ . Mas para  $k$  ímpar vemos que  $x^k \sim -x^k$  através do difeomorfismo  $H(x) = -x$ .

### 1.3.5 Caso N - Dimensional

A classificação acima é surpreendentemente mais complicada para  $n$  variáveis. No entanto, para uma função  $f : R^n \rightarrow R$  ainda podemos dizer que:

- Se  $x_0$  é um ponto não-crítico de  $f(x)$ , então  $f \sim g$  onde  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$ ;
- Se  $x_0$  é um ponto crítico não-degenerado de  $f(x)$ , então  $f \sim g$  onde  $g$  é da forma  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - x_{i+2}^2 - \dots - x_n^2$  ( $i$  é um número entre 0 e  $n$ );

Note que a situação é bem mais complicada para pontos críticos degenerados. Por exemplo,  $f(x, y) = x^2y + y^9$  **não é equivalente** a  $x^2y$  em  $(0, 0)$ , como podemos ver comparando  $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$  com  $x^2y = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $y = 0$ .

### 1.3.6 Genericidade de Singularidades

Já classificamos todas as singularidades que vêm de pontos não-degenerados, e mencionamos que o caso degenerado é bem mais complicado. No entanto, casos degenerados são “raros” ou “instáveis” e não deveriam ter muita importância. Agora vamos definir o que queremos dizer por “estabilidade” de uma singularidade.

Em geral, dizemos que uma situação ou objeto é estável (em se tratando de uma propriedade) se pequenas alterações da situação ainda possuem a tal propriedade. No nosso caso, os objetos são funções suaves e a propriedade em questão é o tipo de singularidade que ela possui.

**Definição - (Estabilidade Extrutural)** Uma função suave  $f : R^n \rightarrow R$  é dita (estruturalmente) estável num ponto crítico  $x_0$  se, para qualquer função suave  $g$  pequena (no sentido de que todas suas derivadas parciais são pequenas), tem-se  $f \sim f + g$ .

Em outras palavras,  $f(x)$  será estável se, dada qualquer família a um parâmetro  $F : R^n \times R \rightarrow R$  suave, denotada  $F_s(x) = F(x, s)$  com  $F_0 = f$ , tem-se

$$F_s \sim F_0 = f \text{ para } |s| < \epsilon$$

Na prática, é mais fácil provar que  $f$  é instável encontrando uma família  $F_s$  tal que  $F_s \neq f$  para  $s$  arbitrariamente pequeno.

**Exemplo:** A função  $f(x) = x^2$  tem um ponto crítico não-degenerado em  $x = 0$ . Seja  $F_s(x) = x^2 + sx$ . Note que todas as funções da família  $F_s$  tem um tal ponto crítico não-degenerado:

$$F'_s(x) = 0 \rightarrow 2x + s = 0 \rightarrow x = -\frac{s}{2}$$

$$F''_s(x) = 2$$

Será que a singularidade em  $x = 0$  de  $x^2$  é estável? Para mostrar este fato, considere uma família qualquer  $F_s(x)$  com  $F_0(x) = x^2$ . Esperamos que  $F'_s(x) = 0$  possa ser resolvido como  $x = x(s)$  para  $s$  pequeno (o que é permitido pelo TFI já que  $DF'_s|_{(0,0)}(x, y) = 2x + K_s$ ; apenas  $K$  depende da família); por outro lado, como  $F''_0(0) = 2 > 0$ , espera-se que  $F''_s(x(s)) > 0$  pelo menos para  $s$  pequeno. Assim, o mínimo local de  $x_2$  em  $x = 0$  é estável.

**Exemplo:** Por outro lado, o ponto crítico  $x = 0$  de  $f(x) = x^3$  é instável. De fato, tome  $F_s(x) = x^3 + sx$ . Note que os pontos críticos satisfazem



$$3x^2 + s = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-s}{3}}$$

e só existem para  $s < 0$ . Note que

$$F_s'' = 6x$$

e portanto  $x = -\sqrt{-s/3}$  é um máximo local e  $x = \sqrt{-s/3}$  é um mínimo local para  $s < 0$ . Assim, à medida que  $s$  cresce, o mínimo e o máximo ficam próximos, colidem (em  $s = 0$ ) e desaparecem.

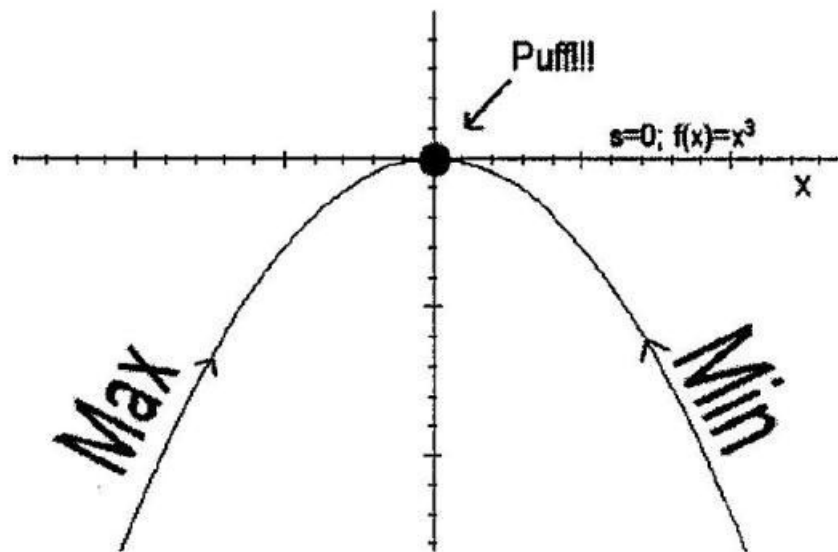


Figura 1.2: Pontos Críticos de  $F_s(x) = x^3 + sx$  ( $s$  é o eixo vertical).

Fonte: TEIXEIRA, R. Singularidades. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 23, 2001, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: IMPA, 2001. p .186.

**Para funções, um ponto crítico não-degenerado é estável, enquanto um ponto crítico degenerado é instável.**

De fato, se  $F_s(x)$  é uma família de funções de  $n$  variáveis, então encontrar um ponto crítico de  $F_s(x)$  é resolver as  $n$  equações dadas por  $\nabla F_s(x) = 0$ . Como  $x$  tem  $n$  componentes, o teorema da função implícita nos garante que podemos resolver  $x = x(s)$  (isto é, resolver para as  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  em função de  $s$ ); a condição que o *TFI* necessita equivale exatamente a pedir que a Hessiana de  $F_s$  seja não-degenerada! Assim, as funções “vizinhas”  $F_s(x)$  terão  $x = x(s)$  também como ponto crítico não-degenerado.

Por outro lado, um ponto crítico degenerado é um que satisfaz além de  $\nabla F_s(x) = 0$ ,  $\det HF_s(x) = 0$ ; tipicamente, estas  $n + 1$  equações a  $n + 1$  variáveis (incluindo  $s$  aqui

como variável) levam a soluções isoladas do tipo  $(x, s) = (x_0, s_0)$ . Se  $(x_0, 0)$  é um destes pontos, não esperamos encontrar pontos próximos a ele que também sejam degenerados.

**Exemplo:**  $F_s(x, y) = x^2 + y^2 + sx$ . Note que  $F_0(x, y) = x^2 + y^2$  tem um mínimo de  $(0, 0)$  que é um ponto crítico não-degenerado ( $\det HF_s = 4$  é constante e diferente de 0). É fácil ver que o ponto crítico de  $F_s$  é  $(x(s), y(s)) = (\frac{-s}{2}, 0)$ , comprovando que todos os  $F_s$  têm um ponto de mínimo não-degenerado, que se move ao longo do eixo  $x$ .

### 1.3.7 Famílias de Funções

Para famílias de funções, a propriedade de que apenas pontos críticos não-degenerados são estáveis não vale mais. Por exemplo, dada uma família de funções  $F_t(x)$ , a condição  $F'(x) = F''(x) = 0$  (note que isto é diferente de um ponto crítico degenerado de  $F(x, t)$  já que há uma direção privilegiada,  $x$ , e uma ignorada,  $t$ ). De fato, crie uma família a um parâmetro de tais famílias, digamos  $F_{s,t}(x)$ . Um ponto crítico degenerado é obtido resolvendo

$$F'_{s,t}(x) = 0$$

$$F''_{s,t}(x) = 0$$

O que nos permite encontrar  $x = x(s)$  e  $t = t(s)$ . Assim, famílias próximas à família original  $F_t(x)$  também terão pontos críticos degenerados! O ponto crítico degenerado move-se na família à medida que a modificamos (mudamos  $s$ ), mas sempre existirá!

Por outro lado, como uma direção é privilegiada, devemos também criar uma definição de equivalência de famílias (não queremos usar  $F_t(x) \sim G_t(x) \Leftrightarrow F(x, t) \sim G(x, t)$  já que isto permite a “mistura” das variáveis  $x$  e  $t$ ). Temos:

**Definição:** Duas famílias de funções  $f_t : R^n \times R \rightarrow R$  (em  $(x_0, t_0) \in R^n \times R$ ) e  $g_u : R^n \times R \rightarrow R$  (em  $(Y_0, u_0) \in R^n \times R$ ) são ditas (localmente) equivalentes para valores correspondentes de seus parâmetros (correspondência essa dada por um difeomorfismo entre  $t$  e  $u$ ) de maneira que o difeomorfismo e a constante de cada equivalência dependam suavemente do parâmetro; em outras palavras

$$f_t \sim g_u \Leftrightarrow f_t(x) = g_{e(t)}(H_t(x)) + C(t)$$

onde  $e(t)$  é um difeomorfismo local com  $e(t_0) = u_0$ ;  $C(t)$  é suave; e  $H_t(x)$  é um difeomorfismo local para cada  $t$ , depende suavemente de  $x$  e  $t$  e satisfaz  $H_{t_0}(x_0) = y_0$ .

### 1.3.8 Teorema da Classificação de Thom

Sob esta definição, uma família de funções a um parâmetro  $F_t(x)$  tipicamente tem:

- Pontos não-singulares (onde  $\nabla F_t \neq 0$ ): em tais pontos, tem-se  $F_t \sim G_t$  onde  $G_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$ ;
- Pontos singulares não-degenerados ou pontos de Morse (onde  $\nabla F_t = 0$  mas  $\det H F_t \neq 0$ ): ali,  $F_t \sim G_t$  onde  $G_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \pm x_i^2$ ;
- Pontos do tipo “dobra” (onde  $\nabla F_t = \det H F_t = 0$ ): ali,  $F_t \sim G_t$  onde  $G_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^3 + 3x_1 t + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2$ .

O teorema mais geral neste sentido é o Teorema de Thom para famílias de funções a  $r$  parâmetros. Ele diz que uma família de funções suaves a  $r$  parâmetros ( $r \leq 5$ )  $F_t(x) : R^m \times R^r \rightarrow R$  é estável e em cada ponto equivalente a uma das seguintes formas normais:

- **Pontos não-singulares:**  $F_t \sim x_1$ ;
- **Pontos de Morse:**  $F_t \sim \sum \pm x_i^2$ ;
- **“Fold” ou  $A_2$  (Dobras):**  $F_t \sim x_1^3 + x_1 t_1 + (M)$ ;
- **“Cusp” ou  $A_3$  (Cúspide):**  $F_t \sim \pm(x_1^4 + t_2 x_2^2 + t_1 x_1) + (M)$ ;
- **“Swallowtail” ou  $A_4$  (Rabo de andorinha):**  $F_t \sim \pm x_1^5 + t_3 x_1^3 + t_2 x_2^2 + t_1 x_1 + (M)$ ;
- **“Butterfly” ou  $A_5$  (Borboleta):**  $F_t \sim \pm(x_1^6 + t_4 x_1^4 + t_3 x_1^3 + t_2 x_1^2 + t_1 x_1) + (M)$ ;
- **“Wigwam” ou  $A_6$ :**  $F_t \sim x_1^7 + t_5 x_1^5 + t_4 x_1^4 + t_3 x_1^3 + t_2 x_1^2 + t_1 x_1 + (M)$ ;
- **Elíptico umbílico ou  $D_{4-}$ :**  $F_t \sim x_1^2 x_2 - x_2^3 + t_3 x_1^2 + t_2 x_2 + t_1 x_1 + (N)$ ;
- **Hiperbólico Umbílico ou  $D_{4+}$ :**  $F_t \sim x_1^2 x_2 + x_2^3 + t_3 x_1^2 + t_2 x_2 + t_1 x_1 + (N)$ ;
- **Parabólico Umbílico ou  $D_5$ :**  $F_t \sim \pm(x_1^2 x_2 + x_2^4 + t_4 x_2^2 + t_3 x_1^2 + t_2 x_2 + t_1 x_1) + (N)$ ;

- **Segundo Elíptico Umbílico** ou  $D_{6^-}$ :  $F_t \sim x_1^2 x_2 - x_2^5 + t_5 x_2^3 + t_4 u_2^2 + t_3 x_1^2 + t_2 x_2 + t_1 x_1 + (N)$  ;
- **Segundo Hiperbólico Umbílico** ou  $D_{6^+}$ :  $F_t \sim x_1^2 x_2 + x_2^5 + t_5 x_2^3 + t_4 u_2^2 + t_3 x_1^2 + t_2 x_2 + t_1 x_1 + (N)$  ;
- **Simbólico Umbílico** ou  $E_6$ :  $F_t \sim \pm(x_1^3 + x_2^4 + t_5 x_1 x_2^2 + t_4 x_2^2 + t_3 x_1 x_2 + t_2 x_2 + t_1 x_1) + (N)$  ;

onde  $(M) = \sum_{i=2}^n \pm x_i^2$  e  $(N) = \sum_{i=3}^n \pm x_i^2$

Note que todas elas têm mais de um parâmetros exceto as que já havíamos mencionado. Para 6 ou mais parâmetros, não há estabilidade no sentido da equivalência que definimos através de difeomorfismos (apesar de existir estabilidade no sentido de tipos de pontos críticos).

Nos capítulos seguintes, veremos que uma das mais importantes deduções da **Teoria das Singularidades** diz respeito à universalidade de certas formas simples como as dobras e cúspides, que são encontradas por toda parte e que deveríamos aprender e reconhecer.

Segundo Arnold, em [1], “René Thom e E. C. Zeeman sugeriram que a combinação da teoria das singularidades com suas aplicações fosse denominada Teoria das Catástrofes”, que será descrita a seguir.

# Capítulo 2

## Contexto Histórico

Em geral, considera-se o nascimento da Teoria das Catástrofes como teoria matemática no ano de 1972, com a publicação do livro *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*, que foi o teste de uma teoria geral de modelos, do matemático francês René Thom (1923 – 2002). O livro, especialmente após a sua tradução em inglês, teve um enorme impacto, embora ainda hoje, por causa do seu estilo complexo, talvez não seja bem compreendido por muitos.

René Thom entrou em 1943 na prestigiada *École Normale Supérieure* de Paris, onde se licenciou em 1946, e obteve uma posição de investigação no CNRS, em Estrasburgo. Depois de uma bolsa de estudos, que lhe permitiu passar um período nos Estados Unidos (onde encontrou também Einstein), ensinou em Grenoble (1953 – 1954) e em seguida, novamente em Estrasburgo (1954 – 1963).

Foi nomeado professor em 1957. Em 1958, com 35 anos, foi galardoado com a Medalha Fields pelas suas importantes contribuições à Topologia Diferencial e à Teoria das Singularidades, algumas das quais remontavam ao trabalho de investigação com o qual concluiu o seu doutorado em 1951.

Como é sabido, não há Prêmio Nobel da Matemática, embora alguns matemáticos tenham recebido o Prêmio Nobel em outras áreas pelo seu trabalho. O Congresso Internacional de Matemáticos, que se reuniu em Zurique em 1932, adaptou a proposta de John Charles Fields de preencher essa lacuna, e os reconhecimentos para a matemática (chamados por esta razão Medalhas Fields) foram conferidos pela primeira vez no congresso seguinte, em Oslo, em 1936. Após uma interrupção durante o período da Segunda Guerra Mundial, desde 1950, as Medalhas Fields foram regularmente atribuídas de quatro

em quatro anos. Estes prêmios são dados como reconhecimento à investigação já desenvolvida, mas também a matemáticos que se demonstrem particularmente promissores. Com efeito, para receber a Medalha Fields é preciso não ter mais de 40 anos de idade.

Por ocasião do discurso de atribuição da Medalha Fields a Thom pela sua investigação sobre temas como o cobordismo e os teoremas de transversalidade, destacou-se em particular como as ideias de Thom, dignas de admiração pelo seu caráter geométrico e pela sua natureza intuitiva, haviam enriquecido a matemática e como tudo parecesse indicar que o impacto dessas ideias estava longe de estar esgotado.

Em 1964, René Thom transferiu-se para o Institut des Hautes Études Scientifiques em Bures-sur-Yvette, um centro de investigação perto de Paris, onde continuou a trabalhar até a reforma, em 1988.

Embora a Teoria das Catástrofes tenha as suas raízes na investigação em Topologia Diferencial, que valeu a Thom a Medalha Fields, o seu maior desenvolvimento deu-se nos anos que se seguiram a 1960. O próprio Thom afirma em alguns artigos autobiográficos que a Medalha Fields lhe garantiu a liberdade de escolher os tópicos de investigação que queria desenvolver sem nenhuma restrição. Isto o levou gradualmente a abandonar a investigação matemática no sentido mais puramente técnico do termo e a abranger noções mais gerais, tais como a gênese das formas em biologia, em geologia, na linguística, em ciências sociais e noutros campos ainda, contando sempre mais com a sua intuição geométrica do que com o formalismo matemático de tipo acadêmico.

Não se pode concluir esta história sobre a “Teoria das Catástrofes” sem mencionar o nome do matemático inglês Erik Christopher Zeeman, nascido em 1925, que muito contribuiu para a difusão da teoria e das suas aplicações. Chris Zeeman foi uma figura importante no panorama da matemática britânica de 1960. Licenciado em Cambridge, em 1964, transferiu-se para a nova Universidade de Warwick, perto da cidade de Coventry, onde ficou até 1988.

Sob a sua liderança, Warwick tornou-se em poucos anos um dos centros de investigação mais importantes para o estudo dos sistemas dinâmicos. Para além dos seus sucessos na investigação matemática, (e no mundo académico, que lhe garantiram um amplo número de distinções, chegando a receber o título de “Sir”), Christopher Zeeman é famoso pelas suas aulas e conferências brilhantes e pela sua obra a favor da educação de jovens talentos matemáticos no Reino Unido. Se a Teoria das Catástrofes se tornou tão popular fora

do mundo matemático, de tal forma que até os jornais diários começaram a tratar do assunto em meados dos anos setenta com títulos do tipo “Thom: tenho a fórmula que explica os desastres” (*Corriere della Sera Illustrato*, 1978), deve-se em grande parte à obra entusiasta de artigos e conferências de Zeeman. Ele foi um verdadeiro pioneiro no que diz respeito a imaginar novas aplicações da teoria às ciências biológicas e comportamentais e inventor de uma máquina das catástrofes, um simples mecanismo que ilustra como pequenas perturbações podem dar origem a fenômenos de descontinuidade. De acordo com o próprio Thom, o termo “Teoria das Catástrofes” foi criado por Zeeman.



René Thom



Chris Zeeman

Figura 2.1: Thom e Zeeman

Fonte: ZANOLIN, F. Tio Patinhas, o tostão fatal e a teoria das catástrofes. *Gazeta de Matemática*, Lisboa-Portugal, ano LXXII, n. 0165, p. 16, nov. 2011.

Nos anos setenta, o grande sucesso de público da Teoria das Catástrofes levou a uma “moda” em que cada vez mais pessoas, imitando a abordagem de Thom e Zeeman, por vezes sem perceber completamente as técnicas que utilizavam e não possuindo nem o domínio da matemática nem a intuição geométrica destes dois precursores, tentaram encontrar novas aplicações da teoria a especulações gradualmente mais ousadas e extravagantes e, por vezes, sem nenhuma base experimental. Isto provocou uma espécie de rejeição de grande parte da comunidade matemática (e científica em geral) à qual se seguiu um período de debates acalorados e de polêmicas. O próprio Thom, num artigo autobiográfico de 1997, concluía amargamente: “É um fato que a teoria da catástrofe está morta. Mas poder-se-ia dizer que morreu por causa do seu grande sucesso... Quando se percebeu que a teoria não permitia previsões quantitativas, todas as mentes bem-pensantes decidiram que a teoria não tinha valor nenhum...”.

Passaram-se alguns anos sem ninguém mencionar a teoria das catástrofes e bastou a crise de 2008 para voltar à tona as aplicações para as bolsas de valores. Na internet pode ser encontrado diversos artigos acadêmicos que relatam como pode ser aplicada a teoria da catástrofe em bolsas de valores.

Por que a teoria ficou em desuso tanto tempo? Porque a teoria foi aplicada em ciências sociais, medicina, biologia, psicoterapia e até para tratamentos de alcoolismo, banalizando-a. A teoria da catástrofe tem resultados qualitativos o que significa dizer que se as hipóteses forem corretas, o que se tem no final são possíveis cenários para análise de comportamento da solução, mas não para previsão, outro motivo de seu esquecimento era que os programas de processamento simbólicos tomavam as vezes meses inteiros rodando para tentarem achar alguma solução. E as vezes não tinha solução.

O que René Thom criou foi uma ampliação do campo matemático conhecido como Topologia Matemática, que é o estudo das formas através das equações. E sem conhecimento dessa área sua aplicação fica apenas superficial e os resultados longe da realidade. Nos dias atuais nem é tão difícil a aplicação da teoria da catástrofe pois com os computadores atuais, em menos de 1 segundo a solução para os problemas mais simples aparecem na tela.



# Capítulo 3

## A Teoria da Catástrofe

A teoria das catástrofes propõe dar uma explicação de alguns fenômenos de tipo descontínuo através do uso de modelos matemáticos de tipo contínuo. Um sistema (físico ou mecânico, um organismo vivo, um modelo económico ou social, etc.) é modelado por equações diferenciais. Estas equações representam a evolução do sistema no tempo.

### 3.1 A Matemática da Teoria

Lembramos que as propriedades que serão agora descritas são de tipo puramente qualitativo (e não quantitativo) e podemos destacar ainda o fato de que quando perturbamos uma função que começa com certa potência de  $x$  seguida de termos de grau mais baixo, não é necessário considerar todos os termos de ordem menor para obtermos todos os possíveis gráficos qualitativamente distintos. Por exemplo, os gráficos da função  $y = x^2$  e das suas deformações  $y = x^2 + ax + b$  são do mesmo tipo: são todas parábolas com a concavidade virada para cima.

Mais precisamente, todas as parábolas da forma  $y = x^2 + ax + b$  que podem ser obtidas ao variar dos coeficientes  $a$  e  $b$  (de infinitas maneiras possíveis) são meramente translações da parábola  $y = x^2$ . Porém temos uma análise mais complicada para  $y = x^3$  e as suas perturbações  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Neste caso, ao variar dos coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  podem ser obtidas formas qualitativamente diferentes dos gráficos. No entanto, quem tiver algumas conhecimentos de cálculo diferencial poderá convencer-se de que, para obter todos os comportamentos qualitativamente diferentes (ou seja, todas as diferentes formas dos gráficos que podem originar-se a partir de  $x^3$  por adição de potências de  $x$  de

ordem mais baixa), bastará considerar apenas funções da forma  $y = x^3 + ux$ , variando o parâmetro  $u$ . Ter entendido estas observações já é um passo importante para o que se segue.

Em [12], Zanolin assume uma primeira e importante hipótese de que o sistema seja de tipo gradiente. Isto significa que existe uma função potencial a partir da qual podem determinar-se os estados de equilíbrio do sistema. Uma *função potencial*  $V$  é uma função de um certo número de variáveis  $x, y, z, \dots$ , (variáveis internas, que descrevem o estado do sistema) e que toma valores reais. Um exemplo clássico em Física é dado pela energia do sistema que se está a considerar, mas podem imaginar-se inúmeros outros exemplos em outras situações. Para simplificar a exposição, o autor imagina por agora que o potencial depende de uma única variável  $x$ . Teremos então uma função  $V(x)$  da qual poderemos traçar o gráfico visto na figura 3.1.

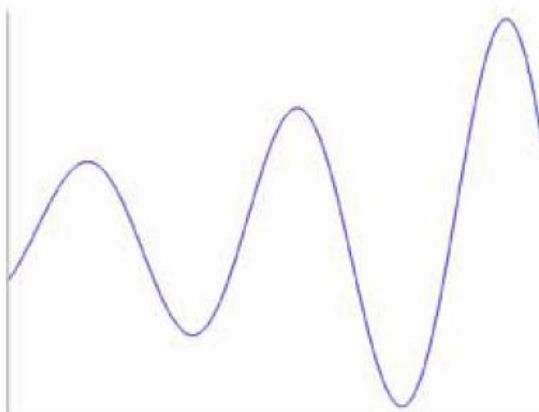


Figura 3.1: Um possível exemplo de função potencial numa variável  $x$ .

Fonte: ZANOLIN, F. Tio Patinhas, o tostão fatal e a teoria das catástrofes. *Gazeta de Matemática*, Lisboa-Portugal, ano LXXII, n. 0165, p. 18, nov. 2011.

O comportamento de um sistema de tipo gradiente é análogo ao de uma gota de água (ou de uma pequena bola) apoiada num ponto do gráfico e sujeita a uma força que a empurra para baixo. Ela tenderá a dirigir-se para os pontos de mínimo relativo da função potencial. No entanto existem algumas exceções, como por exemplo, se pusermos a nossa gota num ponto de máximo (ou num ponto de inflexão onde a derivada é nula), a gota ficará parada em equilíbrio. Porém, estas posições são de tipo instável, no sentido em que será suficiente uma pequena perturbação para fazer deslizar a nossa gota para um ponto de mínimo adjacente. Muitas vezes os sistemas físicos (como também outros sistemas

em economia, em biologia, etc) comportam-se de forma semelhante ao que acabamos de descrever, estabilizando-se (depois de um certo tempo transitório) em posições de equilíbrio estável dadas pelos mínimos relativos do potencial.

Zanolin diz ainda que uma segunda hipótese da teoria das catástrofes é a de negligenciar o comportamento transitório (que se supõe realizar-se numa escala temporal muito mais curta dos fenômenos que se quer observar) para se concentrar nas posições de equilíbrio, estáveis ou instáveis. É claro que só as primeiras são as que se observam na Natureza, pois persistem por pequenas variações das condições iniciais. No caso simples considerado, isto é, o de um potencial  $V(x)$  dependente de uma única variável, para determinarmos as posições de equilíbrio será suficiente estudar a equação dos pontos estacionários (ou *pontos críticos*)  $V'(X) = 0$  e encontrar as suas soluções.

Porém nem sempre as situações são tão simples pois em geral, na natureza, a função potencial irá depender de alguns parâmetros (ditos também fatores de controle) que podem variar no tempo. Para dar um exemplo bastante grosseiro, a forma do nosso corpo é algo estável dia-a-dia, mas não fica a mesma com o passar dos anos. Crescemos, a barriga fica maior, as costas curvam-se um pouco e o que era o jovem atlético e esbelto transforma-se num menos agraciado professor de meia-idade.

Dessa forma, podemos assumir que a função potencial  $V$ , para além de depender de um certo número de variáveis internas,  $x, y, z, \dots$ , dependa também de um certo número de parâmetros de controlo  $u, v, w, \dots$ . Variando estes parâmetros a sua forma muda de modo contínuo. As variações dos gráficos de  $V$  ao variar os parâmetros podemos pensar como as alterações de uma paisagem com o passar das eras geológicas. Se pudéssemos filmar uma paisagem aparentemente fixa e imutável (estável) de colinas e montanhas durante vários milhões de anos e pudéssemos rever o filme a altíssima velocidade, observaríamos colinas e vales a nascer, a modificar-se, a desaparecer, etc.

Podemos agora imaginar uma situação em que, ao variar de certos parâmetros, um ponto que antes era estável perca a sua estabilidade: a pequena bola (ou gota de água) que anteriormente estava tranquilamente em repouso num vale, de repente encontrar-se-á no lado de uma encosta e deslizará para um novo ponto de mínimo do potencial (ou cairá sem nunca parar se todos os pontos de mínimo tiverem desaparecido). Neste caso, uma variação contínua dos parâmetros determina um salto descontínuo do estado do sistema: **uma catástrofe**, precisamente. Dado que, como vimos acima, interessa-nos identificar os

pontos estacionários de  $V$ , com particular atenção para os que são estáveis, estudaremos a forma como, ao variar dos parâmetros de controlo, varia a estabilidade dos equilíbrios.

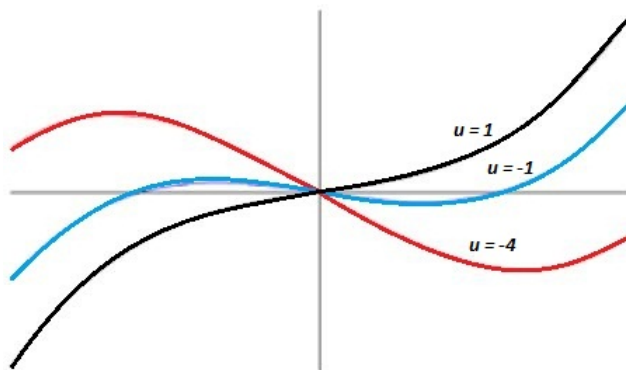


Figura 3.2: Gráfico da função potencial  $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$  para os valores do parâmetro  $u = -4$  (vermelho),  $u = -1$  (azul) e  $u = 1$  (preto).

Fonte: ZANOLIN, F. Tio Patinhas, o tostão fatal e a teoria das catástrofes. *Gazeta de Matemática*, Lisboa-Portugal, ano LXXII, n. 0165, p. 19, nov. 2011.

Observando a figura 3.2, vemos que no primeiro caso ( $u = -4$ ), os pontos de mínimo e de máximo são bastante acentuados, no segundo caso ( $u = -1$ ), são um pouco atenuados, no terceiro ( $u = 1$ ), desapareceram completamente. Neste último caso, não havendo nenhum ponto de equilíbrio estável, o estado do sistema  $x$  tende para  $-\infty$  (em tempo finito). Diz-se que o sistema explode a  $-\infty$ . Neste caso, utilizamos os pontos estacionários, da relação  $V'(x) = 0$ , obtemos  $x^2 + u = 0$ . No plano cartesiano com abcissa  $u$  (parâmetro de controlo) e ordenada  $x$  (variável interna, que determina o estado do sistema) obtém-se um lugar geométrico (é uma parábola), que representa o conjunto dos pontos estacionários ao variar do parâmetro  $u$ .

### 3.1.1 Exemplo

Para um melhor entendimento, utilizaremos um exemplo mostrado em [2], onde o Caetano sugere que imaginemos um processo dinâmico que varia no tempo, e com isso depende de uma equação diferencial. Imaginemos o seguinte processo:

$$\frac{dx}{dt} = -(x^3 + ax + b)$$

Essa equação nos diz que uma certa variável “ $x$ ” (preço, distância, velocidade, compras, etc) varia no tempo conforme a regra colocada no lado direito da igualdade. Os

parâmetros que vão dar o “tom” do crescimento ou do desaparecimento de  $x$  são “ $a$ ” e “ $b$ ”. O que René Thom fez foi avaliar esse lado direito do ponto de vista de possíveis máximos e mínimos. Esses máximos e mínimos são topos e vales que correspondem a instabilidade e estabilidade da variável  $x$ . Imagine os preços das ações (suponha que seja  $x$ ) não parando de cair, ou caindo e estacionando num valor baixo. Ou então, suponha que  $x$  seja vendas que não param de cair, estabilizam mas depois começam a cair novamente. Para essa equação se o parâmetro  $a = -2$  e  $b = 1$  o lado direito da equação acima tem a forma observada na figura 3.3:

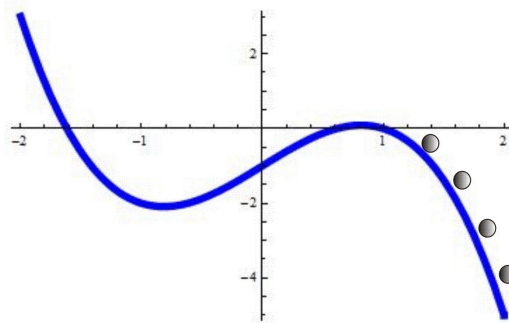


Figura 3.3: Gráfico da função  $-(x^3 - 2x + 1)$

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/Catastrofe.html>

As “bolinhas” indicam o potencial imaginado por René Thom que faz a variável  $x$  (preço, vendas, etc) mudar seus valores durante o tempo todo. Mas como as bolinhas não tem “força” para ultrapassar o primeiro pico, a solução no tempo estabiliza num valor positivo. Isso pode ser visto na figura 3.4, onde o eixo das abscissas marca o tempo e a ordenada o valor de  $x$  (preços, vendas, etc.) encontrados ao se resolver a equação diferencial anterior.

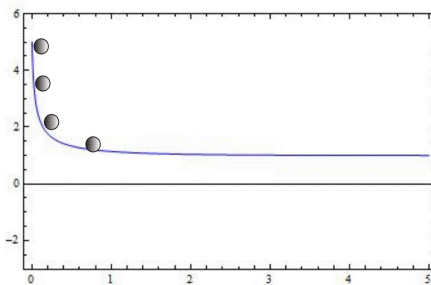


Figura 3.4: Gráfico de estabilidade da função  $-(x^3 - 2x + 1)$

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/Catastrofe.html>

Enquanto o tempo corre (segundos, horas, dias, etc.) o valor de  $x$  diminui mas depois estabiliza e estaciona, parando de cair (as bolinhas não conseguem ultrapassar o primeiro pico do gráfico anterior quando se deslocam da direita para a esquerda). Para criar um cenário de catástrofe basta então mudar o parâmetro “ $a$ ”. Vamos supor que agora  $a = -1$  e  $b = 1$ . O lado direito da equação seria como na figura 3.5:

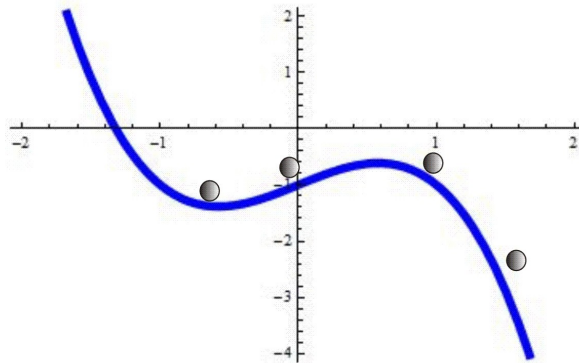


Figura 3.5: Gráfico da função  $-(x^3 - x + 1)$

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/Catastrofe.html>

E agora as “bolinhas” conseguem ultrapassar o pico de energia, pois ele “rebaixou” e ficou mais “alisado”. O que acontece se observarmos o valor da variável  $x$ , como se fossemos olhar os preços das ações durante alguns minutos é retratado no gráfico visto na figura 3.6, solução da equação diferencial com o novo valor de “ $a$ ”:

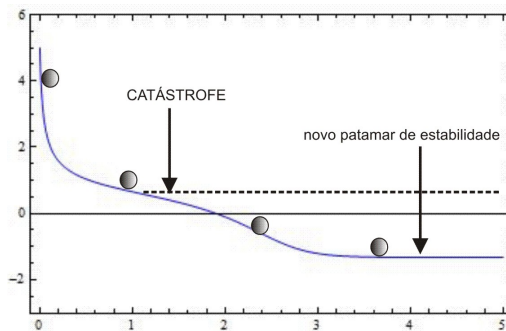


Figura 3.6: Gráfico da catástrofe

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/Catastrofe.html>

Eis que surge a catástrofe! O que antes se estabilizava em torno de  $x = 1$ , com a alteração de “ $a$ ” saindo de  $-2$  para valor  $-1$  fez tudo mudar quando olhamos no tempo. O patamar de estabilidade caiu ainda mais pois as tais “bolinhas” permitem que o processo tenha mais velocidade de queda encontrando o vale que antes era inatingível. E quando

a “bolinha” para significa que ali, naquele valor, o sistema vai estacionar independente de quanto tempo se tiver passando. E como o valor da abscissa desse vale é negativo,  $x$  será negativo (perda no valor de ações, vendas, etc.). Se aumentarmos ainda mais o parâmetro “ $a$ ” para  $a = 1$  o resultado que se vê é o mostrado na figura 3.7.

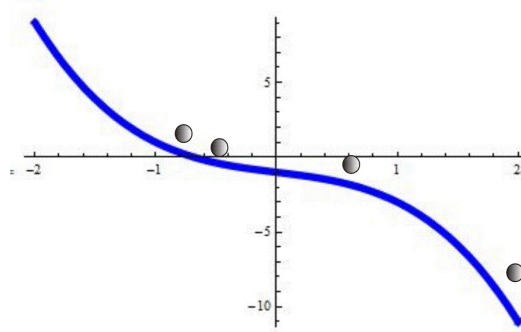


Figura 3.7: Gráfico da função  $-(x^3 + x + 1)$

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/Catastrofe.html>

Agora os vales e montanhas sumiram e o sistema vai seguir sua trajetória mais rápido para o patamar de queda. Nesse caso não irá estabilizar mais embaixo pois as “bolinhas” não possuem energia para subir a função acima. Quem fornece mais energia é um termo que está multiplicando  $x$  elevado a 3, que nesse caso é 1. Aumentando ele, mais energia estará sendo fornecida e a queda será ainda maior para  $x$ . Olhando isso no tempo (onde o eixo das abscissas é segundos, dias, etc.) o gráfico fica como o mostrado na figura 3.8:

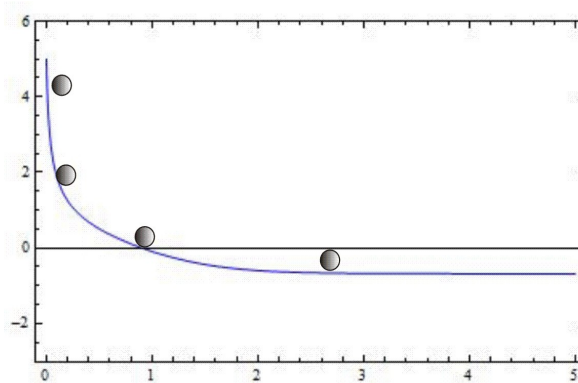


Figura 3.8: Gráfico da instabilidade da função  $-(x^3 + x + 1)$

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/Catastrofe.html>

O aparecimento da catástrofe fez a solução cair mais do que antes. O que René Thom conseguiu capturar magestosamente foi a importância que os parâmetros têm nos

processos dinâmicos. Uma pequena mudança num parâmetro pode transformar uma cenário de céu azul em tempestade.

A escolha do parâmetro pode fazer a bolsa de valores mudar o patamar de estabilidade. Entendendo o que René Thom escreveu, e repetindo as equações para algumas situações nos faz entender como “não mexer” no sistema, e não para onde vai o sistema. Ela é uma teoria para conscientização de valores e não para projeções quantitativas. O futuro quem direciona somos nós, pois o parâmetro “ $a$ ” é nossa escolha, somos nós que dizemos que tipo de catástrofe vamos querer à frente.

O fundamento da teoria está na área matemática conhecida como TOPOLOGIA, que não é tarefa fácil para qualquer um. Ela mostra as formas de comportamento usando equações. A genialidade de René Thom foi mostrar que por menor que seja, qualquer parâmetro alterado pode levar a estabilidade de sistemas à instabilidade.

Até agora consideramos um exemplo muito particular, que é também o mais simples de todos. Poderemos pensar que o número de casos qualitativamente diferentes que se podem apresentar seja enorme, se não mesmo infinito. Isto tornaria a teoria praticamente inutilizável para as aplicações, visto que quem quisesse aplicá-la a um modelo específico não saberia que tipo de catástrofe elementar escolher. E aqui está um dos pontos cruciais da teoria, contido no teorema de classificação topológica de Thom (1969). Desenvolveu como uma maneira de observar a variação dos parâmetros em relação às variáveis dos modelos. Criou então o que ele denominou de famílias de catástrofes básicas chamadas de formas “canônicas” de catástrofes. Essas formas canônicas se compõem de equações que podem ser representadas por gráficos para os casos mais simples. De acordo com este resultado, em sentido genérico e entre os sistemas dependentes de até *três parâmetros de controle*, só há *cinco catástrofes elementares*. Para sistemas dependentes de, no máximo, quatro parâmetros, aos cinco modelos anteriores devemos juntar outros dois, num total de *sete catástrofes elementares*.

## 3.2 Sete Catástrofes Elementares

A essência do famoso **Teorema de Classificação de Thom**, é direito de manifestação sob certas condições, a capacidade de classificar as singularidades, tais centros de organização da catástrofe, de funções suaves por imersão nas implantações corresponden-



tes universais que são estruturalmente estáveis. Segundo Oliveira, em [8], cada situação é associada com um nome sugestivo..., que é possível classificar em sete tipos, conhecidas como as **Sete Catástrofes Elementares**, Graficamente representadas na figura 3.9, são elas:

**1. Dobra**

$$F_t \sim x_1^3 + x_1 t_1 + (M)$$

**2. Cúspide**

$$F_t \sim \pm(x_1^4 + t_2 x_2^2 + t_1 x_1) + (M)$$

**3. Rabo de andorinha**

$$F_t \sim \pm x_1^5 + t_3 x_1^3 + t_2 x_2^2 + t_1 x_1 + (M)$$

**4. Borboleta**

$$F_t \sim \pm(x_1^6 + t_4 x_1^4 + t_3 x_1^3 + t_2 x_1^2 + t_1 x_1) + (M)$$

**5. Elíptico umbílico**

$$F_t \sim x_1^2 x_2 - x_2^3 + t_3 x_1^2 + t_2 x_2 + t_1 x_1 + (N)$$

**6. Hiperbólico Umbílico**

$$F_t \sim x_1^2 x_2 + x_2^3 + t_3 x_1^2 + t_2 x_2 + t_1 x_1 + (N)$$

**7. Parabólico Umbílico**

$$F_t \sim \pm(x_1^2 x_2 + x_2^4 + t_4 x_2^2 + t_3 x_1^2 + t_2 x_2 + t_1 x_1) + (N)$$

Destes sete tipos de catástrofes apresentados, daremos ênfase as duas consideradas mais significativas devido as suas vastas formas de aplicações ao cotidiano, Como escreve de forma admirável o grande matemático Vladimir I. Arnold (1937-2010) no seu livro [1]:“Aplicações de superfícies regulares sobre o plano são tudo o que nos rodeia. Com efeito, a maioria dos objectos à nossa volta é limitada por superfícies suaves. Os contornos visíveis dos corpos são a projecção das suas superfícies sobre a retina do olho. Examinando os objectos que nos rodeiam, por exemplo os rostos das pessoas, podemos estudar as singularidades dos contornos visíveis.” Usualmente vemos essas singularidades como dobras ou cúspides.

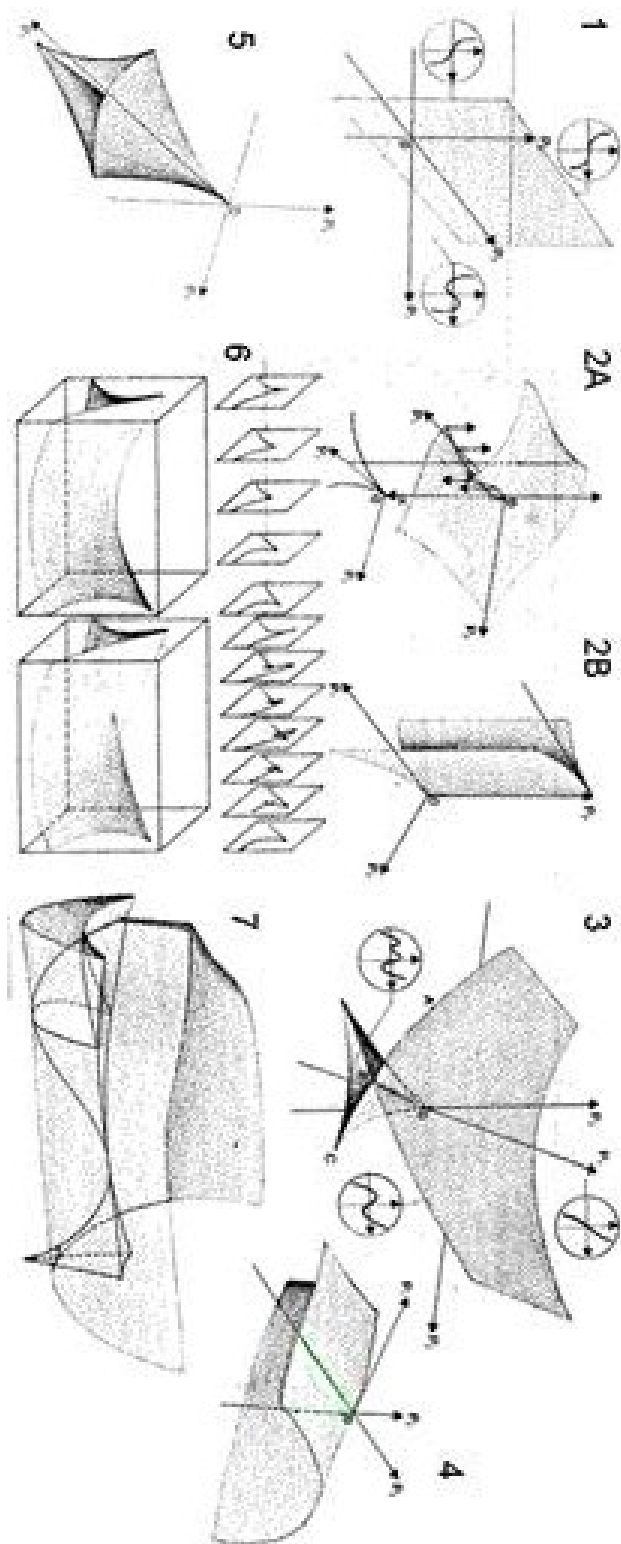


Figura 3.9: Os sete tipos de catástrofes elementares

Fonte: ROBERT, G. Department of physics and Atmospheric Science, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania, U.S.A.

### 3.3 Geometria das Catástrofes: Dobra e Cúspide

Nesta seção primeiramente analisaremos a geometria das Catástrofes Dobra e Cúspide com base em suas equações, feito isso estudaremos os seus comportamentos ao serem

plotadas graficamente, em que daremos ênfase a análise das seguintes propriedades:

1. Funções típicas na família das funções, assim como o conjunto de bifurcação;
2. Localização dos pontos críticos;
3. Valores da função nos pontos críticos;
4. Curvatura da função nos pontos críticos.

Para este fim, definimos os seguintes expressões:

- Seja  $V : R^n \times R^r \rightarrow R$  uma família de funções tal que para cada  $c \in R^r$ ,  $V_c$  é a função dada por  $V_c(x) := V(x, c) \in R$ .

Uma **variedade de catástrofe**  $M$  é um subconjunto de  $R^n \times R^r$  definido por:

$$DV_c(x) = 0$$

Ou seja, o conjunto de todos os pontos críticos de  $V_c$ . Logo,

$$M = \{ (x, c) \in R^n \times R^r : DV_c(x) = 0 \}$$

- Uma **bifurcação** é uma mudança qualitativa no sistema, como quando um equilíbrio desaparece (bifurcação de ponto sela) ou há mudanças do regime estacionário para uma oscilação (bifurcação Hopf).
- O **conjunto de bifurcação** são aqueles parâmetros (pontos no espaço dos parâmetros) em que uma bifurcação ocorre. O conjunto de bifurcação é composto frequentemente pelas hiper-superfícies e das suas intersecções.

### 3.3.1 Geometria da Catástrofe Dobra

A catástrofe dobra é a mais simples entre as sete apresentadas. Para este caso, consideramos a aplicação base

$$f : R \rightarrow R$$

$$x \mapsto \frac{1}{3}x^3$$

e a seguinte deformação

$$V : R \times R \longrightarrow R$$

$$(x, a) \longmapsto V_a(x) = V(x, a) := \frac{1}{3}x^3 + ax$$

A variedade,  $M_1$ , de catástrofe DOBRA é um subconjunto de  $R^2$ , definido por:

$$M_1 = \{(x, a) \in R^2 : \frac{\partial}{\partial x} V_a(x) = 0\}$$

Veja que  $\frac{\partial}{\partial x} V_a = 0$ , implica  $x^2 + a = 0$

Logo,

$$M_1 = \{x, a) \in R^2 : x^2 + a = 0\}.$$

Rescrevendo  $M_1$  temos que:

$$M_1 = \{(x, -x^2), x \in R\}$$

Nosso objetivo é explorar a geometria desta variedade analisando seu conjunto de Bifurcações. Para isto exploramos a série de Taylor de  $V_a(x)$  para pontos pertencentes ao conjunto Singular  $M_1$ , denotado por  $S_1$ .

Temos que:

$$V_a(x + X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + 0.$$

Onde  $a_i = \frac{1}{i!}(V_a)^{(i)}(x)$ .

$$V_a(x + X) = V_a(x) + \frac{(x^2+a)}{1!}X + \frac{2x}{2!}X^2 + \frac{2}{3!}X^3 + 0$$

$$V_a(x + X) = V_a(x) + (x^2 + a)X + xX^2 + \frac{1}{3}X^3 + 0$$

Como  $(x, a) \in S_1$ , segue que:

$$V_a(x + X) = \left(\frac{x^3}{3} + (-x^2)x\right) + 0X + xX^2 + \frac{1}{3}X^3 + 0.$$

Logo,

$$V_a(x + X) = \frac{X^3}{3} + xX^2 + 0.X + \left(-\frac{2}{3}x^3\right)$$

Portanto,

$$\frac{1}{3}(x + X)^3 + (-x^2)(x + X) = V_a(x + X) = \frac{1}{3}X^3 + xX^2 + 0X + \left(-\frac{2}{3}x^3\right).$$

Observe que analisando a matriz Hessiana vemos que o termo quadrático  $xX^2$  é não-degenerado se  $x \neq 0$ , mas é degenerado se  $x = 0$ . Assim,  $S_1 = 0$  e  $B_1 = (0, 0)$ , onde  $B_1$  denota o conjunto de Bifurcações; o ponto  $(0, 0)$  é chamado ponto de Dobra. Por outro lado, quando  $x > 0$  o termo quadrático é positivo e  $V_a$  tem um ponto de mínimo e quando  $x < 0$  o termo quadrático é negativo e  $V_a$  tem um ponto de máximo.

Ainda com a aplicação base

$$A_2 : f(x; a) = \frac{1}{3}x^3 + ax \quad (3.1)$$

As propriedades canônicas dessa função são mostradas na figura 3.10 e 3.11. Na figura 3.10(a) mostramos os membros desta família com  $a > 0, a = 0, a < 0$ . O conjunto bifurcação é o conjunto dos pontos no espaço dos parâmetros de controle nos quais existe uma mudança qualitativa na natureza da função. Isso ocorre quando dois ou mais pontos críticos se tornam degenerados. Para a catástrofe dobra isso consiste no ponto  $a = 0$ , no qual existe um ponto duplamente degenerado em  $x = 0$ .

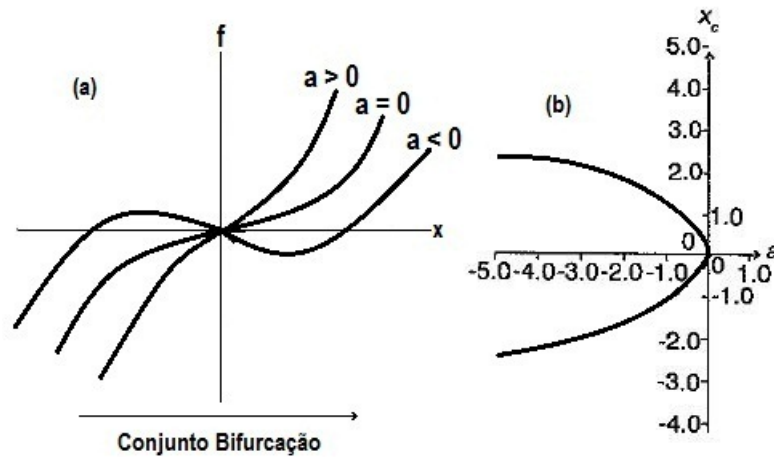


Figura 3.10: (a) Membros da família de dobra de funções  $f(x; a) = \frac{1}{3}x^3 + ax$  para diversos valores do parâmetro de controle  $a$ . (b) Localização dos pontos críticos como uma função de  $a$ .

Fonte: ROBERT, G. Department of physics and Atmospheric Science, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania, U.S.A.

A localização dos pontos críticos, a solução de  $\nabla f(x; a) = 0$ , é mostrada na figura 3.10(b). Os pontos críticos,  $x_{\pm}(a) = \pm(-a)^{1/2}$ , tem um padrão de dependência de

potência  $1/2$  no parâmetro de controle  $a$ . Note que os pontos críticos  $z_{\pm}(a)$  existem somente para  $a \leq 0$  e que o gráfico de  $x_{\pm}(a)$  como uma função de  $a$  é uma variedade suave embutida no espaço  $R^1$  (espaço-estado)  $\times R^1$  (espaço dos parâmetros de controle). Este é um resultado geral. A catástrofe dobra deriva seu nome da forma de seu conjunto crítico  $\nabla f(x; a) = 0$ , que parece uma curva dobra sobre si mesma.

O valor da função nos pontos críticos,

$$f_c(x_{\pm}(a); a) = \pm \frac{2}{3}(-a)^{3/2} \quad (3.2)$$

é plotado na figura 3.11(c). Este curva tem uma dependência canônica de potência  $3/2$ . Este gráfico em geral não é uma variedade.

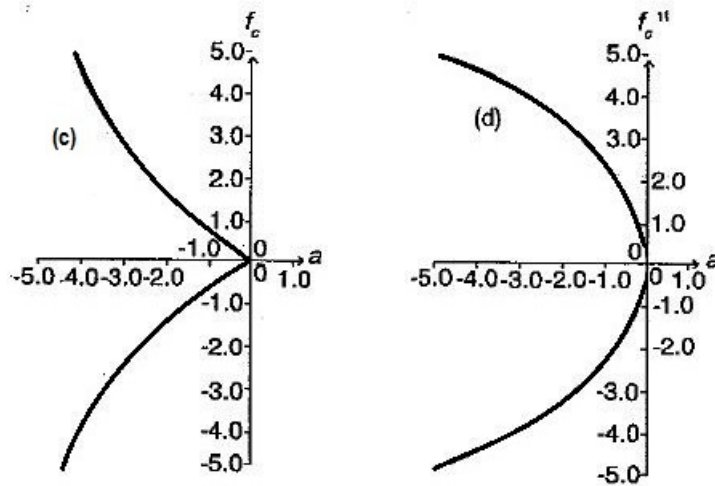


Figura 3.11: (c) Valor da função nos pontos críticos. (d) Curvatura da função nos pontos críticos.

Fonte: ROBERT, G. Department of physics and Atmospheric Science, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania, U.S.A.

A curvatura da função,

$$f''(x_{\pm}(a); a) = \pm 2(-a)^{1/2} \quad (3.3)$$

é mostrada na figura 3.11(d). Embora a curvatura crítica seja uma variedade nesse caso, em geral, isso não é verdade para as demais catástrofes.

A geometria de  $M_1$  está resumida na figura 3.12. Veja que a Variedade Catástrofe Dobra é uma parábola; o conjunto de Bifurcações é um único ponto no qual à sua esquerda há dois comportamentos, um ponto de máximo e um ponto de mínimo, e à sua direita não há nenhum ponto.

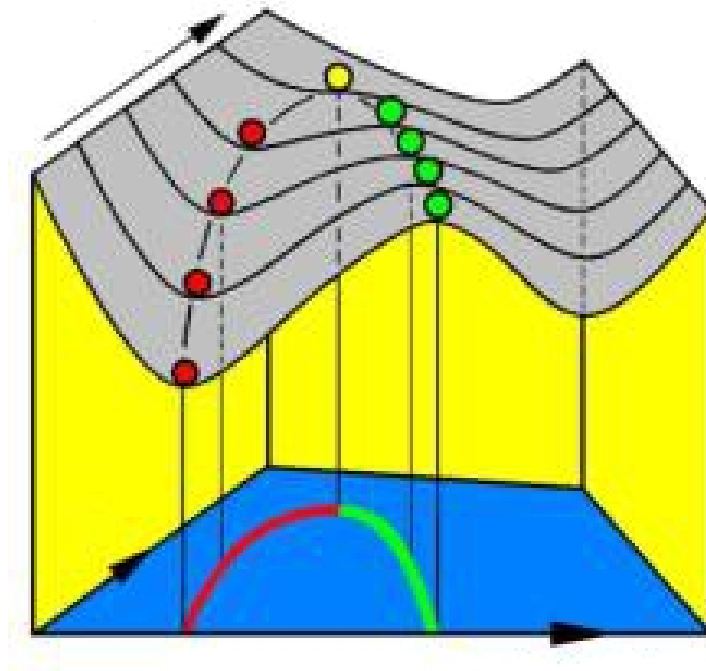


Figura 3.12: Catástrofe Dobra

Fonte: OLIVEIRA, A. R. C. A classificação das formas binárias aplicada em máquina de catástrofes. 2010. 59f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro: [s.n.], 2010, p. 45.

### 3.3.2 Geometria da Catástrofe Cúspide

Considere a seguinte aplicação base para esta catástrofe:

$$f : R \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto \frac{1}{4}x^4$$

com sua respectiva deformação:

$$V : R \times R^2 \rightarrow R$$

$$(x, a, b) \in V_{ab}(x) = V(x, a, b) := \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

A variedade,  $M_2$ , de catástrofe CÚSPIDE é um subconjunto de  $R^2$ , definido por:

$$M_2 = \{(x, a, b) \in R^2 : \frac{\partial}{\partial x}V_{ab}(x) = 0\}$$

Veja que  $\frac{\partial}{\partial x}V_{ab}(x) = 0$ , implica  $x^3 + ax + b = 0$  Logo,

$$M_2 = \{(x, a, b) \in R^3 : x^3 + ax + b = 0\}.$$

Rescrevendo  $M_2$  temos que:

$$M_2 = \{(x, a, -x^3 - ax), x, a \in R\}$$

Nosso objetivo é explorar a geometria desta variedade analisando seu conjunto de Bifurcações. Para isto exploramos a Série de Taylor de  $V_{ab}(x)$  para pontos pertencentes ao conjunto Singular  $M_2$ , denotado por  $S_2$ .

Temos que:

$$V_{ab}(x + X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + 0.$$

onde  $a_i = \frac{1}{i!}(V_a)^{(i)}(x)$ .

$$V_{ab}(x + X) = V_a(x) + (x^3 + ax + b)X + \left(\frac{(3x^2+a)X^2}{2}\right)X^2 + \left(\frac{6x}{6}\right)X^3 + \left(\frac{6}{24}\right)X^4 + 0$$

Como  $(x, a, b) \in S_2$ , segue que:

$$V_{ab}(x + X) = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + (-x^3 - ax).x\right) + (x^3 + ax + (-x^3 - ax)).X + \left(\frac{3x^2+a}{2}\right)X^2 + \left(\frac{6x}{6}\right)X^3 + \left(\frac{6}{24}X^4\right) + 0$$

Logo,

$$V_{ab}(x + X) = \frac{X^4}{4} + xX^3 + \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{a}{2}\right)X^2 + 0X - \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{3x^4}{4} + \frac{ax^2}{2}\right)$$

Portanto,

$$\frac{(x+X)^4}{4} + \frac{a(x+X)^2}{2} - ((x+X)^3 + a(x+X)) = V_{ab}(x+X) = \frac{X^4}{4} + xX^3 + \left(\frac{3X^2}{2} + \frac{a}{2}\right)X^2 + 0X - \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{ax^2}{2}\right).$$

Analisando os termos da expansão acima, para analisar o Conjunto de Bifurcações, vemos a necessidade de uma nova mudança de variáveis, considerando  $p, q, r$  os coeficientes dos termos quadrático, cúbico e quártico, temos:

$$p(a, x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{a}{2}$$

$$q(a, x) = x$$

$$r(a, x) = \frac{1}{4}$$



Isso sugere que troquemos o plano cartesiano pelo  $r = \frac{1}{4}$  e  $a(p, q)$  coordenadas. Portanto, uma vez que:

$$p = \frac{3}{2}q^2 + \frac{a}{2}$$

$$2p = 3q^2 + a$$

$$a = 2p - 3q^2$$

Seque que:

$$M_2 = (q, 2p - 3q^2, -2pq + 2q^3), p, q \in R$$

Deste modo o termo quadrático da Série de Taylor é degenerado, quando  $p = 0$ , e este representa o  $q - eixo$  no espaço  $(p, q)$ . A imagem deste tipo de ponto é uma dobra em termo do sistema original  $(x, a)$  pois: quando  $p = 0$  temos:  $x = q$   $a = -3q^2$ , ou seja,  $a = -3x^2$ .

Ainda, quando  $p$  é não-degenerado temos um ponto de mínimo local quando  $p > 0$  e um ponto de máximo local quando  $p < 0$ .

Quando  $p = 0$ , necessariamente analisamos os termos cúbico e  $q \neq 0$ . O termo cúbico determina o tipo do ponto crítico. Note ainda que se  $p = 0$  e  $q = 0$  (a origem no espaço  $(p, q)$ ) o tipo do ponto crítico é determinado pelo ponto  $X^4$ .

Se  $p = 0$  e  $q \neq 0$ , temos que  $a = -3x^2$  e então o conjunto de bifurcações é o conjunto de pontos:

$$(-3x^2, 2x^3), x \in R \text{ ou ainda se } a = -3x^2 \text{ e } b = 2x^3.$$

Temos que:

$$2x^3 = b \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \text{ e}$$

$$-3.x^2 = a \Rightarrow -3.\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = a \Rightarrow$$

$$-3^3.\left(\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)^3 = a^3 \Rightarrow$$

$$-27.\frac{b^2}{4} = a^3 \Rightarrow -27.b^2 = 4.a^3 \Rightarrow 4a^3 + 27b^2 = 0.$$

Logo o conjunto de Bifurcações é definido pela equação:  $4a^3 + 27b^2 = 0$ , o qual descreve uma cúspide.

Utilizando a aplicação base

$$A_{+3} : f(x; a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \quad (3.4)$$

As propriedades canônicas são mostradas nas figuras 3.13 e 3.14.

Na figura 3.13(a) mostramos o plano dos parâmetros de controle  $R^2 = (a, b)$ , vários pontos nesse plano, e a função  $f(x; a, b)$  calculada nesses pontos. Dentro da região definida pela cúspide, a função tem três pontos críticos isolados, dois mínimos separados por um máximo local. Fora da região definida pela cúspide, a função têm somente um mínimo. Estas duas regiões no plano de controle parametrizam dois tipos de funções qualitativamente distintos.

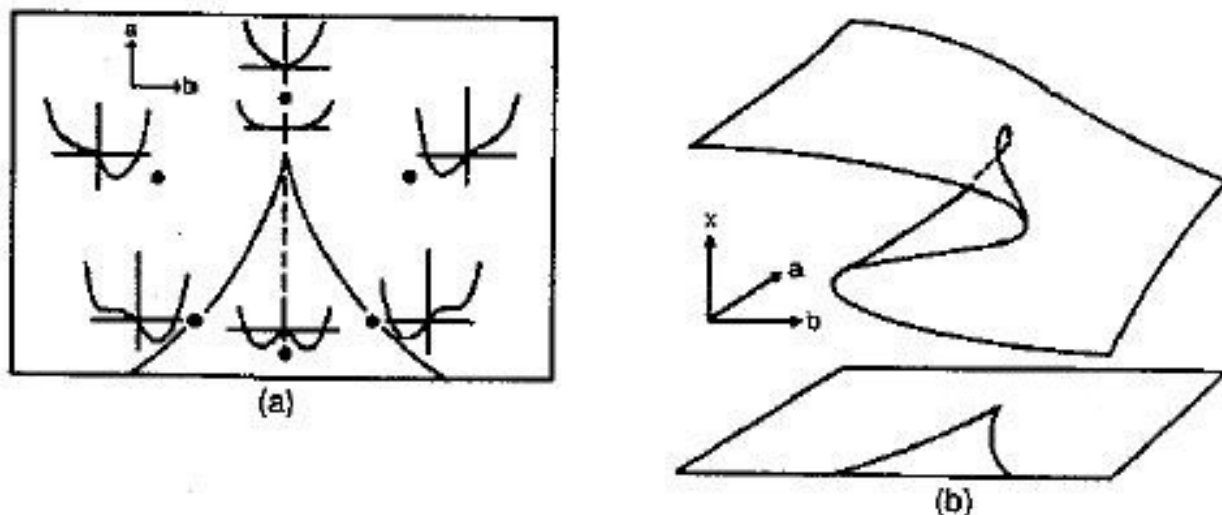


Figura 3.13: (a) Membros da família de cúspide de funções  $f(x; a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$  para diversos valores dos parâmetros de controle  $a, b$ . (b) Localização dos pontos críticos como uma função de posição sobre o plano dos parâmetros de controle.

Fonte: ROBERT, G. Department of physics and Atmospheric Science, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania, U.S.A.

Qualquer caminho de uma região para a outra deve passar pela curva definida pela cúspide, na qual existe um ponto crítico duplamente degenerado (triplamente degenerado na extremidade da cúspide). Esta degeneração ocorre onde o máximo local coincide com um dos dois mínimos. Entrando na maior região complementar, a região definida pela

cúspide, os dois pontos críticos degenerados aniquilam um ao outro numa catástrofe, a qual é do tipo  $A_2$ .

O conjunto bifurcação definida pela cúspide é determinado pela condição que um ponto crítico  $[\nabla f(x; a, b) = 0]$  é degenerado  $[\nabla^2 f(x; a, b) = 0]$ :

$$\text{ponto crítico: } f'(x; a, b) = x^3 + ax + b \quad (3.5)$$

$$\text{degenerado: } f''(x; a, b) = 3x^2 + a = 0 \quad (3.6)$$

Destas duas equações, computamos a parábola semicúbica

$$a = -3x_c^2 \quad (3.7)$$

$$b = 2x_c^3 \quad (3.8)$$

na qual o ponto crítico é degenerado. A projeção desta curva-espaco no plano dos parâmetros de controle é

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0 \quad (3.9)$$

Este é o conjunto bifurcação mostrado na figura 3.13(a).

Na figura 3.13(b) mostramos o(s) ponto(s) crítico(s)  $x_c(a, b)$  como uma função dos parâmetros de controle  $a, b$ . Estes pontos se encontram na variedade crítica ou na variedade da catástrofe  $\nabla f(x; a, b) = 0$ . Fora da região definida pela cúspide existe um único ponto crítico. Acima da região definida pela cúspide existem três. O ponto crítico do meio é o máximo local que separa os dois mínimos. Movendo em direção ao topo da região definida pela cúspide, dois dos pontos críticos se movem juntos. Eles coincidem no conjunto bifurcação e aniquilam um ao outro acima do conjunto bifurcação.

O gráfico  $x_c(a, b)$  em  $R^1$  (espaço-estado)  $\times R^2$  (espaço dos parâmetros de controle) é uma variedade suave bidimensional. O local de pontos dessa variedade onde a tangente é “vertical” é a parábola semicúbica (3.7). Por outra perspectiva, o conjunto bifurcação em  $R^2$  definido pela cúspide é a projeção da dobra na variedade  $x_c(a, b)$  em  $R^1 \times R^2$ . A singularidade nessa catástrofe não se encontra propriamente na variedade da catástrofe, que é suave, mas na projeção desta variedade bidimensional no espaço bidimensional dos parâmetros de controle. Em geral, o gráfico de  $\nabla f(x; c) = 0$  com  $x \in R^n$  e  $c \in R^k$  é uma variedade suave k-dimensional embutida em  $R^n \times R^k$ . A única singularidade ocorre na projeção desta variedade k-dimensional no espaço k-dimensional dos parâmetros de controle.

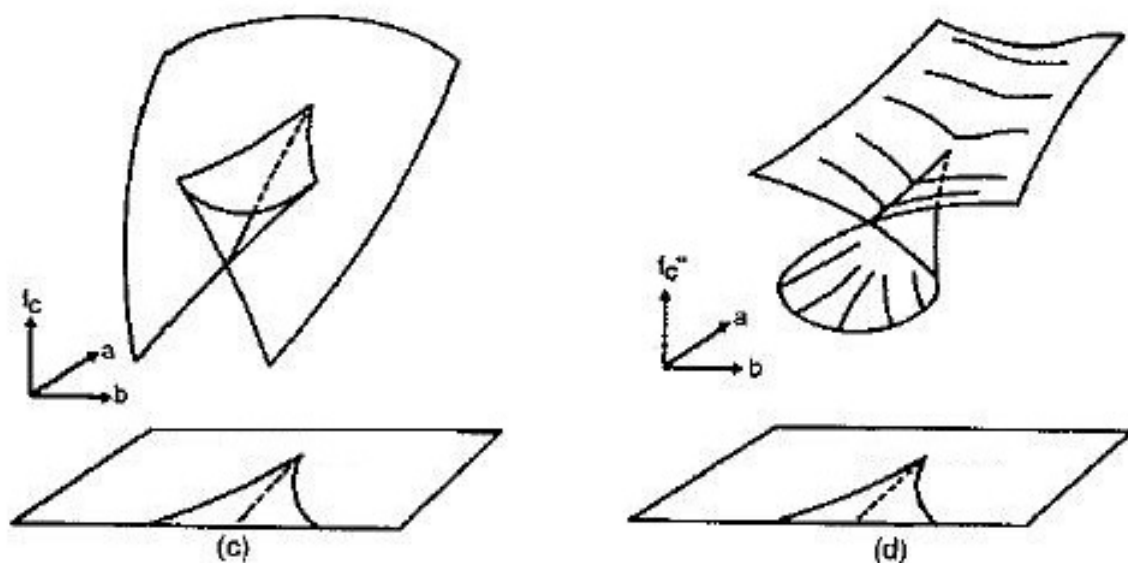


Figura 3.14: (c) Valor da função nos pontos críticos. (d) Curvatura da função nos pontos críticos.

Fonte: ROBERT, G. Department of physics and Atmospheric Science, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania, U.S.A.

Na figura 3.14(c) apresentamos a função crítica e os valores da função no(s) ponto(s) crítico(s). Este gráfico não é uma variedade devido a forma das extremidades e por intersectar a si mesmo. As duas partes mais baixas do gráfico são os valores da função nos dois mínimos. Onde essas partes se intersectam os mínimos são igualmente fundos. A parte restante desse gráfico, a qual parece o assento de uma poltrona modernista, é o valor da função no local máximo. As dobras em que os valores correspondentes aos máximos e mínimos locais se juntam têm canônica dependência de lei de potência. Esta canônica dependência de lei de potência é aquela da catástrofe dobra, nomeada  $3/2$ .

A curvatura crítica  $f''(x_c(a, b); a, b)$  ou a curvatura da funções no(s) ponto(s) crítico(s) é mostrado na figura 3.14(d). A curvatura é positiva no local mínimo e negativa no local máximo intermediário. Embora não haja dobras como na figura 3.13(d), esse gráfico não é uma variedade, pois intersecta a si mesmo. Acima do conjunto bifurcação a curvatura crítica some, pois a segunda derivada se anula e a tangente é “vertical”.

A catástrofe de tipo cúspide talvez tenha sido a mais utilizada nas aplicações, de uma forma mais ou menos apropriada. Não é trivial como a dobra, e portanto permite uma descrição de fenômenos mais complexos. Para além disso, o conjunto dos pontos críticos

é uma superfície que se pode visualizar no espaço (enquanto as catástrofes de ordem superior, descritas geometricamente por superfícies contidas num espaço de dimensão pelo menos 4, são visualizáveis apenas através das suas secções tridimensionais).

Na maioria das vezes, a catástrofe de tipo cúspide é usada para descrever não só aplicações bem conhecidas na física, mas também aplicações mais controversas (propostas por vários autores), tais como: o comportamento territorial dos animais, a agressão ou submissão de um cão que é provocado, algumas características comportamentais, tais como ser de temperamento solitário ou gregário, os comportamentos psicológicos de massa relacionados com a percepção do perigo, que podem aumentar ou diminuir a coesão de um exército, desencadear o pânico, dar início a motins, etc.

Aplicações à política e à história têm tentado descrever o declínio e a queda do Império Romano, a ascensão de Hitler ao poder na Alemanha ou a Primavera de Praga. Para além disso, a catástrofe de tipo cúspide foi usada para explicar eventos como a frequência cardíaca, as quebras das bolsas, os motins nas prisões, os confrontos entre grupos de adeptos exaltados nos estádios de futebol, a alternância de períodos de censura e períodos de permissividade em relação à difusão de pornografia, as alterações do ciclo vigília-sono e a análise de vários distúrbios psíquicos. Alguns destes exemplos iremos apresentar no capítulo seguinte, como: a quebra da bolsa de valores de 2008 encontrado em [3], o cofre do tio patinhas encontrado em [12], o estudo da atividade de uma personalidade criativa, encontrado em [13], Atitude de um Cão encontrado em [13], relação entre pais e filhos encontrado em [13].

# Capítulo 4

## Aplicações da Teoria da Catástrofe

Para não ficar apenas na teoria, vamos apresentar aplicações e mostrar alguns resultados interessantes sobre o tema. Vale ressaltar que a **Teoria da Catástrofe** tem resultados qualitativos, o que significa dizer que se as hipóteses forem corretas, o que se tem no final são possíveis cenários para análise de comportamento da solução, mas não para previsão.

Formas observadas na realidade não são estritamente idênticas às catástrofes elementares, ou mesmo para a superposição de várias delas, mas isso não impede que a teoria seja operativa, porque a distância entre a forma pura matemática do desastre e da forma observada no mundo real pode ser vista como a expressão da resistência do substrato para a implantação de singularidade espaço.

### 4.1 A Crise de 2008

Em [3], Caetano identifica crise financeira de 2008 no Brasil sob o ponto de vista da teoria da catástrofe matemática.

A figura 4.1 mostra a dobra do espaço no ambiente brasileiro, formado pela curva conhecida como “cúspide”. As setas mostram o caminho que o parâmetro faz a medida que os eventos acontecem. Quando esse parâmetro relacionado ao mercado financeiro nacional encontra a dobra do espaço representado pelo Ibovespa (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e pelo investidor externo, todo o sistema financeiro muda de estável para um *crash*: é o que se chama de catástrofe matemática.

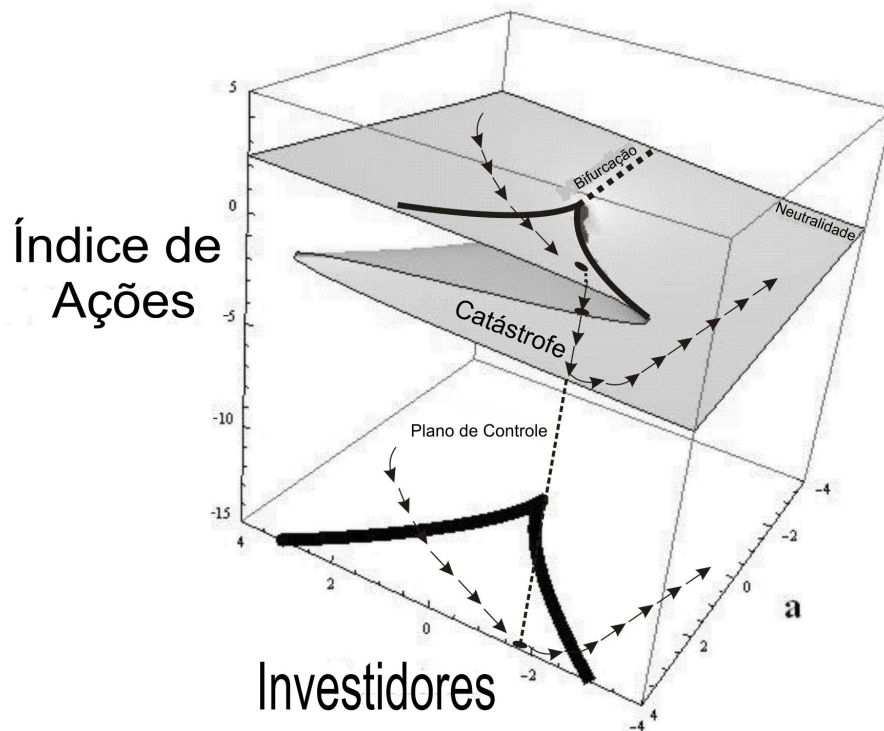


Figura 4.1: Catástrofe na Bovespa em 2008

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/CatastrofeBovespa.html>

O autor criou um modelo para a Bovespa (Bolsa de Valores de São Paulo), usando como medida o termômetro que mais altera a bolsa: o investimento externo. Ele utilizou dados oficiais do Ipeadata, elaboramos como seria um modelo que levasse em conta o Ibovespa e investimento de estrangeiros. O modelo é dinâmico e foi utilizado com equações diferenciais conforme mostrado abaixo. A primeira variável nomeada de “ $y_1$ ” descreve o fluxo de investimento externo no Brasil. A segunda variável “ $y_2$ ” descreve o comportamento da Bovespa relativo ao fluxo externo. Quedas no fluxo tornam a variável “ $y_1$ ” negativa, o que faz com que a variável “ $y_2$ ” comece a cair. Ou seja, diminuição de fluxo estrangeiro faz a Bovespa inverter a tendência.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -(y_1^3 - ay_1 + y_2) \\ \dot{y}_2 = dy_1 \end{cases}$$

O parâmetro “ $a$ ” foi chamado de parâmetro de catástrofe, pois é ele que vai aumentar ou diminuir a entrada de capital externo na variável “ $y_1$ ”.

O gráfico mostrado na figura 4.2 é o mesmo gráfico da dobra do espaço, mas quando

observado de cima. É possível observar o parâmetro de catástrofe “ $a$ ” no eixo vertical e os valores dos investimentos externos no Brasil no eixo horizontal.

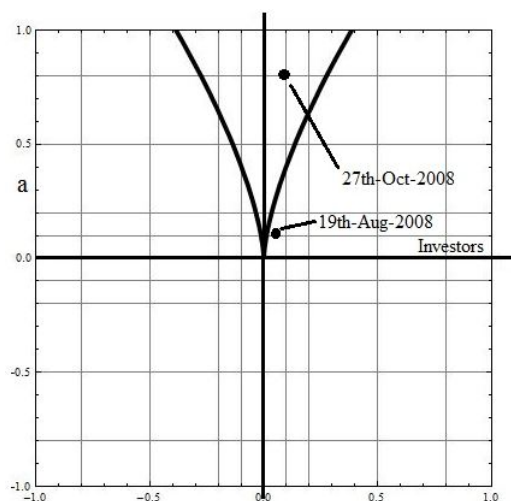


Figura 4.2: Gráfico da dobra do espaço observado de cima

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/CatastrofeBovespa.html>

Com dados reais, é possível identificar esse sistema para observar a realidade melhor possível dentro desse modelo. A área dentro do “ $V$ ” é uma região totalmente perigosa e se o parâmetro caísse ali dentro, teria a ocorrência de uma catástrofe. A região fora do “ $V$ ” mostra um mercado normal, dentro dos valores cotidianos com baixas e altas normais.

E então o modelo, quando adaptado aos dados, nos revela a realidade da Bovespa e, conseqüentemente, do mercado brasileiro. Até o dia 19 de Agosto de 2008, o parâmetro “ $a$ ” do modelo ajustado aos dados reais mostrava um cenário estável (fora do “ $V$ ”). Mas a partir dessa data, esse parâmetro foi lentamente caminhando para dentro do “ $V$ ” e, sem ninguém perceber, nossa “dobra” foi fazendo nosso mercado caminhar para a catástrofe. Ocorreu uma mudança drástica de parâmetro e de valores das variáveis Ibovespa e investimento externo. As simulações foram feitas por programa de computador usando Matlab.

Quem garante que isso é real? Com um bom banco de dados e ferramentas adequadas não podemos garantir 100%, mas podemos inferir que algo não vai bem. No gráfico visto na figura 4.3, os pontos isolados são os dados reais do Ibovespa e os tracejados e contínuos mostram o modelo. Tudo até parecia muito bom no modelo até antes de 19 de Agosto, com a característica das curvas bem semelhantes. Claro que os valores foram padronizados, pois dados de investimentos externos e pontuação do Ibovespa são diferentes. Mas então,



tudo desaba e o modelo já era, não funciona mais. Por quê?

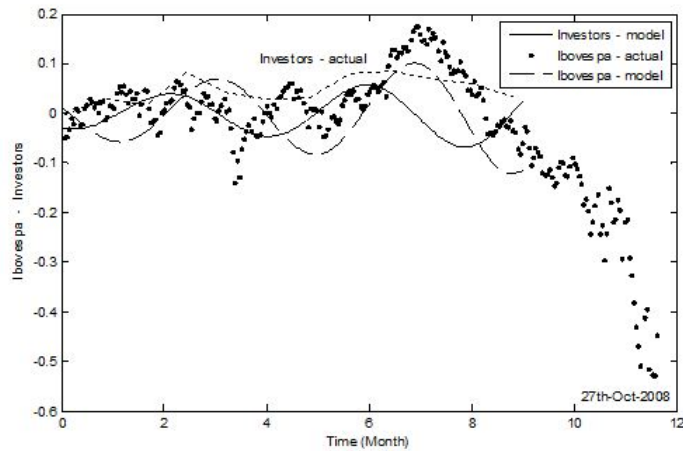


Figura 4.3: Dados reais do Ibovespa

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/CatastrofeBovespa.html>

Porque a partir dessa data de 19 de Agosto de 2008 o parâmetro “ $a$ ” mudou para dentro da área de instabilidade e de catástrofe. O parâmetro “ $a$ ” pulou para dentro da área em “ $V$ ” e tudo desabou. E agora, passado 2008, como se encontra a situação? A figura 4.4 mostra que o modelo se comportou bem até o mês de Abril de 2010. Não mexemos mais, para deixar a situação seguir seu curso e mostrar ou erro ou acerto do modelo. A curva contínua maior é do investimento externo que mostrava uma reação e volta do capital exterior ao Brasil (não necessariamente na bolsa). A linha tracejada é a previsão do modelo para a Bovespa em meses com o círculo vermelho descrevendo o que seria do futuro.

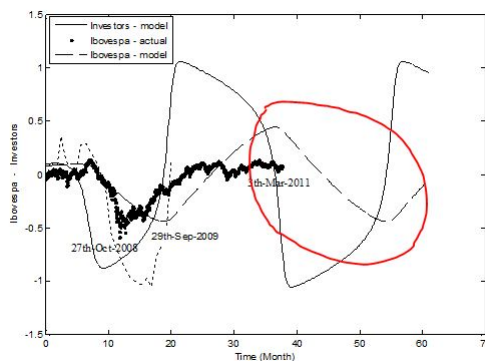


Figura 4.4: Dados do Ibovespa

Fonte: <http://www.mudancasabruptas.com.br/CatastrofeBovespa.html>

O modelo na época mostrava que a Bovespa iria virar para baixo no segundo semestre (círculo vermelho) com o mesmo parâmetro “ $a$ ” ainda dentro da região em “ $V$ ”. E o pior é que o modelo mostra que teremos pelo menos 15 meses de queda da Bovespa desde o segundo semestre desse ano. Mas isso pode não ser verdade, pois assim como em 2008 o parâmetro saltou para dentro da região da catástrofe, ações de líderes e governos podem fazer o parâmetro saltar para fora da região em “ $V$ ”.

Por que o tal *rally* de natal ainda não apareceu? Porque o parâmetro que está regendo o mercado está na região de catástrofe. E quem está mantendo esse parâmetro dentro do “ $V$ ”? As ações *quantitative easing* do FED e agora do Banco Europeu, Canadá e Reino Unido. Essas ações diretas no mercado provocam isso, ou seja, mantêm o parâmetro preso à uma região de catástrofe. Se esse modelo estiver certo, ou se o parâmetro não sair de “ $V$ ”, não teremos *rally* de Natal, nem de Carnaval.

Exemplo claro é que comparando o patamar das bolsas do final de 2010 com 2008 chegaremos a conclusão que em 2008 era uma tragédia. Por exemplo, a PETR4 chegou a valer 80 reais em 2008 e no fim do ano de 2010 comemorou-se que fechou em alta, no valor de 26 reais. O que aconteceu em 2008 foi uma mudança em algum tipo de parâmetro “ $a$ ” das bolsas, causando uma catástrofe ( matemática, é claro) e levando o ponto de estabilidade muito para baixo, igual ao exemplo acima.

Colocar o parâmetro de catástrofe “ $a$ ” para fora de “ $V$ ” deve ser um ato de todos, inclusive das pessoas que estão se endividando e sem saber estão ajudando ao parâmetro de catástrofe ficar nessa região. Tudo o que foi descrito pode nem acontecer e ser apenas simulações teóricas, mas também a realidade pode ser ainda pior, como em 1929.

## 4.2 O Cofre do Tio Patinhas

Outra forma de exemplificar a teoria está presente em “*A Christmas for Shacktown*”, ilustrado na figura 4.5, um dos mais belos trabalhos de Carl Barks, publicado pela primeira vez em Janeiro de 1952, onde Tio Patinhas corre o risco de perder todo o dinheiro contido no seu cofre, pelo colapso do chão causado pela carga de moedas e notas aí amontoadas. A razão que desencadeia o desastre é uma simples moeda.

A curva desenhada na figura 4.6 representa o caso mais simples de catástrofe elementar que conhecemos, a Dobra, que intervém em todos aqueles modelos onde um sistema é



Figura 4.5: A Christmas for Shacktown

Fonte: ZANOLIN, F. Tio Patinhas, o tostão fatal e a teoria das catástrofes. Gazeta de Matemática, Lisboa-Portugal, ano LXXII, n. 0165, p. 15, nov. 2011

conduzido de modo uniforme para um ponto de ruptura.

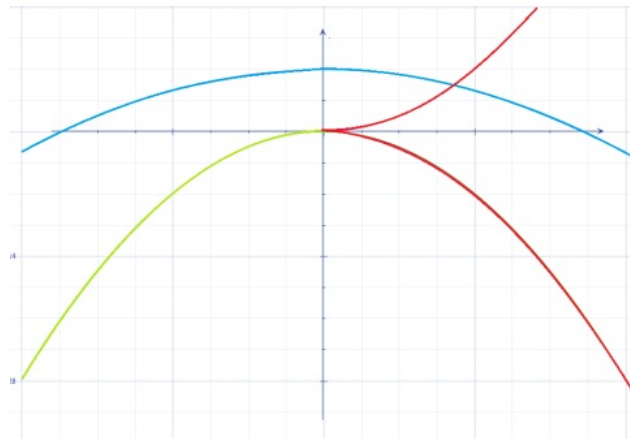


Figura 4.6: Gráfico das equações  $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$  (azul),  $x^2 + u = 0$  (verde) e  $x = \sqrt{|u|}$  (vermelho).

Temos então o conjunto dos pontos estacionários do potencial  $V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ux$  ao variar do parâmetro  $u$ . Os pontos da parábola  $x^2 + u$  com  $x > 0$  correspondem a equilíbrios estáveis, enquanto os instáveis são os que correspondem a  $x < 0$ . Se  $u$  é negativo, o sistema encontra-se no equilíbrio estável  $x = \sqrt{|u|}$ . O parâmetro  $u$  pode aumentar de forma contínua, e quando ultrapassar valor  $u = 0$  os equilíbrios desaparecem e o sistema explode em tempo finito. O vértice da parábola, em  $u = 0$ , corresponde ao instante em que se verifica o colapso do chão do cofre do Tio Patinhas.

### 4.3 O Estudo da Atividade de uma Personalidade Criativa

Em [1], Arnold nos mostra mais um exemplo de aplicação da teoria estudada. Ele caracteriza uma personalidade criativa (por exemplo, um cientista) por três parâmetros, designados por “técnica”, “entusiasmo” e “realização”. Claramente esses três parâmetros estão relacionados entre si; assim, temos uma superfície num espaço tridimensional com coordenadas (T, E, R). Projetamos essa superfície sobre o plano (T, E) na direção de R. Para uma superfície genérica, as singularidades são dobras e cúspides. Alega-se que uma cúspide numa situação como a indicada na figura 6 descreve satisfatoriamente os fenômenos observados.

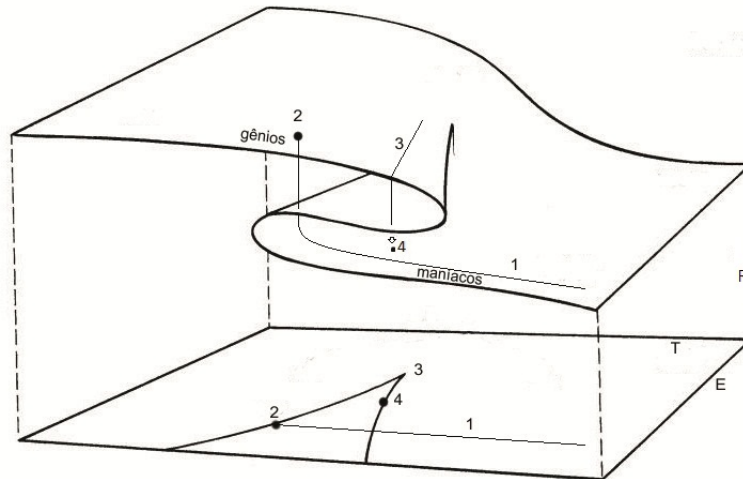


Figura 4.7: Cúspide

Fonte: ARNOLD, V. I. Teoria das catástrofes. Campinas: Editora da Unicamp, 1949.

Vejamos como, nas condições assumidas, a realização de um cientista pode ser modificada devido à sua técnica e ao seu entusiasmo. Se o entusiasmo não é grande, a realização cresce monotônica e lentamente com a técnica. Se o entusiasmo é suficientemente grande, então produz-se um fenômeno diferente: agora, com o aumento da técnica, a realização pode aumentar com um salto (tal pulo ocorre, por exemplo, no ponto 2 da figura 6, à medida que entusiasmo e técnica variam ao longo da curva 1). A região de alta realização a que agora chegamos é indicada pela palavra “gênio”.

Por outro lado, um crescimento de entusiasmo sem estar sustentado por um aumento correspondente de técnica conduz a uma catástrofe (no ponto da curva 3 da figura

6), na qual a realização reduz-se bruscamente, caindo na região denotada pela palavra “maníaco”. Vemos que o pulo do estado de gênio para o de maníaco e vice-versa produz-se ao longo de várias linhas, de forma que, para valores de entusiasmo suficientemente grandes, um gênio e um maníaco podem ter entusiasmo e técnica idênticos, diferindo apenas na realização.

## 4.4 Atitude de um Cão

Outra aplicação da teoria da catástrofe pode ser vista em [13], quando Zeeman considera comportamento de um cão ter que enfrentar o medo ou raiva, responder pela fuga ou ataque (e, em menor grau, por evasão ou grunhido). Se um cão inicialmente encontra-se sem medo sua atitude será de atacar, porém, se o seu medo aumentar, ele acabaria por fugir, como mostrado na figura 4.8. Temos o problema de medir os vários fatores, particularmente o medo e a raiva. K. Lorentz mostrou em seu livro “Agressão” que os fatores que influenciam comportamento do cão com medo ou raiva são perfeitamente determinados, respectivamente, pela inclinação das orelhas e da abertura da boca.

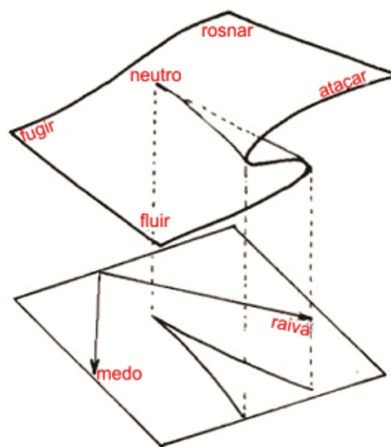


Figura 4.8: Comportamento de um Cão

Fonte: ZEEMAN, E. C. Application de la théorie des catastrophes à l'étude des comportements humains.

Exemplos como estes são altamente sugestivos, mas abrem o espaço para críticas, por vezes mesmo ferozes. Ninguém gosta de pensar que as manifestações da própria personalidade sejam descritíveis com só uma grandeza e dois parâmetros, como neste exemplo, que o cão, ao ser provocado, pode atacar ou recuar. Por outro lado, é preciso

dizer que sobretudo Thom e Zeeman tinham um estilo convincente e também a audácia intelectual de propor pontos de vista novos baseados em modelos deste tipo. Em [1], Arnold conclui mais à frente no seu livro que felizmente, os belos resultados da teoria das singularidades não dependem do dark mysticism da teoria das catástrofes.

## 4.5 Relação Entre Pais e Filhos

Zeeman, em [13], mostra ainda o exemplo no qual, através da teoria da catástrofe, representa a atitude dos pais punirem ou tolerarem as ações de seus filhos consideradas mais ou menos ruins, dependendo do seu nível de seriedade. Todos os pais sabem tolerar as ações de seus filhos até um ponto em que, de repente, chega-se a um determinado limite, em seguida, eles os corrigem chegando ao ponto dos filhos serem punidos até que tudo volte ao normal, quando a criança é reeducada. Aqui temos um exemplo perfeito do laço de histerese (caminho  $\rightarrow\rightarrow$ ) sobre a figura 4.9).

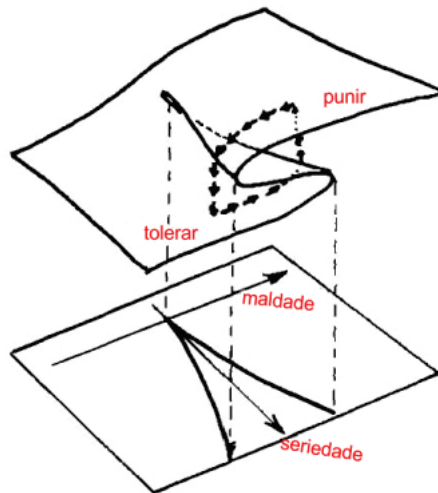


Figura 4.9: Atitude dois Pais em Relação aos Filhos

Fonte: ZEEMAN, E. C. Application de la théorie des catastrophes à l'étude des comportements humains. Disponível em:

<http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/05zeeman.pdf>

Quando a variação do parâmetro de controle faz com que se chegue a algum ponto dentro da região “V”, temos a “punição” ou a “catástrofe” para este caso.

## 4.6 Uma Curiosidade

O grande pintor surrealista Salvador Dalí (1904-1989), nos últimos anos da sua vida (a partir de 1978, aproximadamente) ficou fascinado com a teoria das catástrofes. Conheceu pessoalmente René Thom e em 1983 quis dedicar-lhe um quadro baseado no mito de Europa e intitulado *El Rapto Topológico de Europa - Homenagem a René Thom*. O tema da pintura é depois retomado num pormenor do quadro “A Cauda da Andorinha”. Série das Catástrofes. O desenho central deste último é tirado diretamente de uma projeção tridimensional da catástrofe cauda de andorinha de Thom. É bem conhecido que Dalí era fascinado pelo conceito de quarta dimensão, que quis explorar algumas das suas obras anteriores. No quadro “A cauda da Andorinha” estão presentes também uma cúspide e um símbolo musical (associado a figura de um violoncelo) que porém e também o símbolo da integral. Conta-se que Dalí achava que a sala de espera da estação de comboios da cidade de Perpignan (capital da região dos Pirineus Orientais, no sul de França), onde em 19 de Setembro de 1963 teve uma visão de êxtase cósmica, fosse o centro do universo. Vários anos depois, Dalí teve o seu único encontro com René Thom, que lhe confidenciou que naquele momento estava a estudar a teoria das placas e os movimentos da crosta terrestre.

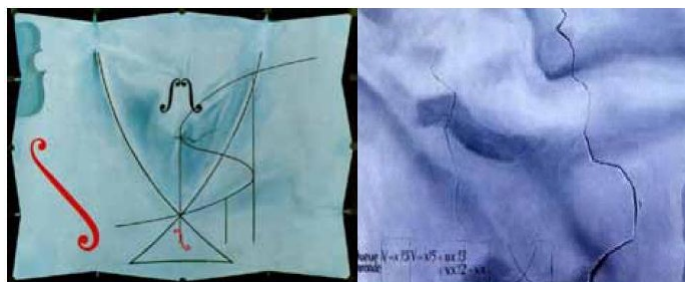


Figura 4.10: O Rapto Topológico de Europa e A Cauda de Andorinha, segundo Salvador Dalí

Fonte: ZANOLIN, F. Tio Patinhas, o tostão fatal e a teoria das catástrofes. *Gazeta de Matemática*, Lisboa-Portugal, ano LXXII, n. 0165, p. 22, nov. 2011.

A uma pergunta do pintor catalão, parece que o matemático francês confirmou que alguns milhões de anos antes a Península Ibérica tinha rodado, tendo como fulcro o lugar onde hoje se encontra a estação de Perpignan. O artista pintou sucessivamente a sua homenagem a René Thom, reproduzindo no canto inferior esquerdo da obra exata-

mente a expressão de potencial que descreve a catástrofe de tipo cúspide. O quadro é uma das últimas pinturas de Dalí sobre tela, e num primeiro momento alguns críticos consideraram-na um rabisco senil de uma pessoa que já sofria de alucinações. Todavia, uma crítica posterior reavaliou a obra e encontrou uma incrível semelhança entre as fraturas desenhadas por Dalí sobre a tela e alguns percursos rodoviários para Narbonne (a norte de Perpignan). Mas Dalí, de acordo com alguns testemunhos, traçou aqueles signos sem ter à sua frente um mapa rodoviário dessa zona.



# Considerações Finais

A partir dos aspectos expostos nesta monografia, podemos destacar os estudos da Teoria da Catástrofe como uma mudança brusca e descontínua após uma variação suave dos parâmetros de controle. Mostramos com clareza o surgimento da teoria, apresentamos os principais pesquisadores desta área e suas contribuições, bem como a relação da teoria com outros ramos do conhecimento. Além disso, tomando como base dados bibliográficos, priorizamos a exposição de exemplos de aplicações para um melhor entendimento do assunto, como o estudo matemático da crise financeira ocorrida em 2008 no Brasil, o estudo da atividade de uma personalidade criativa, entre outros.

Vale ressaltar a grande relevância dos estudos sobre a Teoria da Catástrofe em formas observadas na realidade, pois mesmo que esta teoria apresente resultados qualitativos, e não quantitativos, os dados obtidos são importantes para análise de comportamento das soluções dos problemas propostos, sugerindo cenários para os fenômenos “observados”

# Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I. Teoria das catástrofes. Campinas: Editora da Unicamp, 1949. 152p.
- [2] CAETANO, M. A. L. A catástrofe previsível. Disponível em: <http://www.mudancasabruptas.com.br/Catastrofe.html>. Acesso em: 28 nov 2012.
- [3] CAETANO, M. A. L. A crise de 2008 foi uma catástrofe?. Disponível em: <http://www.mudancasabruptas.com.br/CatastrofeBovespa.html>. Acesso em: 28 nov 2012.
- [4] CAETANO, M. A. L. Uma catástrofe que você pode prever. Disponível em: <http://blogs.advfn.com/artigos/investimentos/uma-catastrofe-que-voce-pode-prever>. Acesso em: 04 dez 2012.
- [5] CAETANO M. A. L. Sistemas dinâmicos. Disponível em: <http://www.mudancasabruptas.com.br/SistemasDin.html>. Acesso em: 03 dez 2012.
- [6] DOMINGUES, M. V. R. Dinâmica tecnológica: uma interpretação pela teoria das catástrofes. Revista Eletrônica do Mestrado em Educação Ambiental. Rio Grande, RS, vol. espec., out. 2004. Disponível em: <http://www.seer.furg.br/remea/article/view/2860/>. Acesso em: 07 dez 2012.
- [7] JUNIOR, M. M. O. Cáustica por reflexão e teoria das catástrofes. 2005. 94p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: [s.n.], 2005.
- [8] OLIVEIRA, A. R. C. A classificação das formas binárias aplicada em máquina de catástrofes. 2010. 59f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro: [s.n.], 2010.

- [9] TEIXEIRA, R. Singularidades. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 23, 2001, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: IMPA, 2001. p. 179-194.
- [10] TOGNON, C. H.; NOGUEIRA, A. C. Uma introdução à teoria de pontos críticos. FAMAT em Revista, Uberlândia-MG, n. 09, p. 13-24, out. 2007.
- [11] TÔRRES, J. J. M. Teoria das catástrofes. Disponível em: <http://www.teoriadacomplexidade.com.br/teoria-das-catastrofes.html>. Acesso em: 06 dez 2012.
- [12] ZANOLIN, F. Tio Patinhas, o tostão fatal e a teoria das catástrofes. Gazeta de Matemática, Lisboa-Portugal, ano *LXXII*, n.0165, p.14 – 23, nov. 2011.
- [13] ZEEMAN, E. C. Application de la théorie des catastrophes à l'étude des comportements humains. Disponível em: <http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/05Zeeman.pdf>. Acesso em: 02 jan 2013.
- [14] <http://origemdapalavra.com.br/palavras/catastrofe/>. Acesso em: 22 jan 2013 às 20h59min.