



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ESPAÇOS MÉTRICOS E CONSULTAS POR SIMILARIDADE

Macapá - AP
2013



Amanda Alves Martins
Frank Corrêa de Oliveira

ESPAÇOS MÉTRICOS E CONSULTAS POR SIMILARIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sóttil.

Macapá - AP
2013

Amanda Alves Martins
Frank Corrêa de Oliveira

ESPAÇOS MÉTRICOS E CONSULTAS POR SIMILARIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil. (Orientador)
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Avaliado em 08/05/2013

Macapá - AP
2013

*A Deus.
As nossas famílias.
Aos nossos professores.
Aos nossos amigos.
Dedicamos.*

AGRADECIMENTOS

Eu Amanda Alves Martins agradeço a Deus, por mais uma vez, ter permitido vencer uma importante etapa da minha vida.

Aos meus pais, Antônio e Nidalva, pelo amor, confiança, força, dedicação e preocupação. Sem vocês nada seria possível. Às minhas queridas irmãs Aline e Arislene, pelo carinho, cumplicidade e incentivo que mesmo com a distância se fez sempre presente.

Ao meu amigo e namorado Frank, pelo amor, carinho, companhia, dedicação e atenção. Por compartilhar os momentos felizes e os não tão felizes.

Às minhas amigas Milena e Sueide, pela amizade e compreensão e por todos os momentos divertidos e descontraídos que passamos juntas.

Aos meus professores de graduação, em especial meu orientador Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sóttil pela paciência e esforço dedicados para execução deste trabalho.

A todos muito obrigada!

AGRADECIMENTOS

Eu Frank Corrêa de Oliveira, agradeço a Deus pelas oportunidades em minha vida, guiando-me nas mais diversas etapas da mesma.

A minha Mãe Odineia Furtado Corrêa, por ter dado-me a oportunidade de viver, por estar sempre pondo-se na minha frente em caminhos difíceis, por ser a primeira pessoa a estender-me a mão nas quedas de minha vida até este exato momento.

Ao meu pai Francisco Souza de Oliveira, por manter-me no caminho certo nos momentos em que sentir vontade de desistir, da maneira que só ele sabe. Por oferecer-me apoio para continuar.

A toda minha família por estar sempre disposta a me ajudar das mais diversas maneiras.

A minha namorada, companheira e amiga Amanda Alves Martins, por estar sempre oferecendo-me a oportunidade de sua companhia, por dividirmos cada conquista, cada realização, felicidades e infelicidades, problemas e soluções, vencendo juntos todos os contratemplos, por ser a razão de tudo, por todo seu Carinho e Amor.

Ao meu grande orientador, professor e amigo, Dr. José Walter Cárdenas Sóttil, pela paciência e dedicação na construção do presente trabalho, pela ótima orientação, muito obrigado.

Ao meus colegas amigos e professores da graduação por compartilhar momentos de felicidades e infelicidades no decorrer do curso.

A todos muito obrigado!

“A demonstração é um ídolo aos pés do qual os matemáticos se torturam a eles próprios.”

(Arthur Eddington)

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, abordamos os espaços métricos demonstrando suas propriedades para métricas usuais, isto é, para as distâncias da família ℓ^p de Minkowski, vistas nas mais diversas literaturas, quando $1 \leq p \leq \infty$. Mostramos que em um espaço qualquer podemos definir várias métricas, porém métricas distintas produzem espaços métricos distintos, no caso do espaço \mathbb{R}^n , com a família ℓ^p , e ainda métricas não usuais, como a métrica de Canberra, a métrica do Delta de Kronecker, a métrica de Bray-Curtis e a métrica Divina. Apresenta-se métodos que fazem uso de métricas, como os que utilizam consultas por similaridade, abordando de forma clara os métodos de autenticações biométricos, afim de esclarecer dúvidas de como os espaços métricos tem participado no desenvolvimento tecnológico, em especial na identificação de indivíduos.

Palavras-chave: Espaços Métricos, Métricas, Minkowski, Consultas por Similaridade, Biometria.

Abstract

In this monograph, we study the metric spaces, demonstrating its properties to usual metrics, that is, for distances of the family ℓ^p of Minkowski, seen in various literatures, where $1 \leq p \leq \infty$. We show that in any space we can define several metrics, but distinct metrics produce different metric spaces, in the case of the space \mathbb{R}^n , with family ℓ^p , and also unusual metrics, as the Canberra metric, the metric of the Kronecker delta, the Bray-Curtis metric and the Divine metric. Methods that make use of metrics will be presented, such as those using similarity queries, approaching in a clear way the methods of biometric authentication, in order to answer questions of how the metric spaces has participated in technological development, particularly in the identification of individuals.

Keywords: Metric Spaces, Metric, Minkowski, Similarity Queries, Biometrics.

Lista de Figuras

3.1	ℓ^1 - Representação geométrica	26
3.2	ℓ^2 - Representação geométrica	27
3.3	ℓ^∞ - Representação geométrica	28
3.4	$\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ - Representação geométrica	28
3.5	Distância de Manhattan [20]	29
3.6	Distância Euclidiana [20]	31
3.7	Distância de Chebyshev [20]	35
3.8	Ilustração	48
3.9	Possibilidades	64
3.10	Resultante	64
3.11	Configuração	67
4.1	Consulta por abrangência com três medidas de similaridade diferentes (ℓ^1, ℓ^2 e ℓ^∞)	72
4.2	Consulta pelos três vizinhos mais próximos ao objeto s_q utilizando a função de distância euclidiana ℓ^2 .	73
4.3	Inferência de função a partir de similaridade	75
4.4	Erro	75
4.5	Modelo de Autenticação Biométrica	77
4.6	Minutiae - posições de detalhes	78
4.7	(a) Leitor USB, (b) Escâner, (c) Biomouse.	78
4.8	Leitor de Geometria da Mão	80
4.9	Leitura Facial	81
4.10	Analizador de Retina	81
4.11	Aparelho de reconhecimento de íris	82

Sumário

1	Introdução	12
2	Espaços Métricos	16
2.1	Definição	16
2.2	Subespaço métrico - Métrica Induzida	17
2.3	Produto Interno	17
2.4	Norma	17
2.4.1	Norma com Produto Interno	18
2.5	Outros resultados importantes	19
3	Métricas	22
3.1	Métrica discreta	23
3.2	Métrica Usual da Reta	24
3.3	Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n	24
3.3.1	ℓ^1 , Distância de Manhattan	28
3.3.2	ℓ^2 , Distância Euclidiana	31
3.3.3	ℓ^∞ , Distância de Chebyshev	34
3.4	Espaço Vetorial Normado	42
3.5	Espaço Vetorial com Produto Interno	45
3.6	Espaço de Funções Reais Limitadas	46
3.7	Espaço de funções contínuas definidas num intervalo fechado	50
3.8	Um subespaço de $\beta([a, b]; \mathbb{R})$	53
3.9	Delta de Kronecker	53
3.10	A Distância de Canberra	55
3.11	A Distância Bray-Curtis	62

3.12 Métrica Divina	63
4 Pesquisas de interesse nos Espaços Métricos	69
4.1 Considerações Iniciais	69
4.2 Avaliação de Similaridade	70
4.3 Consultas por Similaridade	71
4.3.1 Consulta por Abrangência	72
4.3.2 Consulta aos k Vizinhos Mais Próximos	72
4.4 A utilização de Espaços Métricos	73
4.4.1 Métodos de Acesso Métrico	73
4.5 A análise de similaridade métrica em dados complexos	74
4.5.1 Autenticação Biométrica	75
4.5.2 Métodos de Autenticação biométricos	77
5 Considerações Finais	83
Referências Bibliográficas	84

Introdução

Temos na matemática, tanto no cálculo como na geometria, para citar dois exemplos, grandes utilizações, mesmo quando estudamos de maneira elementar ou intuitiva, é fundamental a noção de “distância entre dois pontos”. Assim parece lógico quando se busca uma generalização do Cálculo, da Análise ou da Geometria, visando resolver problemas mais amplos, porém em termos de aplicações nos mais diversos estudos na utilização da biometria, tenta-se buscar antes não uma generalização do conceito de distância, pois tais aplicações dependem do “espaço” ao qual foi imposta, isto é, em consultas por similaridade, as aplicações dependem do espaço que se trabalha, um espaço que garanta uma total obtenção de características dos dados armazenados, a priori necessita-se de um entendimento amplo sobre a noção de distância, métrica, no qual espaços métricos.

Em termos de generalização da noção de distância, foi Cantor que por volta de 1870, quem deu os primeiros passos significativos nesse sentido. Estudando por esta época representações de funções reais por meio de séries trigonométricas, Cantor procurou entender a unicidade da representação a funções dotadas de infinitos pontos singulares. Pouco depois da década de 1880, alguns matemáticos italianos fizeram uso das ideias de Cantor para o estudo de “espaços” não convencionais, espaços em que ponto poderia ser uma curva ou uma função.

O passo seguinte e decisivo, foi dado por Fréchet em 1906 com sua tese de doutoramento. Neste trabalho que marca o início do Cálculo Funcional, Fréchet formulou uma generalização dos conceitos de limite, derivada e continuidade para espaços de funções e, vislumbrando a economia do trabalho e o grau de generalização que poderiam advir de um estudo conjunto dos mais diversos espaços, sugeriu uma definição geral e abstrata do conceito de distância e pesquisou várias maneiras de conseguir tal objetivo, sendo este o ponto de partida da teoria dos espaços métricos. Este assunto foi posteriormente desenvolvido por Hausdorff (1914) e ganhou sua contextura praticamente atual com Urysohn em 1924.

Com a alta necessidade de métodos de verificação da identificação de indivíduos, a noção de distância, logo no qual espaços métricos e a noção de métrica introduzidas por Fréchet em sua tese de doutorado “*Sur quelques points du calcul fonctionnel*”. A expressão “espaços métricos”, no entanto, não foi sua invenção, tendo sido cunhada por Hausdorff em 1914, tiveram sua grande importância neste campo tecnológico em desenvolvimento.

O problema dos métodos tradicionais de identificação de pessoas é que são baseados em senhas e assim podem ser esquecidas, roubadas, perdidas, copiadas, armazenadas de maneira insegura e até utilizadas por uma pessoa que não tenha autorização. Os sistemas biométricos automáticos surgiram para oferecer uma alternativa para o reconhecimento de pessoas com maior segurança e eficiência. Uma das técnicas biométricas mais utilizada é o reconhecimento de impressões digitais. Com o aumento do uso de impressões digitais nestes sistemas, houve o surgimento de grandes bancos de dados de impressões digitais, tornando-se um desafio encontrar a melhor e mais rápida maneira de recuperar informações. Estes sistemas devem ser capazes de responder a consultas por similaridade, isto é, questões do tipo “*quais são as 10 imagens mais semelhantes (próximas) de uma dada imagem?*” ou “*quais são as imagens que diferem de até 5 unidades de uma imagem padrão?*”. Vale notar que tanto as imagens quanto a função de distância (dissimilaridade) definida são usualmente dependentes do domínio dos dados e do interesse do que se considera “semelhante”.

A similaridade entre imagens pode ser medida de várias formas. Características como formato, cor e textura podem ser extraídas de imagens em uma base de dados, e são informações que podem ser utilizadas em cálculos de distâncias.

Ao efetuar uma consulta por similaridade em um banco de imagens, o sistema retorna ao conjunto de imagens que respondem à solicitação efetuada. A consulta é realizada através de estrutura de índices que suporta o armazenamento das imagens. Dessa forma, o conjunto de características extraídas das imagens e a função de distância utilizada têm papel preponderante nessa operação de consulta.

Uma pergunta que surge quando se fala em consultas por similaridade em imagens é, na avaliação dos resultados, se eles correspondem aos esperados pelo usuário. Isto é, como saber, por exemplo, ao solicitar as 5 imagens mais semelhantes a uma dada imagem, se a proximidade ou similaridade retornada pelo sistema realmente mapeia o que é desejado pelo usuário? Ou, mais precisamente, como implementar e avaliar a semântica esperada pelo usuário?

Atualmente são utilizados, de forma generalizadas, os modelos ℓ^p (descritos no capítulo 3) como funções de distâncias entre vetores de características extraídas das imagens. Porém, tais funções não conseguem representar diretamente o sentimento que o analista humano tem ao comparar duas imagens. Essas funções são gerais e não captam aspectos particulares das imagens em questão. Assim, os resultados de comparações entre imagens deverão ser mais apropriado e efetivos, se for feito uso de funções ajustadas às características mais específicas do domínio de aplicação, no caso, as imagens nas autenticações biométricas.

Com o passar do tempo a utilização de imagens biométricas em vários campos de estudo, tiveram sim algumas divergências em relação a aceitação do uso de tais consultas por similaridade, como por exemplo em diagnósticos médicos, sendo este um dos problemas mais conhecidos e discutidos sobre o diagnóstico por imagens. Isto é, imagens patologicamente semelhantes podem ter sido classificados de formas divergentes. O intuito desta pesquisa é o de esclarecimento sobre tal utilização, o que de certa forma deixa-se bem claro que no exemplo dos diagnósticos médicos, esse tipo de abordagem não poderá substituir o médico na análise da imagem, mas poderá apontar alternativas para o tratamento do paciente, onde no caso da utilização na análise de impressões digitais, reconhecimento de face, entre outros, têm-se com os estudos um grande avanço tecnológico nas áreas de atuação.

Por mais de uma década, pesquisadores têm explorado a área de análise e recuperação de imagens por conteúdo. Entretanto, a maioria dos trabalhos encontrados preocupam-se com a proposta de novos extratores de características e negligenciam o inter-relacionamento entre as características e as funções de distância que os comparam, indicando o grau de similaridade entre as imagens. Desse modo, fazem uso das mais conhecidas e amplamente utilizadas funções de distâncias, tais como a distância Euclidiana e outros membros da família ℓ^p , sem explorar adequadamente se tais funções suportam a recuperação das imagens por conteúdo atendendo às expectativas dos usuários.

Existe uma grande diversidade de funções de distâncias para a realização de consultas por similaridade.

O desenvolvimento de funções de distâncias depende de quais serão as características da imagem que serão utilizadas, o que leva à elaboração e aperfeiçoamento de desenvolvimento paralelo entre os dois aspectos. Os Métodos de Acesso Métricos (MAMs) atuais utilizam basicamente as distâncias (métricas) ℓ^p .

O objetivo do presente trabalho é abordar de forma clara o conteúdo Espaços Métricos, bem como sua aplicação nas consultas por similaridade, visando a compreensão das propriedades de espaços métricos, tal qual as suas devidas verificações, dando ênfase nas distâncias da família ℓ^p , explorando ainda outras métricas não usuais.

Ainda neste trabalho além deste capítulo introdutório, possui outros três capítulos. No segundo apresentamos as definições de espaços métricos, métricas, produto interno, norma, norma com produto interno. E para uso posterior apresenta também resultados que auxiliarão em exemplos de métricas abordadas no capítulo subsequente. No terceiro capítulo abordamos as propriedades de espaços métricos em diversas métricas conhecidas na literatura, destacando a família de distância ℓ^p . Finalmente, no capítulo quatro apresentamos noções relacionadas com a aplicação dos espaços métricos no campo de estudos das consultas por similaridade, assim como métodos que envolvem tais estudos na utilização das autenticações biométricas.

Capítulo 2

Espaços Métricos

Neste capítulo iremos abordar temas importantes para a construção do trabalho, como a definições de espaços métricos, subespaço métrico e norma.

2.1 Definição

Dado M um conjunto não vazio e seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par $(x, y) \in M \times M$, através da função d .

Se d satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d(x, x) = 0$;

(ii) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in M$,

então d é chamada uma métrica sobre M .

Os postulados (i) e (ii) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O produto (iii) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y . A condição (iv) chama-se desigualdade do triângulo; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M . Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente “o espaço métrico M ”, deixando subentendida qual a métrica d que está sendo considerada.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas nós os chamaremos sempre os *pontos* de \mathbb{M} .

2.2 Subespaço métrico - Métrica Induzida

Seja (\mathbb{M}, d) um espaço métrico. Se \mathbb{S} é um subconjunto não vazio de \mathbb{M} . A restrição da função d a $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ define uma métrica d_s em \mathbb{S} , dita métrica induzida. O conjunto \mathbb{S} , munido da métrica induzida, é dito subespaço (métrico) do espaço métrico (\mathbb{M}, d) . Assim, todo subespaço de um espaço métrico pode ser considerado, de modo natural, como um espaço métrico.

2.3 Produto Interno

Seja \mathbb{V} um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . Entende-se por *produto interno* sobre \mathbb{V} uma aplicação que transforma cada par ordenado $(u, v) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ em um número real, que indicaremos por

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n, \quad (2.1)$$

obedecendo as seguintes condições:

- (a) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in \mathbb{V}$;
- (b) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in \mathbb{V}$;
- (c) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in \mathbb{V}$; e
- (d) $\langle u, u \rangle$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq 0$.

2.4 Norma

Uma *norma* de um espaço vetorial \mathbb{E} sobre \mathbb{R} é uma função que associa a cada $u \in \mathbb{E}$ um número real não negativo, indicado por $\|u\|$ é chamado *norma* de u , de maneira que:

- (n1) $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- (n2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in \mathbb{E}$
- (n3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in \mathbb{E}$

2.4.1 Norma com Produto Interno

Seja \mathbb{V} um espaço euclidiano com produto interno $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$. Dado um vetor $u \in \mathbb{V}$ indica-se por $\|u\|$ e chama-se *norma induzida de u* o número real positivo dado por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}. \quad (2.2)$$

Verifica-se a seguinte proposição.

Proposição 2.4.1. *Desigualdade de Cauchy-Schwarz:*

Se \mathbb{V} é um espaço Vetorial Euclidiano, então:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}. \quad (2.3)$$

Demonstração. Se $v = 0$, então $\langle u, v \rangle = 0$ e $\|u\| \|v\| = 0$. Logo, tem-se uma igualdade neste caso. Suponhamos $v \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade $\|u + \alpha v\|^2 \geq 0$.

Daí,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u + \alpha v\|^2 &= \langle u + \alpha v, u + \alpha v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, \alpha v \rangle + \langle \alpha v, u \rangle + \langle \alpha v, \alpha v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \alpha \langle u, v \rangle + \alpha \langle v, u \rangle + \alpha^2 \|v\|^2 \\ &= \|v\|^2 \alpha^2 + 2 \langle u, v \rangle \alpha + \|u\|^2. \end{aligned}$$

Obtemos assim um trinômio do segundo grau em α (pois $\|v\|^2 \neq 0$) o qual é sempre positivo. Logo seu discriminante deve ser negativo ou nulo:

$$4 \langle u, v \rangle^2 - 4 \|v\|^2 \|u\|^2 \leq 0.$$

Portanto:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

□

Segue o colorário:

Corolário 2.4.1. *Desigualdade Triangular:*

Num Espaço Euclidiano vale a seguinte desigualdade:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in \mathbb{V}. \quad (2.4)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Então $\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$, para todo par de vetores u e v . Desta desigualdade decorre a Equação 2.4. □

2.5 Outros resultados importantes

Para uso posterior apresentaremos nesta seção resultados que auxiliarão com alguns exemplos de métricas em espaços diversos de funções. Vejamos o Lema a seguir.

Lema 2.5.1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $c \in \mathbb{R}$. São também limitados os conjuntos $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $c.A = \{c.x; x \in A\}$. Além disso, tem $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\sup(c.A) = c. \sup A$ com $c \geq 0$.*

Demonstração. Pondo

$$a = \sup A \text{ e } b = \sup B, \forall x \in A \text{ e } y \in B$$

tem-se

$$x \leq a, y \leq b,$$

logo

$$x + y \leq a + b.$$

Portanto, $a + b$ é cota superior de $A + B$. Além disso, dado $\epsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que

$$a - \epsilon/2 < x \text{ e } b - \epsilon/2 < y,$$

onde

$$a + b - \epsilon < x + y.$$

Isto mostra que $a + b$ é a maior cota superior de $A + B$, ou seja, que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

A igualdade

$$\sup(c.A) = c. \sup A$$

é óbvia se $c = 0$. Se $c > 0$, dado qualquer $x \in A$ tem-se $x \leq a$, logo $cx \leq ca$. Portanto ca é cota superior do conjunto $c.A$. Além disso, dado qualquer número d menor do que ca , temos $d/c < a$. Como a é $\sup A$, então d/c não é cota superior de A , logo $\exists x \in A$ tal que $d/c < x < a$, logo $d < cx$, pelo qual se $d < ca$, então d não é cota superior de $c.A$, portanto ca é o supremo de ca , ou seja, que $\sup(c.A) = c. \sup A$.

□

Assim segue o corolário;

Corolário 2.5.1. *Sejam $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas. Para todo $c \in \mathbb{R}$ são limitadas as funções*

$$f + g, cf : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tem-se além disso,

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g \text{ e } \sup(cf) = c. \sup f$$

quando $c \geq 0$.

Demonstração. De fato, sejam

$$A = f(\mathbb{X}), B = g(\mathbb{X}), C = (f + g)(\mathbb{X}) = \{f(x) + g(x); x \in \mathbb{X}\}.$$

Evidentemente $C \subset A + B$, logo

$$\begin{aligned}\sup(f + g) &= \sup C \\ &\leq \sup(A + B) \\ &= \sup A + \sup B \\ &= \sup f + \sup g.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sup(cf) &= \sup\{cf; x \in X\} \\ &= \sup(cA) \\ &= c \cdot \sup A,\end{aligned}$$

quando $c \geq 0$.

□

Capítulo 3

Métricas

Do capítulo 2, temos que a função $d : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica se verifica as propriedades para $x, y, z \in \mathbb{M}$.

(i) $d(x, x) = 0$;

(ii) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Sobre um mesmo conjunto \mathbb{M} podem-se definir várias funções $f : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam métricas, entretanto deve-se ter cuidado de verificar se a função f satisfaz as propriedades *i)* a *iv)*.

Por exemplo, se $\mathbb{M} = \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x - y)^2$ verifica as três primeiras propriedades;

(i) $f(x, x) = (x - x)^2 = 0$

(ii) $f(x, y) = (x - y)^2 > 0$, se $x \neq y$

(iii) $f(x, y) = (x - y)^2 = (y - x)^2 = f(y, x)$

entretanto, se $x = 2$, $z = 5$ e $y = 3$ temos:

$$f(x, z) = f(2, 5) = (2 - 5)^2 = 3^2 = 9$$

$$f(x, y) = f(2, 3) = (2 - 3)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$f(y, z) = f(3, 5) = (3 - 5)^2 = 2^2 = 4$$

logo,

$$f(x, y) + f(y, z) = 1 + 4 = 5 < 9 = f(x, z)$$

e a propriedade *iv*) não se verifica, portanto $f(x, y) = (x - y)^2$ não define uma métrica sobre \mathbb{R} .

A seguir indicamos funções que definem métricas, algumas delas são habituais nos livros didáticos de Topologia e Espaços Métricos, enquanto outras não são muito conhecidas, como a métrica de Canberra, a métrica do Delta de Kronecker e a métrica Divina.

3.1 Métrica discreta

Seja M um conjunto qualquer não vazio, temos a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida da forma:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases} ; \forall x, y \in M. \quad (3.1)$$

Proposição 3.1.1. *A função d em 3.1 define uma métrica sobre M , denominada Métrica Discreta.*

Demonstração. Vamos verificar as propriedades que definem um espaço métrico para este exemplo:

- (i) Por definição, $d(x, x) = 0$ para qualquer $x \in M$.
- (ii) Também por definição, $d(x, y) = 1 > 0$ sempre que $x \neq y$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ uma vez que $x = y \Leftrightarrow y = x$ e $x \neq y \Leftrightarrow y \neq x$.
- (iv) Sejam x, y e z elementos quaisquer em M . Temos;

- (a) Se $x = y$ e $x \neq z$ então $d(x, y) = 0$ e portanto

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in M.$$

- (b) Se $x \neq y$ e $y = z$, então $x \neq z$ e

$$d(x, y) = 1, d(y, z) = 0, d(x, z) = 1.$$

Portanto,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (1 \leq 1 + 0)$$

(c) Se $x \neq y$ e $y \neq z$, então

$$d(x, y) = 1, d(y, z) = 1, d(x, z) = 1.$$

Logo,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (1 \leq 1 + 1)$$

Portanto d é uma métrica.

□

3.2 Métrica Usual da Reta

Considere o conjunto dos números reais \mathbb{R} e a função

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = |x - y|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Verificaremos a seguir as propriedades de espaços métricos para a função 3.2.

(i) $d(x, x) = |x - x| = 0$

(ii) Se $x \neq y$ então $x - y \neq 0$ e portanto, $|x - y| > 0$, isto é, $d(x, y) > 0$.

(iii) $d(x, y) = |x - y| = |(-1) \cdot (y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = 1 \cdot |y - x| = d(y, x)$

(iv) Sejam x, y, z números reais quaisquer. Sabemos da equação 2.4 que

$$|x - y| \leq |x - y| + |y - z|$$

Logo, d é uma métrica, isto é, (\mathbb{R}, d) é um Espaço Métrico.

3.3 Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n

Os pontos de \mathbb{R}^n são as listas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real, no qual as operações são definidas das seguintes maneiras;

Sejam,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ e } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

temos,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (3.3)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Em \mathbb{R}^n , define-se família de distâncias Minkowski (ℓ^p) da seguinte forma:

$$\ell^p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}, \quad p \geq 1, \quad p \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Em particular, se $p = 1$, $p = 2$ temos:

$$\ell^1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (3.6)$$

$$\ell^2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (3.7)$$

A métrica ℓ^1 é denominada Métrica de Manhattan, enquanto ℓ^2 é denominada Métrica Euclidiana.

Definimos a métrica ℓ^∞ como:

$$\ell^\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|. \quad (3.8)$$

A métrica ℓ^∞ é denominada Métrica de Chebyshev.

Definição 3.3.1. *Seja (\mathbb{M}, d) um espaço métrico. Definimos a Bola fechada com centro em $a \in \mathbb{M}$ e raio $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$, ao conjunto*

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{M} \mid d(x, a) \leq r\}. \quad (3.9)$$

Vejam em \mathbb{R}^2 qual é a representação da Bola unitária $\overline{B}(0, 1)$ nas métricas ℓ^1 , ℓ^2 e ℓ^∞ .

a) $\overline{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ na métrica ℓ^1 .

Se $x \in \overline{B}(0, 1)$, então se $x = (x_1, x_2)$ e $0 = (0, 0)$ temos:

$$\ell^1(x, 0) \leq 1$$

$$|x_1 - 0| + |x_2 - 0| \leq 1$$

$$|x_1| + |x_2| \leq 1$$

Temos os seguintes casos,

i) $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 1 \\x_2 &\leq 1 - x_1\end{aligned}$$

ii) $x_1 \geq 0$ e $x_2 < 0$

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 1 \\x_2 &\geq x_1 - 1\end{aligned}$$

iii) $x_1 < 0$ e $x_2 \geq 0$

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 &\leq 1 \\x_2 &\leq x_1 + 1\end{aligned}$$

iv) $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$

$$\begin{aligned}-x_1 - x_2 &\leq 1 \\x_2 &\geq -x_1 - 1\end{aligned}$$

O gráfico de *i*), *ii*), *iii*) e *iv*) é o losango apresentado na Figura 3.1.

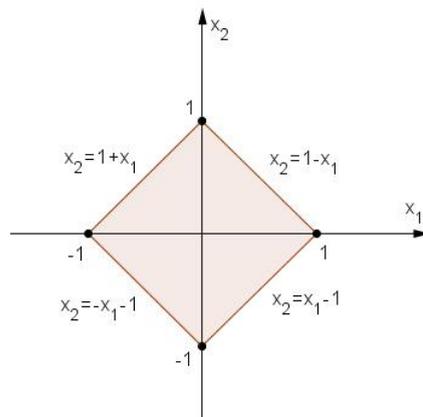


Figura 3.1: ℓ^1 - Representação geométrica

b) $\overline{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ na métrica ℓ^2 :

Se $x \in \overline{B}(0, 1)$, então $\ell^2(x, 0) \leq 1$. Isto é,

$$\begin{aligned}\ell^2((x_1, x_2), (0, 0)) &\leq 1 \\ \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} &\leq 1,\end{aligned}$$

elevando ao quadrado

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Temos o círculo de centro na origem e raio 1, (ver Figura 3.2).

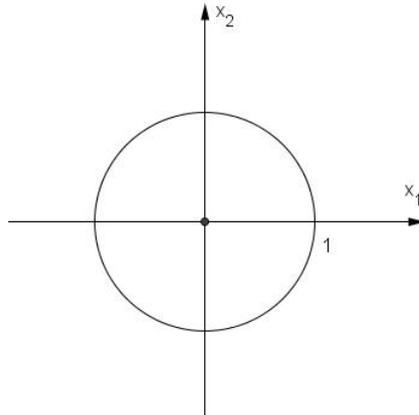


Figura 3.2: ℓ^2 - Representação geométrica

c) $\overline{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ na métrica ℓ^∞ :

Se $x \in \overline{B}(0, 1)$, então $\ell^\infty(x, 0) \leq 1$, ou

$$\ell^\infty((x_1, x_2), (0, 0)) \leq 1.$$

Logo,

$$\ell^\infty(x, 0) = \max \{|x_1 - 0|, |x_2 - 0|\} = \max \{|x_1|, |x_2|\} \leq 1.$$

Temos os seguintes casos:

i) $\max \{|x_1|, |x_2|\} = |x_1| \leq 1$, logo $-1 \leq x_1 \leq 1$.

Se $x_1 = 1$, então $-1 \leq x_2 \leq 1$.

Se $x_1 = -1$, então $-1 \leq x_2 \leq 1$.

ii) $\max \{|x_1|, |x_2|\} = |x_2| \leq 1$, logo $-1 \leq x_2 \leq 1$.

Se $x_2 = 1$, então $-1 \leq x_1 \leq 1$.

Se $x_2 = -1$, então $-1 \leq x_1 \leq 1$.

Logo, o gráfico de *i*) e *ii*) é um quadrado (ver Figura 3.3).

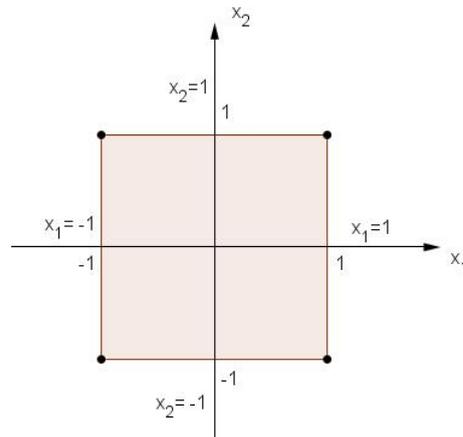


Figura 3.3: ℓ^∞ - Representação geométrica

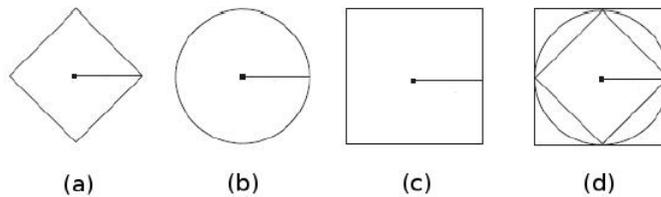


Figura 3.4: ℓ^1 , ℓ^2 , ℓ^∞ - Representação geométrica

Na Figura 3.4 são apresentadas representações simultâneas do gráfico de $\overline{B}(0, 1)$ nas métricas ℓ^1 , ℓ^2 e ℓ^∞ .

A Seguir demonstraremos que ℓ^1 , ℓ^2 e ℓ^∞ são métricas.

3.3.1 ℓ^1 , Distância de Manhattan

Possui este nome em alusão às ruas da ilha de Manhattan, que são em sua maioria quadriculadas. O problema questionado envolve qual o percurso a ser realizado por um carro (no caso citado pela primeira vez por Hermann Minkowski no século XIX [4-5]) entre dois pontos da cidade. Como o carro deve somente andar no asfalto das ruas, o problema é solucionado como se apresenta na Figura 3.5.

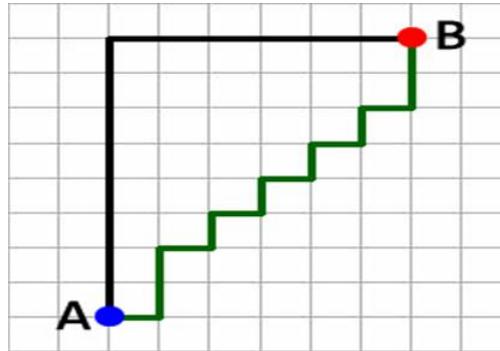


Figura 3.5: Distância de Manhattan [20]

Pela Figura 3.5 percebe-se que tanto distância de A para B em preto como a em verde são iguais, pois elas sobem 8 quadras e vão a direita 6 quadras, totalizando um percurso de 14 quadras.

Temos pela Equação 3.6,

$$\ell^1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

Propriedade 3.3.1. ℓ^1 é uma métrica em \mathbb{R}^n .

Demonstração. Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ temos:

(i) se $x = y$.

Assim, considere $x_i = y_i, \forall i = 1, \dots, m$. Isto é,

$$\ell(x, y) = |x_1 - x_1| + \cdots + |x_n - x_n|,$$

temos que,

$$|x_1 - x_1| = 0, \dots, |x_n - x_n| = 0.$$

Portanto,

$$\ell^1(x, y) = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

(ii) Se $x \neq y$.

Como $x \neq y$, isto é,

$$(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$$

assim, existe um $j \in \{1, \dots, m\}$, tal que $x_j \neq y_j$, logo $|x_j - y_j| \neq 0$, ou $|x_j - y_j| > 0$.

Logo da Equação 3.6 temos,

$$\ell^1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |x_i - y_i| \right) + |x_j - y_j| \neq 0$$

Portanto,

$$\ell^1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| > 0.$$

(iii) Verifiquemos que $\ell^1(x, y) = \ell^1(y, x)$.

Vejamos,

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + \dots + |x_m - y_m|,$$

temos,

$$|x_i - y_i| = |y_i - x_i|, \forall i = 1, \dots, m.$$

logo,

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|.$$

Portanto, $\ell^1(x, y) = \ell^1(y, x)$.

(iv) Verifiquemos que $\ell^1(x, y) \leq \ell^1(x, y) + \ell^1(y, z)$.

De fato, sabemos da desigualdade 2.4 que:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

temos:

$$|x_1 - z_1| + \dots + |x_m - z_m| \leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_m - y_m| + |y_1 - z_1| + \dots + |y_m - z_m|. \quad (3.10)$$

Pois,

$$|x_1 - z_1| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|,$$

$$|x_2 - z_2| = |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|,$$

⋮

$$|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|.$$

Somando as devidas parcelas obtemos 3.10.

Portanto,

$$\ell^1(x, z) \leq \ell^1(x, y) + \ell^1(y, z).$$

□

3.3.2 ℓ^2 , Distância Euclidiana

Esta distância é a mais comumente utilizada para cálculo de distância entre dois pontos em uma dimensão n , que pode ser provada pela aplicação repetida do teorema de Pitágoras. A sua representação bidimensional é apresentada na Figura 3.6.

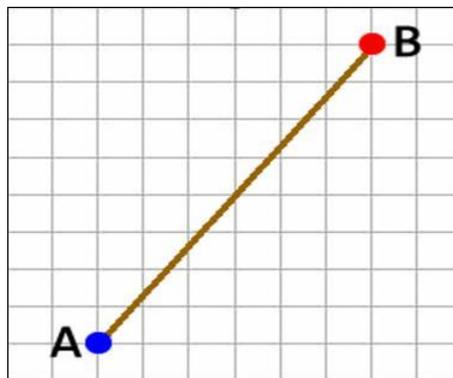


Figura 3.6: Distância Euclidiana [20]

Neste caso, a distância entre A e B (considerando a analogia do Teorema de Pitágoras) é igual a:

$$\ell^2(x, y) = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10.$$

A distância Euclidiana é dada pela equação 3.7.

Propriedade 3.3.2. ℓ^2 é uma métrica em \mathbb{R}^n .

Demonstração. De fato.

(i) Se $x = y$.

Isto é, para $x = y$, temos que a distância 3.7 fica da seguinte forma;

$$\ell^2(x, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2} = 0.$$

Sabemos que

$$(x - x)^2 = (0)^2 = 0$$

ou seja,

$$(x_i - x_i)^2 = (0)^2 = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$\ell^2(x, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (0)^2} = \sqrt{0} = 0.$$

Portanto,

$$\ell^2(x, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2} = 0.$$

(ii) se $x \neq y$.

Considere $x \neq y$, isto é,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (3.11)$$

ou seja, existe um $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que $x_j \neq y_j$, e portanto $|x_j - y_j|^2 \neq 0$.

Logo,

$$\ell^2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_i - y_i)^2\right) + (x_j - y_j)^2} \neq 0.$$

(iii) Verifiquemos que $\ell^2(x, y) = \ell^2(y, x)$.

Temos,

$$\ell^2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Sabemos que

$$(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2; \forall i = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$\ell^2(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2.$$

Portanto,

$$\ell^2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

Logo,

$$\ell^2(x, y) = \ell^2(y, x).$$

(iv) Verifiquemos que $\ell^2(x, z) \leq \ell^2(x, y) + \ell^2(y, z)$.

Devemos provar que vale a desigualdade 2.4 para esta distância, isto é

$$\ell^2(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}. \quad (3.12)$$

Sabemos,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 = (x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2,$$

temos que,

$$\begin{aligned} \ell^2(x, z) &= \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \cdots + (y_n - z_n)^2}. \end{aligned}$$

De fato, pelo Corolário 2.4.1 e usando as definições 2.3 e 2.4.1 no \mathbb{R}^n , temos:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \|(a_1, \dots, a_n)\| &= \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}. \end{aligned}$$

Neste sentido,

$$d(x, z) = \|x - z\|$$

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

$$d(y, z) = \|y - z\|$$

temos,

$$\|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

Vejamos,

$$\begin{aligned}\|(x - y) + (y - z)\|^2 &= \langle (x - y) + (y - z), (x - y) + (y - z) \rangle \\ &= \langle (x - y), (x - y) \rangle + \langle (x - y), (y - z) \rangle \\ &\quad + \langle (y - z), (x - y) \rangle + \langle (y - z), (y - z) \rangle \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2 \langle (x - y), (y - z) \rangle\end{aligned}$$

pela desigualdade 2.3 temos:

$$\begin{aligned}\|(x - y) + (y - z)\|^2 &\leq \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\|x - y\| \|y - z\| \\ &= (\|x - y\| + \|y - z\|)^2.\end{aligned}$$

Então

$$\|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

Assim, decorre

$$\|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto,

$$\ell^2(x, z) \leq \ell^2(x, y) + \ell^2(y, z)$$

□

3.3.3 ℓ^∞ , Distância de Chebyshev

Também conhecida como métrica máxima ou distância do tabuleiro de xadrez, é um cálculo de distância no qual considera o máximo valor da distância de uma dimensão. Por considerar o maior valor, ele suporta conjunto de dados multidimensionais, e por isso é conhecida como distância ℓ^∞ . Vejamos a Figura 3.7.

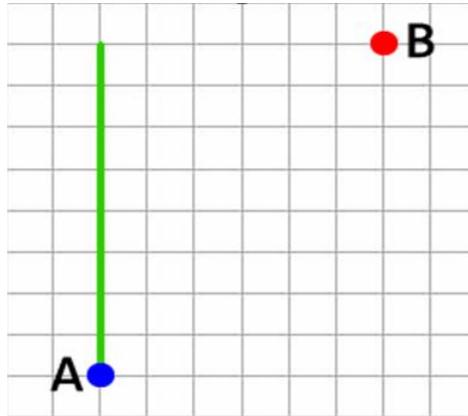


Figura 3.7: Distância de Chebyshev [20]

Tomando como exemplo a figura 3.6, a distância é:

$$\ell^\infty(x, y) = \max\{8, 6\} = 8,$$

sua representação equivale à linha verde da Figura 3.7.

No espaço euclidiano a distância de Chebyshev é dada pela Equação 3.8:

Propriedade 3.3.3. *A distância de Chebyshev é uma métrica em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. (i) se $x = y$.

Devemos mostrar que,

$$\ell^\infty(x, x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i| = 0.$$

Temos que:

$$|x_i - x_i| = |x_i \cdot (1 - 1)| = |x_i \cdot (0)| = |0|, \forall i = 1, \dots, n.$$

isto é,

$$|x_1 - x_1| = 0; \dots; |x_n - x_n| = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(x, x) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i| \\ &= \max\{|x_1 - x_1|, \dots, |x_n - x_n|\} \\ &= \max\{|0|, \dots, |0|\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\ell^\infty(x, x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - x_i|\} = 0.$$

(ii) se $x \neq y$

De fato, sabemos que $x_j \neq y_j$, isto é, $(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$. Logo, existe um $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que $x_j \neq y_j$, com $x_j - y_j \neq 0$, assim $|x_j - y_j| > 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \ell^\infty(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \\ &= \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \end{aligned}$$

assim,

$$\ell^\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} > 0;$$

Portanto, $\ell^\infty(x, y) > 0$.

(iii) Como $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, temos:

$$\ell^\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - x_i|\} = \ell^\infty(y, x)$$

Portanto,

$$\ell^\infty(x, y) = \ell^\infty(y, x).$$

(iv) Verifiquemos que $\ell^\infty(x, z) \leq \ell^\infty(x, y) + \ell^\infty(y, z)$.

Devemos provar que

$$d(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i| \quad (3.13)$$

sabemos que,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Assim verifica-se a desigualdade 3.13, pois $|x_i - z_i|$ é limitado por

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i| = \ell^\infty(x, y) + \ell^\infty(y, z).$$

Portanto,

$$\ell^\infty(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| \leq d(x, y) + d(y, z).$$

□

Para provar que em geral ℓ^p , $p \geq 1$, é uma métrica em \mathbb{R}^n , definamos primeiro o conceito de função convexa.

Definição 3.3.2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1.$$

O seguinte teorema caracteriza uma função convexa.

Teorema 3.3.1. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$. f é convexa se e somente se, $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [13] na p. 287, Teorema 11.

Por exemplo, a função exponencial $f(x) = \exp(x)$ é convexa, pois $f''(x) = \exp(x) \geq 0$.

Teorema 3.3.2. (Desigualdade de Young) Sejam $a, b > 0$ e $p, q > 1$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

então,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Se $a = b = 0$, a desigualdade se verifica.

Se $a, b > 0$, temos:

$$ab = \exp(\ln(ab)) = \exp(\ln a + \ln b) = \exp\left(\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)\right)$$

como a função exponencial é convexa, temos:

$$ab \leq \frac{1}{p} \exp(\ln a^p) + \frac{1}{q} \exp(\ln b^q),$$

logo

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Teorema 3.3.3. *Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de \mathbb{R}^n . Logo,*

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (3.14)$$

onde, $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Sejam $A = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ e $B = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$. Da desigualdade de Young, temos

$$\frac{|x_i \cdot y_i|}{AB} \leq \left(\frac{|x_i|}{A} \right) \left(\frac{|y_i|}{B} \right) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|x_i|}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|y_i|}{B} \right)^q$$

somando

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| &\leq \frac{1}{pA^p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{qB^q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q \\ &\leq \frac{1}{pA^p} A^p + \frac{1}{qB^q} B^q \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq AB$$

ou

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Proposição 3.3.1. *Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são elementos de \mathbb{R}^n , então:*

$$\left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.15)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p &= \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)(|x_i| + |y_i|)^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}, \end{aligned}$$

aplicando a desigualdade do Teorema 3.3.3, com p e $q = \frac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

fatorando temos

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Simplificando,

$$\left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1-(1-\frac{1}{p})} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Teorema 3.3.4. ℓ^p , $p \geq 1$ é uma métrica em \mathbb{R}^n .

Demonstração. A prova das propriedades *i)*, *ii)*, e *iii)* são similares à prova de ℓ^2 .

Vajamos que se verifica a propriedade *iv)*.

$$\begin{aligned}
\ell^p(x, z) &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

aplicando a Proposição 3.3.1, temos

$$\ell^p(x, z) \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

logo,

$$\ell^p(x, z) \leq \ell^p(x, y) + \ell^p(y, z).$$

Portanto ℓ^p é uma métrica em \mathbb{R}^n para qualquer $p \geq 1$. □

O seguinte exemplo mostra a relação entre as métricas ℓ^p em \mathbb{R}^n , com $p \geq 1$.

Considere $x, y \in \mathbb{R}^3$, assim temos que $x = (3, 2, 1)$, $y = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$, logo; para ℓ^1 ,

$$\begin{aligned} \ell^1(x, y) &= |3 - 1| + |2 - 2| + |1 - 3| \\ &= |2| + |0| + |-2| \\ &= 4; \end{aligned}$$

para ℓ^2 ,

$$\begin{aligned} \ell^2(x, y) &= \sqrt{|3 - 1|^2 + |2 - 2|^2 + |1 - 3|^2} \\ &= \sqrt{4 + 0 + 4} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2}; \end{aligned}$$

para ℓ^3 ,

$$\begin{aligned} \ell^3(x, y) &= \sqrt[3]{|3 - 1|^3 + |2 - 2|^3 + |1 - 3|^3} \\ &= \sqrt[3]{8 + 0 + 8} \\ &= \sqrt[3]{16} \\ &= 2\sqrt[3]{2}; \end{aligned}$$

para ℓ^4 ,

$$\begin{aligned} \ell^4(x, y) &= \sqrt[4]{|3 - 1|^4 + |2 - 2|^4 + |1 - 3|^4} \\ &= \sqrt[4]{16 + 0 + 16} \\ &= \sqrt[4]{32} \\ &= 2\sqrt[4]{2}; \end{aligned}$$

para ℓ^p , com p extremamente grande, temos,

$$\begin{aligned}\ell^p(x, y) &= \sqrt[p]{|3-1|^p + |2-2|^p + |1-3|^p} \\ &= \sqrt[p]{|2|^p + |0|^p + |-2|^p} \\ &= \sqrt[p]{2^{p+1}} \\ &= \sqrt[p]{2^p \cdot 2} \\ &= 2\sqrt[p]{2};\end{aligned}$$

com isto percebe-se que quanto maior for p , mais nos aproximaremos de 2, isto é,

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} \ell^p(x, y) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|3-1|^p + |2-2|^p + |1-3|^p} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|2|^p + |0|^p + |-2|^p},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} \ell^p(x, y) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{2^{p+1}} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} 2\sqrt[p]{2} \\ &= 2,\end{aligned}$$

o que é de fato verdade, pois,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{2} = \lim_{p \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{p}} = 1,$$

onde $\frac{1}{p}$ tende a 0, e como $2^0 = 1$, logo,

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} \ell^p(x, y) &= \lim_{p \rightarrow \infty} 2\sqrt[p]{2} \\ &= 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{2} \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Assim segue para ℓ^∞ ,

$$\begin{aligned}\ell^\infty(x, y) &= \max\{|3-1|, |2-2|, |1-3|\} \\ &= \max\{|2|, |0|, |-2|\} \\ &= 2.\end{aligned}$$

No exemplo verificou-se que:

$$\ell^\infty(x, y) \leq \dots \leq \ell^p(x, y) \leq \dots \leq \ell^4(x, y) \leq \ell^3(x, y) \leq \ell^2(x, y) \leq \ell^1(x, y). \quad (3.16)$$

A seguinte proposição mostra que 3.16 sempre é verificado para as métricas ℓ^p de Minkowski em \mathbb{R}^n .

Proposição 3.3.2. *Sejam ℓ^1 , ℓ^2 e ℓ^∞ as métricas já definidas. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$\ell^\infty(x, y) \leq \ell^2(x, y) \leq \ell^1(x, y) \leq n \cdot \ell^\infty(x, y). \quad (3.17)$$

Demonstração. De fato, note que,

$$[\ell^\infty(x, y)]^2 = (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|)^2 \leq (x_i - y_i)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2,$$

elevando a $\frac{1}{2}$ ambos os lados temos, $\ell^\infty(x, y) \leq \ell^2(x, y)$;

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \leq [|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|]^2$$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$$

assim temos, $\ell^2(x, y) \leq \ell^1(x, y)$.

Finalmente,

$$|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq \max |x_1 - y_1| + \dots + \max |x_n - y_n| \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

□

3.4 Espaço Vetorial Normado

Um espaço vetorial sobre \mathbb{R} é um conjunto e sobre o qual estão definidas duas leis de composição, uma interna

$$(u, v) \longmapsto u + v \text{ (adição)} \quad (3.18)$$

e uma externa, de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ em \mathbb{E} ,

$$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u \text{ (multiplicação por escalares)}, \quad (3.19)$$

para as quais se verificam as seguintes propriedades:

(1) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in \mathbb{E}$

(2) $u + v = v + u, \forall u, v \in \mathbb{E}$

(3) Existe $0 \in \mathbb{E}$ de modo que $0 + u = u, \forall u \in \mathbb{E}$

(4) Para todo $u \in \mathbb{E}$, existe $(-u) \in \mathbb{E}$ de maneira que $u + (-u) = 0$

ou seja, \mathbb{E} é um grupo abeliano em relação à adição e, ainda

(5) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in \mathbb{E}$

(6) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in \mathbb{E}$

(7) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in \mathbb{E}$

(8) $1u = u, \forall u \in \mathbb{E}$.

Os elementos de um espaço vetorial são genericamente chamados de vetores. Já definimos sobre \mathbb{R}^n a adição e a multiplicação por escalares (equações 3.3 e 3.4), assim obtemos o exemplo mais importante de espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Neste espaço $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ é o elemento neutro da adição e, dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos que o simétrico de $x = (x_1, \dots, x_n)$ é $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$.

Um espaço vetorial normado real é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} dotado de uma norma. Se \mathbb{E} é um espaço normado, então $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$d(u, v) = \|u - v\| \tag{3.20}$$

é uma métrica sobre \mathbb{E} pois,

- $d(u, v) = \|u - v\| = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v$
- $d(u, v) = \|u - v\| > 0$, o que verifica-se, pois uma norma é sempre positiva para $u \neq v$.
- $d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |-1| \|v - u\| = \|v - u\| = d(v, u)$
- $d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v)$

A métrica d assim obtida chama-se métrica induzida pela norma dada sobre \mathbb{E} .

Um exemplo importante de espaço vetorial normado é o \mathbb{R}^n juntamente com a norma dada por

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (3.21)$$

De fato, podemos demonstrar que valem as propriedades de espaço normado para este conjunto munido da norma $\|x\|$. Para (n1) basta considerar a lista $x = (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, assim temos,

$$\|x\| = \sqrt{0^2 + \dots + 0^2} = \sqrt{0 + \dots + 0} = \sqrt{0} = 0;$$

o que também facilmente verifica-se (n2), isto é, tomando um $\alpha \in \mathbb{R}$, temos,

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \dots + (\alpha x_n)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \dots + \alpha^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |\alpha| \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |\alpha| \|x\|, \end{aligned}$$

basta agora verificar (n3), para isto considere a lista $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, assim,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2 \\ &= (x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2) + \dots + (x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2) \\ &= (x_1^2 + \dots + x_n^2) + (2x_1y_1 + \dots + 2x_ny_n) + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \\ &= \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \quad (3.22) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

sendo que 3.22 verifica-se pela desigualdade 2.3, o que também, como visto anteriormente (Seção 3.3), \mathbb{R}^n é um espaço métrico.

3.5 Espaço Vetorial com Produto Interno

Se \mathbb{E} é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , um produto interno em \mathbb{E} é uma aplicação que associa a cada $(u, v) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ um número real, indicado $\langle u, v \rangle$ é chamado “ u escalar v ”, de modo que

p1 $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in \mathbb{E}$

p2 $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in \mathbb{E}$

p3 $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle, \forall u_1, u_2, v \in \mathbb{E}$

p4 $\langle u, u \rangle \geq 0$ sempre que $u \neq 0$.

Um espaço \mathbb{E} , dotado de um produto interno $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$, chama-se *espaço vetorial com produto interno*.

O que também é um espaço métrico, basta definir sua métrica como na Equação 3.20.

Se \mathbb{E} é um espaço vetorial com produto interno, então, dados $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ e $u, v, u_1, v_1 \in \mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle &= \langle \alpha u, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle + \langle \beta v, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle \\ &= \alpha \langle u, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle + \beta \langle v, \gamma u_1 + \delta v_1 \rangle \\ &= \alpha \langle \gamma u_1 + \delta v_1, u \rangle + \beta \langle \gamma u_1 + \delta v_1, v \rangle \\ &= \alpha \gamma \langle u, u_1 \rangle + \alpha \delta \langle u, v_1 \rangle + \beta \gamma \langle v, u_1 \rangle + \beta \delta \langle v, v_1 \rangle. \end{aligned}$$

Num espaço vetorial com produto interno define-se a norma de um vetor $u \in \mathbb{E}$ como na equação 2.2.

A função assim obtida obviamente satisfaz (n1) e (n2). Quanto a (n3) sua demonstração depende da desigualdade 2.3 num espaço com produto interno. Vejamos (n3).

Dado $u, v \in \mathbb{E}$, temos:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2 |\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Onde, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Assim acabamos de definir que todo espaço vetorial com produto interno é um espaço vetorial normado (a recíproca deste fato não vale).

3.6 Espaço de Funções Reais Limitadas

Dado um conjunto $\mathbb{X} \neq \emptyset$ uma função $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ se diz limitada se existir $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $|f(x)| < k$, para qualquer $x \in \mathbb{X}$. Indiquemos por $\beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas de \mathbb{X} em \mathbb{R} . Para quaisquer $f, g \in \beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, se definirmos $f + g$, αf e $\|f\|$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{X} \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{X} \\ \|f\| &= \sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{X}\}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Assim para que o conjunto $\beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ seja um espaço métrico, basta definir sua métrica da seguinte forma:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in \mathbb{X}\}.\tag{3.24}$$

Notemos de início que a norma 3.23 está bem definida visto que $\sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{X}\}$ existe pelo fato de que f é limitada. Além disso $\|f\| \in \mathbb{R}_+$ para qualquer $f \in \beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

Vamos agora verificar as propriedades de espaços métricos para a distância 3.24.

Propriedade 3.6.1. *A distância 3.24 é uma métrica.*

Demonstração. (i) Verifiquemos $d(f, g) = 0$ para $f = g$.

Temos que,

$$d(f, g) = 0 \Rightarrow \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in \mathbb{X}\} = 0.$$

Para

$$d(f, g) = 0,$$

temos que

$$|f(x) - g(x)|,$$

isto é,

$$f(x) - g(x) = 0,$$

pois,

$$f(x) = g(x).$$

(ii) Verifiquemos $d(f, g) > 0$ para $f \neq g$.

De fato, temos que

$$d(f, g) > 0,$$

isto é,

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in \mathbb{X}\} > 0.$$

Pois para,

$$f(x) \neq g(x),$$

temos que,

$$|f(x) - g(x)| > 0,$$

por definição de módulo.

Temos:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in \mathbb{X}\} > 0.$$

Portanto,

$$d(f, g) > 0 \text{ para } f \neq g$$

(iii) Verifiquemos $d(f, g) = d(g, f)$.

Temos,

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in \mathbb{X}\};$$

assim,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - g(x)| \cdot |-1| \\ &= |(f(x) - g(x))(-1)| \\ &= |g(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}d(f, g) &= \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= \sup\{|g(x) - f(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= d(g, f).\end{aligned}$$

Portanto;

$$d(f, g) = d(g, f).$$

(iv) Verifiquemos $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$

Considerem as funções, f, g e $h \in \beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$,

$$f(x) < h(x) < g(x),$$

vejamos a figura 3.8.

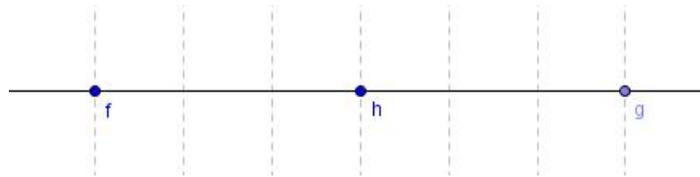


Figura 3.8: Ilustração

Logo,

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x)| &= |f(x) + h(x) - h(x) - g(x)| \\ &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.\end{aligned}\tag{3.25}$$

onde 3.25 temos pelo Corolário 2.4.1.

Assim com o Corolário 2.5.1 temos:

$$\begin{aligned}d(f, g) &= \sup\{|f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &\leq \sup\{|f(x) - h(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &\quad + \sup\{|h(x) - g(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= d(f, h) + d(h, g).\end{aligned}$$

Portanto,

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Logo $\beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ é um espaço métrico. □

Podemos afirmar que esta métrica é induzida pela norma do espaço em questão para quaisquer $f, g \in \beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

Para isto vamos verificar que também é um espaço normado, vejamos.

Temos para (n1),

$$\|f\| = 0 \iff |f(x)| = 0, \forall x \in \mathbb{X} \iff f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{X} \iff f = 0.$$

Para (n2) e (n3) utilizaremos o Corolário 2.5.1. Vejamos (n2),

$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= \sup\{|\alpha f(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= \sup\{|\alpha| |f(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= \sup(|\alpha| |f|) \\ &= |\alpha| \sup |f| \\ &= |\alpha| \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= |\alpha| \|f\|. \end{aligned}$$

Agora para (n3), considere $f, g \in \beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, então, para qualquer $x \in \mathbb{X}$:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup\{|f(x) + g(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= \sup\{|f(x)| + |g(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= \sup(|f| + |g|) \\ &\leq \sup |f| + \sup |g| \\ &= \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{X}\} + \sup\{|g(x)|; x \in \mathbb{X}\} \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Portanto, temos que $\beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial normado.

Afirma-se assim, que $\beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ é um espaço métrico, onde a métrica é induzida pela norma do espaço para quaisquer $f, g \in \beta(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

3.7 Espaço de funções contínuas definidas num intervalo fechado

Para um intervalo fechado $[a, b] \in \mathbb{R}$ indiquemos por $\sigma([a, b])$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em $[a, b]$. Como no exemplo anterior vamos mostrar que o conjunto $\sigma([a, b])$ é um espaço métrico, para isto basta definir a sua métrica da seguinte forma:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (3.26)$$

Propriedade 3.7.1. *A distância $d(f, g)$ define um espaço métrico.*

Demonstração. De fato:

(i) Verifiquemos que $d(f, g) = 0$ se $f = g$.

De fato,

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 0,$$

para isto considere, $f = g$, isto é,

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

então,

$$|f(x) - g(x)| = 0$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^b 0 dx \\ &= 0 \int_a^b dx \\ &= 0(b - a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $d(f, g) = 0$ com $f = g$.

(ii) Verifiquemos que $d(f, g) > 0$, se $f \neq g$.

Se $f \neq g$ com $f, g \in \sigma([a, b])$, então

$$\{f(x) \neq g(x) \mid x \in [a, b]\}$$

sobre um conjunto $A \subset [a, b]$ de intervalos.

Logo, $|f(x) - g(x)| > 0$ sobre A .

Integrando,

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx > \int_a^b 0 dx.$$

Portanto,

$$d(f, g) > 0, \forall f, g \in \sigma([a, b]).$$

(iii) Verifiquemos que $d(f, g) = d(g, f)$.

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx = d(g, f).$$

(iv) Verifiquemos que $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$

Como

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |(f(x) - h(x)) + (h(x) - g(x))| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

temos, ao integrar:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x) - h(x)| dx + \int_a^b |h(x) - g(x)| dx$$

isto é,

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

□

Com relação a adição de funções e à multiplicação de funções por um escalar (número real), definida naturalmente como no exemplo anterior, $\sigma[a, b]$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . E a função

$$f \mapsto \|f\| = \int_a^b |f(x)| dx \quad (3.27)$$

é uma norma sobre esse espaço uma vez que $\|f\| \in \mathbb{R}_+$, para qualquer $f \in \sigma([a, b])$, assim, vamos demonstrar que $\sigma([a, b])$ é um espaço vetorial normado.

De fato. Vejamos (n1);

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\iff |f(x)| = 0, \forall x \in [a, b] \text{ (pois } |f(x)| \text{ define uma função contínua)} \\ &\iff f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \\ &\iff f = 0, \end{aligned}$$

isto é, verifica-se assim a primeira condição para ser um espaço normado, vamos agora verificar (n2);

$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= \int_a^b |\alpha f(x)| dx \\ &= |\alpha| \int_a^b |f(x)| dx \\ &= |\alpha| \|f\|; \end{aligned}$$

basta agora verificar a desigualdade, a condição (n3)

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \int_a^b |(f + g)(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx \\ &= \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

isto é,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Portanto $\sigma[a, b]$ é um espaço normado.

3.8 Um subespaço de $\beta([a, b]; \mathbb{R})$

Sabemos que o conjunto $\beta([a, b]; \mathbb{R})$ das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas é um espaço vetorial normado é, portanto, um espaço métrico.

Como porém $\sigma([a, b])$ (conjunto das funções reais contínuas definidas num intervalo fechado $[a, b]$) é um subconjunto de $\beta([a, b]; \mathbb{R})$ visto que toda função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então $\sigma([a, b])$ também é um subespaço métrico em relação à métrica definida como na equação 3.24 com $\mathbb{X} = [a, b]$ para quaisquer $f, g \in \sigma([a, b])$, isto é,

$$d(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)|; x \in [a, b]\}.$$

3.9 Delta de Kronecker

Tomemos o conjunto de pontos $\mathbb{P} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Definamos sobre este conjunto a função $d : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij}, \tag{3.28}$$

onde δ_{ij} é o **Delta de Kronecker**, definido como $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$.

Propriedade 3.9.1. *A distância $d(x_i, x_j)$ é uma métrica.*

Demonstração. (i) Verifiquemos que $d(x, y) = 0$ se $x = y$.

Para $i = j$, temos

$$d(x_i, x_i) = 0;$$

pois,

$$d(x_i, x_i) = 1 - \delta_{ii} = 1 - 1 = 0.$$

(ii) Verifiquemos que $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$.

Se $i \neq j$, temos

$$d(x_i, x_j) > 0;$$

De fato, para $i \neq j$, temos

$$\delta_{ij} = 0,$$

assim

$$d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij} = 1 - 0 = 1.$$

Logo,

$$d(x_i, x_j) = 1 > 0.$$

(iii) Verifiquemos que $d(x, y) = d(y, x)$.

Com $i = j$, temos que,

$$d(x_i, x_j) = 0,$$

também que

$$d(x_j, x_i) = 0,$$

assim

$$d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i).$$

Com $i \neq j$, temos

$$d(x_i, x_j) = 1.$$

também que

$$d(x_j, x_i) = 1,$$

Portanto,

$$d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i).$$

(iv) Verifiquemos que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Temos:

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_z) + d(x_z, x_j).$$

De fato,

(a) $i = j$

(a.1) $i, j \neq z$

$$d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij} = 1 - 1 = 0$$

$$d(x_i, x_z) = 1 - \delta_{iz} = 1 - 0 = 1$$

$$d(x_z, x_j) = 1 - \delta_{zj} = 1 - 0 = 1$$

isto é, $0 \leq 1 + 1$.

(a.2) $i, j = z$

$$d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij} = 1 - 1 = 0$$

$$d(x_i, x_z) = 1 - \delta_{iz} = 1 - 1 = 0$$

$$d(x_z, x_j) = 1 - \delta_{zj} = 1 - 1 = 0.$$

isto é, $0 \leq 0 + 0$.

(b) $i \neq j$ e $j = z$ assim também $i \neq z$.

$$d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij} = 1 - 0 = 1$$

$$d(x_i, x_z) = 1 - \delta_{iz} = 1 - 0 = 1$$

$$d(x_z, x_j) = 1 - \delta_{zj} = 1 - 1 = 0.$$

isto é, $1 \leq 1 + 0$.

(c) $i \neq j$, $j \neq z$, $i \neq z$.

$$d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij} = 1 - 0 = 1$$

$$d(x_i, x_z) = 1 - \delta_{iz} = 1 - 0 = 1$$

$$d(x_z, x_j) = 1 - \delta_{zj} = 1 - 0 = 1.$$

isto é, $1 \leq 1 + 1$.

Portanto, verifica-se assim que \mathbb{P} é um Espaço Métrico. □

3.10 A Distância de Canberra

Trata-se de outra métrica de cálculo simples, no qual encontra a métrica pela diferença da dimensão pela soma das coordenadas. É muito interessante o seu uso quando os dados estão

próximos da origem, quando o conjunto possui diversas características e é comumente utilizada em taxonomia na área biológica. Assim temos:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|}. \quad (3.29)$$

Propriedade 3.10.1. *A distância $d(x, y)$ de Canberra é uma métrica.*

Demonstração. Considerem $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, segue que:

(i) Verifiquemos $d(x, y) = 0$ se $x = y$.

De fato, temos que $x = y$, isto é,

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n),$$

assim,

$$x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n,$$

logo temos que,

$$|x_1 - y_1| = 0, \dots, |x_n - y_n| = 0,$$

isto é,

$$|x_i - y_i| = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Sabemos também que para $x = y$, temos:

$$|x_1| + |y_1| = k_1 > 0$$

$$|x_2| + |y_2| = k_2 > 0$$

assim segue que,

$$|x_n| + |y_n| = k_n > 0,$$

assim a soma dos k_i com $i = 1, \dots, n$ é positiva, isto é,

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} = \frac{0}{k} = 0. \quad (3.30)$$

(ii) Verifiquemos $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$.

De fato, como $x \neq y$ temos,

$$(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n),$$

isto é, existe um $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j \neq y_j$, com $x_j - y_j \neq 0$, tem-se $|x_j - y_j| \neq 0$, o que também $|x_j - y_j| > 0$.

Logo,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \right) + \frac{|x_j - y_j|}{|x_j| + |y_j|} \neq 0, \quad (3.31)$$

pois,

$$\frac{|x_j - y_j|}{|x_j| + |y_j|} > 0. \quad (3.32)$$

Portanto,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} > 0. \quad (3.33)$$

(iii) Verifiquemos $d(x, y) = d(y, x)$.

De fato, temos que

$$|x_i - y_i| = |y_i - x_i|, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.34)$$

e ainda que,

$$|x_i| + |y_i| = |x_i| + |y_i|, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.35)$$

Logo, das igualdades 3.34 e 3.35, tem-se:

$$\frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} = \frac{|y_i - x_i|}{|y_i| + |x_i|}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.36)$$

Portanto,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} = \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - x_i|}{|y_i| + |x_i|} = d(y, x).$$

(iv) Verifiquemos $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Considerem $x, y, z > 0$;

(a) $x = y = z$

Não há muito o que fazer, pois realmente quando $x = y = z$, temos de imediato

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \quad (3.37)$$

pois pela equação 3.30 temos,

$$d(x, y) = 0, d(x, z) = 0, d(z, y) = 0.$$

(b) $x < z < y$

Temos,

$$\frac{|x - y|}{|x| + |y|} \leq \frac{|x - z|}{|x| + |z|} + \frac{|y - z|}{|y| + |z|}. \quad (3.38)$$

Considere,

$$f(x, y, z) = \frac{|x - z|}{|x + z|} + \frac{|y - z|}{|y + z|} - \frac{|x - y|}{|x + y|}, \quad (3.39)$$

logo,

$$f(x, y, z) = \frac{(z - x)}{(x + z)} + \frac{(y - z)}{(y + z)} - \frac{(y - x)}{(x + y)},$$

daí segue que:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{(z - x)(y + z) + (y - z)(x + z)}{(x + z)(y + z)} - \frac{(y - x)}{(x + y)} \\ &= \frac{zy + z^2 - xy - xz + yx + yz - zx - z^2}{(x + z)(y + z)} - \frac{(y - x)}{(x + y)} \\ &= \frac{-2xz + 2yz}{(x + z)(y + z)} - \frac{(y - x)}{(x + y)} \\ &= \frac{2z(y - x)}{(x + z)(y + z)} - \frac{(y - x)}{(x + y)} \\ &= (y - x) \left(\frac{2z}{(x + z)(y + z)} - \frac{1}{(x + y)} \right) \\ &= (y - x) \left(\frac{2zx + 2zy - xy - xz - zy - z^2}{(x + z)(y + z)(x + y)} \right) \\ &= (y - x) \left(\frac{xz + zy - xy - z^2}{(x + z)(y + z)(x + y)} \right), \end{aligned}$$

sabemos que,

$$(y - x) > 0, (x + z) > 0, (y + z) > 0 \text{ e } (x + y) > 0,$$

basta agora verificar se $xz + zy - xy - z^2 > 0$, temos;

$$\begin{aligned} xz + zy - xy - z^2 &= z(x - z) + y(z - x) \\ &= -z(z - x) + y(z - x) \\ &= (z - x)(y - z) > 0; \end{aligned}$$

pois, $(z - x) > 0$ e $(y - z) > 0$.

Logo, $f(x, y, z) > 0$, analogamente temos,

$$f(x_i, y_i, z_i) > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.40)$$

Portanto, vale a somatória

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|} - \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \right) \geq 0,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|} - \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|} - \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|} - \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \geq 0.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|}.$$

(c) $z < x < y$

Queremos mostrar que vale a desigualdade 3.38, para isto considere a equação 3.39, temos:

$$f(x, y, z) = \frac{(x - z)}{(x + z)} + \frac{(y - z)}{(y + z)} - \frac{(x - y)}{(x + y)},$$

daí segue que

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{(x - z)(y + z) + (y - z)(x + z)}{(x + z)(y + z)} - \frac{(y - x)}{(x + y)} \\ &= \frac{xy + xz - yz - z^2 + xy + yz - xz - z^2}{(x + z)(y + z)} - \frac{(y - x)}{(x + y)} \\ &= \frac{2xy - 2z^2}{(x + z)(y + z)} - \frac{(y - x)}{(x + y)} \\ &= \frac{(2xy - 2z^2)(x + y) - (xy + xz + yz + z^2)(y - x)}{(x + z)(y + z)(x + y)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

da 3.41 temos que

$$(x + z)(y + z)(x + y) > 0,$$

pois,

$$(x + z) > 0, (y + z) > 0 \text{ e } (x + y) > 0,$$

basta agora verificar que,

$$(2xy - 2z^2)(x + y) - (xy + xz + yz + z^2)(y - x) > 0.$$

Considere,

$$N = (2xy - 2z^2)(x + y) - (xy + xz + yz + z^2)(y - x),$$

temos:

$$\begin{aligned} N &= 2x^2y + 2xy^2 - 2xz^2 - 2yz^2 - xy^2 - xyz - y^2z - yz^2 + x^2y + x^2z + xyz + xz^2 \\ &= 3x^2y + xy^2 - xz^2 - 3yz^2 - y^2z + x^2z \\ &= 3y(x^2 - z^2) + y^2(x - z) + xz(x - z) > 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

A equação 3.42 é verificada pois como $x, y, z > 0$, temos:

$$(x^2 - z^2) > 0 \text{ e } (x - z) > 0$$

como também,

$$3y \text{ e } xz > 0.$$

Daí, $f(x, y, z) > 0$.

Logo, por 3.40 temos:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|} - \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \right) \geq 0,$$

segue que,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|} - \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \geq 0;$$

logo temos,

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|}$$

Portanto,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

(d) $x < y < z$

Analogamente aos itens anteriores, temos:

$$f(x, y, z) = \frac{(z-x)}{(x+z)} + \frac{(z-y)}{(y+z)} - \frac{(y-x)}{(x+y)}$$

daí segue;

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{(z-x)(y+z) + (z-y)(x+z)}{(x+z)(y+z)} - \frac{(y-x)}{(x+y)} \\ &= \frac{zy + z^2 - xy - xz + xz + z^2 - yx - yz}{(x+z)(y+z)} - \frac{(y-x)}{(x+y)} \\ &= \frac{(2z^2 - 2xy)}{(x+z)(y+z)} - \frac{(y-x)}{(x+y)} \\ &= \frac{(2z^2 - 2xy)(x+y) - (xy + xz + yz + z^2)(y-x)}{(x+z)(y+z)(x+y)}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

da 3.43 temos;

$$(x+z)(y+z)(x+y) > 0,$$

pois,

$$(x+z) > 0, (y+z) > 0, \text{ e } (x+y) > 0,$$

basta agora verificar,

$$(2z^2 - 2xy)(x+y) - (xy + xz + yz + z^2)(y-x) > 0$$

Considere,

$$N = (2z^2 - 2xy)(x+y) - (xy + xz + yz + z^2)(y-x),$$

temos,

$$\begin{aligned} N &= 2xz^2 + 2yz^2 - 2x^2y - 2xy^2 - xy^2 - xyz - y^2z - yz^2 + x^2y + x^2z + xyz + xz^2 \\ &= 3xz^2 + yz^2 - x^2y - 3xy^2 - y^2z + x^2z \\ &= 3x(z^2 - y^2) + yz(z-y) + x^2(z-y) \end{aligned} \quad (3.44)$$

A equação 3.44 é verificada, pois como $x, y, z > 0$, temos

$$(z^2 - y^2) > 0 \text{ e } (z-y) > 0$$

como também,

$$3x \text{ e } yz > 0.$$

Daí, $f(x, y, z) > 0$, o que de fato por 3.40 temos

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{|x_i| + |y_i|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - z_i|}{|x_i| + |z_i|} + \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - z_i|}{|y_i| + |z_i|}$$

Portanto,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

□

3.11 A Distância Bray-Curtis

A distância Bray-Curtis é também chamada distância Sorensen. Ela utiliza o método de normalização e é usualmente aplicada em botânica, ecologia e ciências ambientais, onde os valores das coordenadas são sempre não negativos.

Essa função de distância analisa o espaço como uma grade, de maneira similar à distância entre blocos de cidades (ℓ^1). Ela é definida como

$$d(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)}, \quad (3.45)$$

ou de maneira equivalente

$$d(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{\sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|}. \quad (3.46)$$

A função de distância Bray-Curtis possui a propriedade de que se todas coordenadas são positivas, seu valor está no intervalo de zero a um. Caso um par de coordenadas comparadas possuem valor zero, defini-se o valor para a distância.

A similaridade total ocorre quando $d(x, y) = 0$, e a dissimilaridade total ocorre quando $d(x, y) = n$.

A demonstração de que é uma métrica é similar a da distância de Canberra, visto anteriormente.

3.12 Métrica Divina

Teorema 3.12.1. (*Métrica Divina*) A aplicação,

$$\mathbb{K} : [0, 1[\times [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\mathbb{K}(x, y) = \min \{|x - y|, 1 - |x - y|\}$$

é uma métrica sobre $\mathbb{M} = [0, 1[$.

Demonstração. Segundo [19].

Temos de imediato as propriedades *i*) e *ii*). Vejamos.

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -1 < -y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x - y < 1 \Rightarrow |x - y| < 1.$$

Sendo assim mostramos que $\mathbb{K}(x, y) \geq 0$.

Agora suponhamos,

$$\mathbb{K}(x, y) = \min \{|x - y|, 1 - |x - y|\} = 0.$$

Já vimos que

$$|x - y| < 1,$$

isto é

$$1 - |x - y| > 0.$$

Então se $\mathbb{K}(x, y) = 0$, só pode ser porque $|x - y| = 0$, isto é, $x = y$.

Reciprocamente, se $x = y$, resulta,

$$\mathbb{K}(x, y) = \min \{|x - y|, 1 - |x - y|\} = \min \{|0|, 1 - |0|\} = 0.$$

Vejamos agora se verifica *iii*).

Temos

$$\mathbb{K}(x, y) = \min \{|x - y|, 1 - |x - y|\} = \min \{|y - x|, 1 - |y - x|\} = \mathbb{K}(y, x).$$

Basta verificar *iv*).

Devemos provar que

$$\mathbb{K}(x, y) \leq \mathbb{K}(x, z) + \mathbb{K}(z, y).$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \min \{|x - y|, 1 - |x - y|\} &\leq \min \{|x - z|, 1 - |x - z|\} \\ &+ \min \{|z - y|, 1 - |z - y|\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Vamos separar o nosso problema em oito possibilidades, conforme a figura abaixo:

$\mathbb{k}(x, y)$	$\mathbb{k}(x, z)$	$\mathbb{k}(z, y)$	
$ x - y $	$ x - z $	$ z - y $	(P1)
$1 - x - y $	$ x - z $	$ z - y $	(P2)
$ x - y $	$1 - x - z $	$ z - y $	(P3)
$1 - x - y $	$1 - x - z $	$ z - y $	(P4)
$ x - y $	$ x - z $	$1 - z - y $	(P5)
$1 - x - y $	$ x - z $	$1 - z - y $	(P6)
$ x - y $	$1 - x - z $	$1 - z - y $	(P7)
$1 - x - y $	$1 - x - z $	$1 - z - y $	(P8)

Figura 3.9: Possibilidades

Temos:

$$\begin{aligned} |x - y| \leq 1 - |x - y| &\Leftrightarrow |x - y| \leq \frac{1}{2} \\ 1 - |x - y| \leq |x - y| &\Leftrightarrow |x - y| \geq \frac{1}{2} \\ \hline |x - z| \leq 1 - |x - z| &\Leftrightarrow |x - z| \leq \frac{1}{2} \\ 1 - |x - z| \leq |x - z| &\Leftrightarrow |x - z| \geq \frac{1}{2} \\ \hline |z - y| \leq 1 - |z - y| &\Leftrightarrow |z - y| \leq \frac{1}{2} \\ 1 - |z - y| \leq |z - y| &\Leftrightarrow |z - y| \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Figura 3.10: Resultante

Então:

(P1) Neste caso a desigualdade 3.47 reduz-se a

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

a qual é trivialmente satisfeita por tratar-se da desigualdade triangular para números reais.

(P2) Neste caso a desigualdade 3.47 reduz-se a

$$1 - |x - y| \leq |x - z| + |z - x|.$$

Vamos mostrar a desigualdade equivalente

$$|x - y| + |x - z| + |z - y| \geq 1 \tag{3.48}$$

Observe que na possibilidade (P2) se verifica $|x - y| \geq \frac{1}{2}$ (*).

Inicialmente vamos mostrar que podemos ter

$$|x - z| + |z - y| < \frac{1}{2}$$

De fato, se isto fosse possível teremos (utilizando a desigualdade 2.4)

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \frac{1}{2}$$

contradizendo (*). Sendo assim só pode ser

$$|x - z| + |z - y| \leq \frac{1}{2}$$

o que, juntamente com (*), nos fornece a desigualdade 3.48.

(P3) Neste caso a desigualdade 3.47 reduz-se a

$$|x - z| \leq 1 - |x - z| + |z - y|$$

Vamos mostrar a desigualdade equivalente

$$|x - z| + |x - z| - |z - x| \leq 1 \tag{3.49}$$

Pois bem, pela desigualdade 2.4 podemos escrever

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \Leftrightarrow |x - z| - |z - y| \leq |x - y|$$

somando $|x - y|$ a ambos os membros desta última desigualdade, obtemos

$$|x - y| + |x - z| - |z - y| \leq |x - y| + |x - y| \Leftrightarrow |x - y| + |x - z| - |z - y| \leq 2|x - y| \leq 1.$$

Na última desigualdade usamos o fato de que na possibilidade **(P3)** se verifica $|x - y| \leq \frac{1}{2}$.

(P4) Neste caso a desigualdade 3.47 reduz-se a

$$1 - |x - y| \leq 1 - |x - z| + |z - y|.$$

Esta desigualdade é equivalente à seguinte

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

a qual é sempre verdadeira por tratar-se da desigualdade triangular para números reais.

(P5) Neste caso a desigualdade 3.47 reduz-se a

$$|x - y| \leq |x - z| + 1 - |z - y|$$

Vamos mostrar a desigualdade equivalente

$$|x - y| + |z - y| - |x - z| \leq 1 \tag{3.50}$$

Pois bem, pela desigualdade triangular podemos escrever

$$|z - y| \leq |z - x| + |x - y| \Leftrightarrow |z - y| - |x - z| \leq |x - y|$$

somando $|x - y|$ a ambos os membros desta última desigualdade, obtemos

$$|x - y| + |z - y| - |x - z| \leq |x - y| + |x - y| \Leftrightarrow |x - y| + |z - y| - |x - z| \leq 2|x - y| \leq 1.$$

Na última desigualdade usamos o fato de que na possibilidade **(P5)** se verifica $|x - y| \leq \frac{1}{2}$.

(P6) Neste caso a desigualdade 3.47 reduz-se a

$$1 - |x - y| \leq |x - z| + 1 - |z - y|$$

Esta desigualdade é equivalente à seguinte

$$|z - y| \leq |z - x| + |x - y|$$

a qual é sempre verdadeira por tratar-se da desigualdade triangular para números reais.

(P7) Neste caso a desigualdade 3.47 reduz-se a

$$|x - y| \leq 1 - |x - z| + 1 - |z - y|$$

Vamos mostrar a desigualdade equivalente

$$|x - y| + |x - z| + |z - y| \leq 2 \quad (3.51)$$

Na possibilidade (P7) se verifica:

(i) $|x - y| \leq \frac{1}{2}$

(ii) $|x - z| \geq \frac{1}{2}$

(iii) $|z - y| \geq \frac{1}{2}$.

Se dividirmos o intervalo $[0, 1[$ ao meio; por (ii) vemos que x e z não podem figurar na mesma metade do intervalo. Por (iii) acontece o mesmo com respeito a z e y . Devemos ter a seguinte configuração:

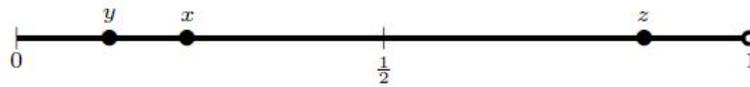


Figura 3.11: Configuração

A partir de 3.51 podemos escrever

$$f(x, y, z) = |x - y| + |x - z| + |z - y|.$$

Vamos mostrar que o maior valor que esta função pode assumir não excede 2. Tendo em conta a Figura 3.11 temos que,

$$|x - y| = x - y, \quad |x - z| = z - x, \quad |z - y| = z - y$$

Não faz mal supor x à direita de y . Logo, $f(x, y, z) = 2(z - y)$, então,

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq z - y < 1 \Rightarrow 0 \leq 2(z - y) < 2. \quad (3.52)$$

Daqui inferimos que

$$f(x, y, z) = |x - y| + |x - z| + |z - y| = 2(z - y) < 2,$$

donde concluimos que a desigualdade 3.51 será sempre verdadeira.

(P8) Neste caso a desigualdade 3.47 reduz-se a

$$1 - |x - y| \leq 1 - |x - z| + 1 - |z - y| \quad (3.53)$$

Esta alternativa (possibilidade) só pode ocorrer se simultaneamente,

- (i) $|x - y| \geq \frac{1}{2}$
- (ii) $|x - z| \geq \frac{1}{2}$
- (iii) $|z - y| \geq \frac{1}{2}$.

Vamos mostrar que, dados três pontos x , y , e z arbitrários, estas três possibilidades jamais ocorrem simultaneamente e, por conseguinte, a possibilidade 3.53 não pode ocorrer (pode ser ignorada, descartada).

Com efeito, dados três pontos x , y , e z arbitrários existem as seguintes possibilidades:

- (a) $x = y = z$
- (b) $x = y \neq z$
- (c) $x = z \neq y$
- (d) $y = z \neq x$
- (e) $x \neq y \neq z$.

As possibilidades (a) e (b) contradizem (i), a possibilidade (d) contradiz (iii). Portanto, só nos resta considerar a possibilidade (e), em que os três pontos são distintos. Ora, como é impossível situarmos (ou escolhermos) três pontos distintos, no intervalo $[0, 1[$, satisfazendo (i), (ii) e (iii) simultaneamente segue que 3.53 jamais ocorre.

□

Capítulo 4

Pesquisas de interesse nos Espaços Métricos

4.1 Considerações Iniciais

Dados complexos, tais como imagens, vídeos, séries temporais e outros, trazem uma demanda inerente por recursos de recuperação de dados que os Sistemas de Gerenciamento de Bancos de Dados (SGBDs) tradicionalmente não provêm. Isto se deve, principalmente, ao fato de que a maioria dos domínios de dados complexos não definem uma relação de ordem total entre elementos. Assim, os operadores de comparação relacionais (“<”, “≤”, “>” e “≥”) não podem ser usados e os operadores “=” e “≠” são praticamente inúteis. Para dados complexos é mais natural realizar **consultas por similaridade**, definindo relações de similaridade entre pares de elementos, que consideram as características particulares de cada domínio de aplicação. Estas consultas retornam os elementos do conjunto de dados que atendem a certos critérios de similaridade em relação a um ou mais elementos de referência, também chamados elementos de consulta.

A maioria das alternativas desenvolvidas incluir suporte à consultas por similaridade em SGBDs são fracamente acopladas ao motor dos gerenciadores, o que limita o aproveitamento dos recursos oferecidos nativamente pelos SGBDs. Uma alternativa mais eficiente consiste em embutir as funcionalidades necessárias à recuperação por similaridade em um subsistema especializado acessível ao processador de consultas do SGBD. Este subsistema especializado capacita o SGBD a executar consultas por similaridade integradas às demais operações fornecidas. Outra alternativa consiste em estender a linguagem SQL para incluir operações por similaridade e implementar mecanismos que suportem as extensões propostas.

4.2 Avaliação de Similaridade

A avaliação de similaridade compreende uma sequência de tarefas computacionais que resultam em um valor que quantifica o quão similares dois dados complexos são. Dados complexos em geral podem ser modelados por meio de conjuntos de atributos que sumarizam o seu conteúdo. Esses conjuntos de atributos são denominados na literatura como **vetores de características**. A similaridade entre dois vetores de características é calculada por meio de uma função matemática. Em geral, a avaliação de similaridade utiliza **funções de distância**, que calculam a dissimilaridade entre dois vetores de características. Ou seja, quanto menor a distância, maior a similaridade entre os objetos comparados, sendo que uma distância igual a zero significa identidade ou total similaridade. Existe uma grande variedade de distâncias relacionadas na literatura [9], sendo que as mais utilizadas são as funções da família Minkowski (ℓ^p).

Há autores que defendem a ideia de que a mente humana define um espaço de similaridade, onde os conceitos são organizados segundo suas relações de similaridade [4]. Seguindo esta ideia, cada par $(S; d)$, onde S é um domínio definido por um vetor de características e d é uma função de distância definida sobre este domínio, é definido como uma instância do espaço de similaridade e o conjunto de todas **instâncias de espaço de similaridade** possíveis formam uma **abstração do espaço de similaridade** humano [15]. Nesta abstração do espaço de similaridade, a captura da interpretação humana é modelada pela escolha de uma instância do espaço de similaridade que defina da maneira mais próxima possível à interpretação do usuário. Esta “instância ideal” é referenciada na literatura como espaço (de similaridade) semântico [22]. Uma instância do espaço de similaridade é formada por um domínio definido por um vetor de características (após todos os procedimentos de pré-processamento, extração e pós-processamento) e uma função de distância (definida pela função de cálculo e por todos os valores de parâmetros utilizados). Portanto, qualquer modificação realizada em um destes componentes gera uma nova instância do espaço de similaridade.

A **extração de características** é o passo elementar de processamento de dados complexos e multimídia para definir o componente vetor de características, pois para muitos desses tipos de dados, a sua representação original é limitada para descrever o seu conteúdo. Por exemplo, imagens são normalmente representadas por seus padrões de cor, textura e forma, cujas características podem ser extraídas da imagem como um todo (escopo global) ou de regiões

segmentadas da imagem (escopo local) [18]. O processo de **seleção de características** consiste em obter um subconjunto do vetor de características original, incluindo as características que são relevantes para discriminar os objetos. Em geral, os métodos de seleção de características são fortemente baseados em estatística e em algoritmos de aprendizado de máquina [7].

A **transformação de características** tem por objetivo criar novas dimensões no espaço de características, combinando e transformando as dimensões definidas pelas características originais. Os métodos de transformação mais utilizados são a análise de componentes principais (Principal Component Analysis - PCA) e a análise discriminante linear (Linear Discriminant Analysis - LDA) [10]. Todas essas tarefas constroem ou modificam o vetor de características, definindo o domínio do conjunto de dados. De forma semelhante, a função de distância pode ser modificada aplicando-se técnicas de ponderação, visando produzir instâncias do espaço de similaridade que sejam mais próximas da expectativa do usuário. A **ponderação de características** atribui um peso específico para cada dimensão do vetor de características, para destacar ou reduzir a influência de cada uma delas de forma a aprimorar a qualidade da avaliação de similaridade [12]. A **ponderação de distâncias parciais** é aplicada quando um dado complexo é representado por vários vetores de características distintos e a avaliação de dissimilaridade agrega as dissimilaridades parciais entre pares de vetores de características em uma dissimilaridade global, visando encontrar pesos para as distâncias parciais de forma que nenhuma delas seja subestimada ou superestimada na avaliação global de similaridade [17].

4.3 Consultas por Similaridade

Os SGBDs oferecem recursos eficazes para realizar buscas sobre os dados usando relações de igualdade e de ordem total existentes nos dados armazenados (tais como números e textos curtos). Porém, para dados multimídia e outros dados complexos, as buscas por igualdade ou por ordem não se aplicam, ou simplesmente, são de pouca serventia. Para esses tipos de dados é mais relevante fazer uso de **consultas por similaridade**, que consistem em procurar por elementos em um conjunto que, segundo algum critério de similaridade, sejam mais “parecidos” ou mais “distintos” com/de um determinado elemento. Existem dois tipos básicos de consultas por similaridade: a consulta por abrangência e a consulta aos k-vizinhos mais próximos [3], definidas a seguir.

4.3.1 Consulta por Abrangência

As consultas por abrangência (*Range Query*) consiste na busca de objetos que sejam similares a um dado objeto de referência em até um determinado grau. Isto é, dado um conjunto de objetos $\mathbb{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$, pertencentes ao domínio \mathbb{D} , uma função de distância d , um objeto de consulta s_q e uma distância máxima r_q , o resultado de uma busca por abrangência é tal como descrito na Equação 4.1.

$$\text{Range}(s_q, r_q, d, \mathbb{S}) = A = \{a | a \in \mathbb{S}, d(s_q, a) \leq r_q\} \quad (4.1)$$

A Figura 4.1, apresenta uma consulta por abrangência utilizando três medidas de similaridade: ℓ^1 , ℓ^2 e ℓ^∞ (vistas no Capítulo 3.3), com distância máxima r_q em um espaço bidimensional.

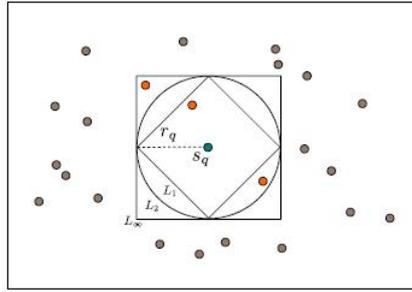


Figura 4.1: Consulta por abrangência com três medidas de similaridade diferentes (ℓ^1 , ℓ^2 e ℓ^∞)

4.3.2 Consulta aos k Vizinhos Mais Próximos

As consultas aos k Vizinhos Mais Próximos - Nearest Neighbor ou NN - (kNN) consistem em retornar os k objetos mais similares, ou mais próximos ao objeto de referência. Formalmente, seja \mathbb{D} um domínio, então dado um conjunto de objetos $\mathbb{S} = \{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathbb{D}$ e uma função de distância d , uma consulta kNN sobre um objeto referência s_q tal que $s_q \in \mathbb{S}$ deve encontrar e retornar os k objetos de \mathbb{S} com menor distância $d(s_q, s_i)$, onde $s_i \in \mathbb{S}$. O conjunto resultante de uma consulta kNN pode ser denotado pela Equação 4.2 [25].

$$kNN(s_q, k, d, \mathbb{S}) = \{\mathbb{T} \subseteq \mathbb{S}, |\mathbb{T}| = k \wedge \forall s_i \in \mathbb{S} - \mathbb{T} : d(s_q, s_i) \leq d(s_q, s_j)\} \quad (4.2)$$

A Figura 4.2 ilustra uma consulta pelos k vizinhos mais próximos a um objeto s_q em um espaço bidimensional, onde $k = 3$.

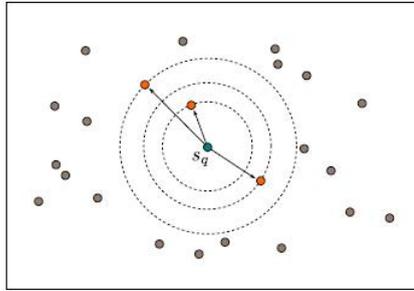


Figura 4.2: Consulta pelos três vizinhos mais próximos ao objeto s_q utilizando a função de distância euclidiana ℓ^2 .

4.4 A utilização de Espaços Métricos

Quando os objetos do domínio considerado são vetores de coordenadas numéricas definidas em um espaço m -dimensional e a função de distância é métrica, tem-se um caso particular do espaço métrico denominado espaço vetorial normado, como visto anteriormente (Seção 3.4). Portanto, pode-se dizer que espaços métricos englobam espaços vetoriais quando a função de distância é métrica, sendo este o nosso caso.

O conceito de espaço métrico é bastante útil, podendo ser usado em bancos de dados complexos para indexação e para análise visual de dados. Um banco de dados pode se beneficiar do mapeamento de dados complexos de duas maneiras:

- um espaço métrico permite que dados adimensionais ou multidimensionais sejam indexados por Métodos de Acesso Métricos (MAMs) respondendo a consultas por similaridade [21];
- dados convencionais possuem relação de ordem, assim, eles podem ser representados visualmente. Da maneira, dados adimensionais podem ter uma representação visual baseada em um espaço multidimensional de características, e respectivas distâncias entre si.

4.4.1 Métodos de Acesso Métrico

Dados complexos não permitem a utilização de estruturas de indexação convencionais. Isso se deve ao fato de que imagens são dados de alta dimensionalidade e não possuem relação de ordem total. Definir um espaço métrico sobre o domínio de dados faz com que esses dados adquiram propriedades algébricas, permitindo assim a indexação através de uma estrutura

apropriada. Essas estruturas, baseadas no espaço métrico e suas propriedades são denominados Métodos de Acesso Métrico – MAM (*Metric Access Method*) [5]. A utilização de MAM requer que seja definido um espaço métrico, relacionando os objetos apenas por suas relações de similaridade.

Em um MAM, os objetos são dispostos considerando-se uma relação de semelhança entre estes, permitindo assim que sejam realizadas consultas por similaridade. A fim de minimizar o número de comparações durante consultas, essas estruturas são, na maioria dos casos, implementadas utilizando árvores [6], permitindo o armazenamento de páginas em disco. A implementação utilizando árvores inicialmente escolhe alguns objetos e os utiliza para determinar a posição dos outros objetos, fazendo a indexação do conjunto de dados.

Na literatura é possível encontrar duas abordagens para MAM em árvores. As primeiras propostas são estáticas, necessitando previamente de todos os dados do conjunto para a indexação. As propostas estáticas não são de grande interesse para SGBDs, uma vez que não permitem a inserção e remoção de elementos posteriormente a indexação. Existem também as abordagens dinâmicas, que permitem a inserção e remoção de dados posterior à indexação.

As principais propostas para a abordagem dinâmica podem se encontradas em [9] com a *M-Tree* e em [22] com *Slim-Tree*. A *M-Tree* foi a primeira proposta a implementar uma estrutura dinâmica, onde pode-se inserir e remover elementos em qualquer momento na estrutura da árvore. A *Slim-Tree* é considerada uma evolução, por tratar de maneira mais aperfeiçoada a inserção de objetos e a manutenção da árvore, e por medir o grau de sobreposição entre subárvores e ainda minimizar essas sobreposições.

4.5 A análise de similaridade métrica em dados complexos

Como visto, sabe-se que precisamos ao analisarmos figuras por consultas de similaridade, de um conjunto de dados que contém objetos ao qual deseja-se de uma certa forma analisar de maneira a encontrar os objetos com um grau de semelhança bastante alto, ou o objeto mais distinto, de certa forma, queremos dizer que não pode ser descartada a possibilidade de não encontrarmos a figura, ou objeto desejado de forma idêntica a figura base, ou o que podemos também chamar de figura de referência, isto é podemos obter resultados com características semelhantes, porém sendo um objeto distinto ao referencial. Vejamos assim alguns casos em que não se foi possível adquirir resultados exatos mas sim semelhantes:



Figura 4.3: Inferência de função a partir de similaridade

O que nem sempre dar muito certo. Vejamos a figura 4.4.



Figura 4.4: Erro

Podemos encontrar várias utilizações de tecnologias que dependem de tais procedimentos, como por exemplo a Biometria, que é muito útil em vários setores da sociedade mundial, como na utilização de impressões digitais, reconhecimento de voz, geometria da mão, reconhecimento da face, leitura de Íris/Retina e assim por diante.

4.5.1 Autenticação Biométrica

O mecanismo de autenticação por biometria tem dois modos: registro e verificação. Para o uso inicial da biometria, cada usuário deve ser registrado pelo administrador do sistema. Este, verifica se cada indivíduo registrado é um usuário autorizado. O processo de registro consiste no armazenamento de uma característica biológica do indivíduo (física ou comportamental) para ser usada, posteriormente, na verificação da identidade do usuário.

Uma vez que o usuário está registrado, os dispositivos biométricos são usados na verificação da identidade do usuário. Quando o usuário necessitar ser autenticado, sua característica física é capturada pelo sensor. A informação analógica do sensor é então convertida para sua representação digital. A seguir, esta representação digital é comparada com o modelo biométrico armazenado. A representação digital usada na verificação é chamada de amostra (live scan). A amostra, tipicamente, não confere exatamente com o modelo armazenado. Como geralmente há alguma variação na medida, estes sistemas não podem exigir uma comparação exata entre o modelo original armazenado e a amostra corrente. Ao invés disso, a amostra corrente é considerada válida se estiver dentro de um certo intervalo estatístico de valores.

A autenticação por biometria pode ser realizada através da identificação ou da verificação de usuários. Muitos dispositivos usam a verificação, mas alguns usam a identificação.

A identificação biométrica é um processo um-para-muitos, onde uma amostra é submetida ao sistema, que a compara com todos os modelos de base de dados, a fim de verificar se esta coincide com qualquer um dos modelos e, em caso positivo, determina a identidade do usuário a quem aquele modelo pertence.

A verificação biométrica é um processo um-para-um, onde o sistema verifica a identidade de um usuário comparando a amostra com um modelo específico. Através de uma identificação fornecida, o sistema localiza o modelo desejado e o compara com a amostra apresentada. Se houver coincidência entre a amostra e o modelo armazenado, o sistema confirma que o usuário realmente possui a identidade afirmada. Por exemplo, um usuário irá digitar o seu nome e então se adquire uma amostra para a verificação. O algoritmo de comparação usará apenas o modelo armazenado àquele nome. Verificações biométricas são, tipicamente, mais rápidas do que a identificação porque elas não precisam comparar a amostra com todo o banco de dados de modelos.

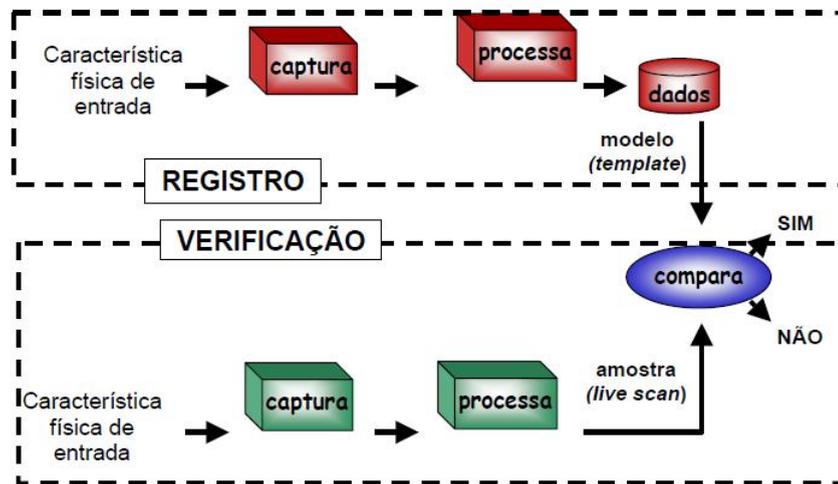


Figura 4.5: Modelo de Autenticação Biométrica

4.5.2 Métodos de Autenticação biométricos

Como os sistemas biométricos se baseiam em características intrínsecas do ser humano, podem ser empregados como métodos de autenticação rápida e com alto nível de precisão. Têm, como uma de suas principais vantagens, o fato de ser intransferível, não poder ser perdido e nem roubado.

Na escolha de um sistema de autenticação biométrico, o desempenho deve ser levado em conta. Este pode ser categorizado por duas medidas: a taxa de falsa aceitação (FAR - False Acceptance Rate) e a taxa de falsa rejeição (FRR - False Rejection Rate). A FAR representa a percentagem de usuários não-autorizados que são incorretamente identificados como usuários válidos e a FRR, representa a percentagem de usuários autorizados que são incorretamente rejeitados.

Impressões Digitais

Na verificação de uma impressão, muitos sistemas analisam a posição de detalhes chamados de minutiae, tais como terminações e bifurcações dos sulcos. Sistemas modernos também verificam outras características para identificação única, tais como arcos e voltas que aparecem no dedo.

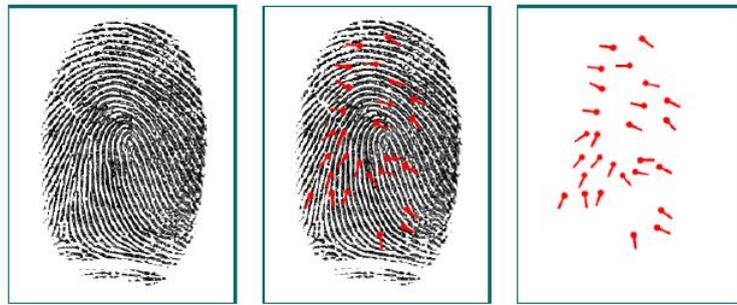


Figura 4.6: Minutiae - posições de detalhes

Nos dispositivos de impressão digital, o leitor deve minimizar a rotação da imagem. Ele deve compensar uma ligeira variação na imagem armazenada. Existem, também, problemas quando o usuário tem pequenos ferimentos no dedo, sujeira ou ressecamento da pele. Uma frequente limpeza pode reduzir a percentagem de falsas rejeições.

Existem três tipos de leitores de digitais:

- Ópticos: O dedo é colocado sobre uma plataforma de vidro e uma imagem do dedo é capturada. Estes dispositivos tornaram-se pequenos e baratos;
- Ultra-som: O dedo é colocado sobre uma plataforma de vidro e uma varredura de ultra-som é efetuada;
- Baseados em chip: O usuário coloca seu dedo direto em um chip de silício.

Sistemas de identificação de digitais utilizam somente os leitores ópticos. Sistemas de verificação (executam verificação um-para-um) utilizam todos os três.

Na Figura 4.7 mostrada abaixo, veremos alguns dispositivos de leitura usados para a captura das impressões digitais:

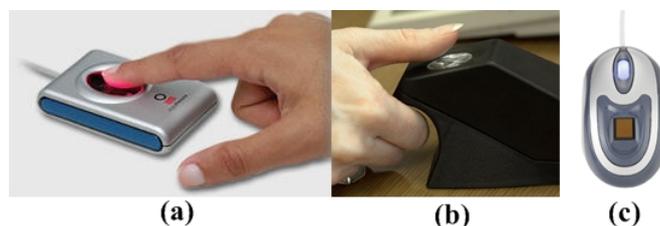


Figura 4.7: (a) Leitor USB, (b) Escâner, (c) Biomouse.

Reconhecimento de Voz

Para analisar o som produzido pelas cordas vocais, a biometria considera a frequência e o tamanho das ondas sonoras, que por si só já garantem uma probabilidade de 80% de acerto. O restante é verificado com a análise de timbre e entonação. Nos sistemas mais sofisticados, é pedido ao usuário que grave algumas respostas a perguntas específicas, como por exemplo quantas cores formam o arco-íris, ou mesmo questões de cunho pessoal. Para garantir uma identificação segura, o software faz uma dessas perguntas de forma aleatória e consegue analisar inclusive o tempo que o usuário gasta para respondê-la.

A tecnologia de reconhecimento de voz é fácil de usar e não requer grandes esforços na educação do usuário. Entretanto, deve-se cuidar para garantir que o usuário fale em um tempo apropriado e em voz clara.

Uma vez que as pessoas formam seus padrões de fala através da combinação de fatores físicos e comportamentais, a imitação é impossível. Entretanto, existem problemas com as condições do ambiente onde se encontram os sensores, uma vez que é difícil filtrar o ruído de fundo. Outros problemas incluem a variação da voz devido às condições físicas do usuário, como gripes e resfriados, estados emocionais, como o estresse, e duplicação através de um gravador. A imitação, porém, não é um problema como se poderia pensar, porque os aspectos da voz medida pelos sistemas não são os mesmos que os seres humanos costumam perceber.

Geometria da Mão

A geometria da mão tem sido usada em aplicações desde o começo de 1970. Ela baseia-se no fato de que virtualmente não existem duas pessoas com mãos idênticas e de que o formato da mão não sofre mudanças significativas após certa idade. Existem diversas vantagens no uso da forma tridimensional da mão da pessoa como um dispositivo de identificação. Primeiramente, é razoavelmente rápida. Leva menos que 2 segundos para capturar a imagem de uma mão e produzir a análise resultante. Secundariamente, requer pouco espaço de armazenamento. É também requerido pouco esforço ou atenção do usuário durante a verificação, e os usuários autorizados são raramente rejeitados.

As dimensões da mão, tal como tamanho do dedo, largura e área são as principais características usadas nas análises. Para a captura, o usuário posiciona sua mão no leitor, alinhando os dedos, e uma câmara posicionada acima da mão captura a imagem. Medidas tridimensionais de

pontos selecionados são tomadas e o sistema extrai destas medidas um identificador matemático único na criação do modelo. Um típico modelo requer cerca de nove bytes de armazenamento.

Um dos problemas de sistemas que utilizam a geometria da mão é causado pela rotação da mão quando colocada no leitor. Isto se resolve usando pinos de posicionamento dos dedos. O sistema também deve levar em conta os diferentes tamanhos das mãos em diferentes usuários, e seu desempenho não deve ser prejudicado por sujeira e cortes na mão da pessoa. A Figura 4.8 abaixo apresenta um leitor de geometria da mão.



Figura 4.8: Leitor de Geometria da Mão

Reconhecimento da Face

O uso de reconhecimento de face é o método mais natural de identificação biométrica. O uso das características da face para identificação automática é uma tarefa difícil porque a aparência facial tende a mudar a todo tempo. As variações podem ser causadas por diferentes expressões faciais, mudanças no estilo do cabelo, posição da cabeça, ângulo da câmara, condições de luz, etc. Apesar das dificuldades envolvidas, o reconhecimento facial já foi abordado de diversas maneiras, variando de sistemas de reconhecimento de padrões por redes neurais até varreduras infravermelhas de pontos estratégicos, pois registra vários pontos delimitadores do rosto e define as proporções entre olhos, nariz, queixo, maçãs do rosto e orelhas, que são únicos a cada pessoa. E, ao contrário do que muitos imaginam, os programas de reconhecimento podem identificar corretamente uma pessoa mesmo que ela tenha mudado o corte do cabelo, ou acrescentado acessórios como chapéu, óculos, barba ou bigode.

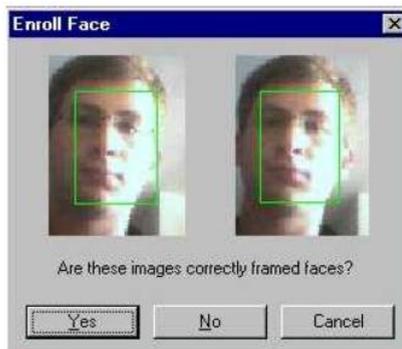


Figura 4.9: Leitura Facial

Leitura de Íris/Retina

De todas as tecnologias biométricas, as mais seguras utilizam o olho humano como parâmetro. A mais precisa é a análise da retina. Por ser formada por uma milimétrica rede de vasos sanguíneos, a retina constrói um padrão único para cada ser humano que não pode ser alterado nem por doenças graves, como o glaucoma. A tecnologia de captura dessa imagem, entretanto, é muito cara e difícil de ser realizada, pois é necessário que o usuário olhe fixamente para um ponto infravermelho até que a câmera focalize os padrões. A operação demora menos de 5 segundo, mas não é nada confortável.



Figura 4.10: Analisador de Retina

Íris é o anel colorido que circunda a pupila do olho. Cada íris possui uma estrutura única que forma um padrão complexo e pode ser usada para identificar um indivíduo. O sistema funciona a partir de um sensor luminoso, que trabalha como um escâner, ou por uma câmera embutida num equipamento médio. Ao colocar o olho próximo desse aparelho, o usuário tem seu globo ocular “dividido” pelo computador, que separa a íris em quadrantes e a converte numa espécie de código de barras. O tamanho da pupila também é medido, pois qualquer dilatação anormal

pode distorcer a leitura da íris. A barra de código, então, é comparada à imagem já codificada no banco de dados. O sistema acomoda usuários de lentes de contato sem dificuldades, embora o sensor deva ser montado ou ajustado de modo a ser satisfatório para usuários de diferentes alturas, incluindo aqueles em cadeiras de roda.



Figura 4.11: Aparelho de reconhecimento de íris

Considerações Finais

Neste Trabalho de Conclusão de Curso temos abordado noções básicas de Espaços Métricos, tal quais suas aplicações em métodos que utilizam recuperação de conteúdo, assim como as métricas das mais diversas. Espaços métricos é um tema muito importante nos principais estudos que envolvem a matemática pura, a definição de espaços métricos reúne os dois ingredientes básicos da análise funcional; um conceito de convergência e uma noção geométrica, esta última ainda em uma forma muito simples. Os Espaços Métricos ainda possuem uma grande área desconhecida que vem sendo estudada, acredita-se que estes estudos ajudarão nas melhorias das aplicações dos mesmos em várias áreas.

Apresentamos a definição de espaços métricos, e ainda de métrica onde demonstramos de forma clara as propriedades para cada distância citada neste trabalho. Focalizamos métricas usuais, como as da família ℓ^p que tem grande utilidade nos ramos das consultas por similaridade, em estudos com objetos complexos, e ainda métricas que vem ganhando o seu lugar conforme os estudos em áreas específicas, como a métrica de Canberra utilizada na taxonomia.

A teoria dos espaços métricos oferece uma gama de propriedades adicionais que podem auxiliar a melhorar as consultas por similaridade com os Métodos de Acesso Métrico (MAM) existentes, possibilitando a construção de novos MAM mais eficientes.

Referências Bibliográficas

- [1] AVALHIAS, Letricia Pereira Soares. *Transformação de espaços métricos otimizando a recuperação de imagens por conteúdo e avaliação por análise visual*. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação-ICMS-USP, Dissertação, São Carlos, Março.
- [2] BUGATTI, Pedro Henrique. *Análise da influência de funções de distância para o processamento de consultas por similaridade em recuperação de imagens por conteúdo*. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, 2008, Dissertação, São Carlos, Abril.
- [3] C. BOHM, S. BERCHTOLD, and D. A. Keim apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T. *Inclusão de Consultas por Similaridade em SGBDs: Teoria e Prática*. Simpósio Brasileiro de Bancos de Dados SBBD - 2012. Minicurso, p. 34. 71
- [4] C. GAUKER, apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.33. 70
- [5] CHÁVEZ, E., NAVARRO, G., BAEZA-YATES, R., and Marroquín, J., L., apud Avalhais, Letricia Pereira Soares. op. cit. p. 12. 74
- [6] CHINO, F. J. T. apud Valhais, Leticia Pereira Soares. op. cit. p.12. 74
- [7] CIACCIA, P., PATELLA, M., and ZEZULA, P. apud Valhais, Letricia Pereira Soares. op. cit. p.12. 71
- [8] DOMINGUES, Higino Hugueros, 1934 - *Espaços Métricos e introdução a topologia*. Edit. Atual - Editora da Universidade de São Paulo (1982).
- [9] D. R. Wilson and T. R. Martinez, apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.32. 70, 74
- [10] H. M. BLANKEN, A. P., apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.34. 71

- [11] JARDINI, E.A. *MFIS: Algoritmo de Reconhecimento e Indexação em Bases de Dados de Impressões Digitais em Espaços Métricos*. 2007. 105f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo, 2007.
- [12] K.-M. LEE and W. N. STREET., apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.34. 71
- [13] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*; v. 1. 14.ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. (Projeto Euclides). 37
- [14] MARCON, Divane. *Espaços Métricos*.2000, Monografia, Florianópolis-SC, Dezembro.
- [15] M. C. N. BARIONI, D. S. KASTER, H. L. RAZENTE, A. J. M. TRAINA, and C. Traina Jr., apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.33. 70
- [16] POLA, Ives Renê Venturini, *Explorando conceitos da teoria de espaços métricos em consultas por similaridade sobre dados complexos*.2010. Tese(Doutorado) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, São Carlos, Junho.
- [17] R. BUENO, D. S. Kaster, A. A. PATERLINI, A. J. M. Traina, and C. T. Jr., apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.34. 71
- [18] R. DATTA, D. JOSHI, J. LI, and J. Z. WANG., apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.33. 71
- [19] SILVA, Gentil Lopes, *Espaços Métricos (comentado)*. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfmi4AE/espacos-metricos>. Acesso em: 19 de março de 2013. 63
- [20] SOUZA, Weslwy Angelino and LOTUFO, Roberto de Alencar and RITTNER, Leticia. *Análise comportamental da Optimun-Parth Forest em diferentes funções métricas*. Disponível em: http://parati.dca.fee.unicamp.br/media/Attachments/courseIA368Q1S2012/wes_monografia/OPF_Funcoes_Distancia.pdf. Acesso em: 02 de março de 2013. ix, 29, 31, 35

- [21] TRAINA, CAETANO, J., TRAINA, A. J. M., VIEIRA, M. R., and Faloutsos, C. apud valhais, Letricia Pereira Soares. op. cit. p. 10. 73
- [22] TRAINA, CAETANO, J., TRAINA, A. J. M., SEEGER, B., and Faloutsos, apud Valhais, Letricia Pereira Soares. op. cit. p.12. 70, 74
- [23] UFSC. Disponível em: <http://www.das.ufsc.br/rro/pubs/sbseg06-biometria.pdf>
- [24] X. He, W.-Y. Ma, O. KING, M. LI, and H. ZHANG., apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.33.
- [25] Y.-H. YUAN, Q.-S. SUN, Q. ZHOU, and D.-S. XIA., apud dos Santos, Daniel K., Jr., Caetano T, op. cit., p.34. 72
- [26] ZEZULA, P., AMATO, G., DOHNAL, V., and BATKO, M. apud Avalhais, Letricia Pereira Soares. op. cit. p. 10.