UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELIAS DA COSTA FERREIRA

TENSORES E APLICAÇÕES

Macapá-AP
2013

ELIAS DA COSTA FERREIRA

TENSORES
E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof^{o}. Dr. GUZMÁN EULÁLIO ISLA CHAMILCO.

Macapá-AP
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

Ferreira, Elias da Costa.
Tensores e aplicações / Elias da Costa Ferreira; orientador Guzmán Eulálio Isla Chamilco. Macapá, 2013.
72. p

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Física - Estudo e ensino.
3. Mecânica dos sólidos. 4. Análise tensorial. 5. Cálculo tensorial. I. Chamilco, Guzmán Eulálio Isla, (orient.). II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

CDD. 22.ed. 515.63

ELIAS DA COSTA FERREIRA

TENSORES E APLICAÇÕES

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado pela comissão avaliadora do Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá. Composta pelos integrantes abaixo-relacionados:

AVALIADORES:

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Orientador - Universidade Federal do Amapá

Prof^a. Elifaleth Rego Sabino
1º Membro - Universidade Federal do Amapá

Prof. Dr. José Walter Cárdenas
2º Membro - Universidade Federal do Amapá

Avaliado em: 28/06/2013

Macapá-AP
2013

Dedico este trabalho a Deus meu criador, a minha inspiração a seguir esta carreira memorável Silvania Santos, a minha família, a Rafaela Carvalho de Araújo e a Priscila Viégas dos Santos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por suas muitíssimas bençãos derramadas sobre minha vida, pois se não fosse por sua graça e misericórdia não teria até aqui chegado.

A minha família por seu apoio, e motivação para que em nenhum momento viesse a desistir, dificuldades foram muitas, mas todas vencidas.

Aos amigos e colegas de turma, que me ajudaram nesta caminhada, assim como aos meus amigos e irmãos(em especial Érica Patrícia Viégas dos Santos e Vanessa Viégas dos Santos) da Igreja Família Transcultural, por suas orações e apoio nesta concretização de um sonho ainda em construção.

E aos meus professores, intermediadores entre o conhecimento e o indivíduo, principalmente ao meu orientador(Guzmán Isla Eulálio Chamilco) que desempenhou papel importante neste realizar.

Uma mente silenciada é uma mente estagnada, mas uma mente governada pelo conhecimento é uma mente inovadora.

(E.C)

Resumo

Neste trabalho temos por objetivo a abordagem dos conceitos básicos de tensores, por ser um tema bastante amplo e rico em aplicações, tanto na Matemática, Física e Engenharia, nos restringimos a abordagem de tensores de primeira e segunda ordem, uma suscinta apresentação dos de terceira e quarta ordem, sem muito detalhes.

Estes conceitos nos leva a diversas aplicações como já mencionado, e entre tantas, no presente trabalho é abordado tensores voltado a Teoria da Elasticidade, ramo da Física que estuda o comportamento de certos materiais sofrerem deformações, ao serem submetidos a uma determinada força, e retornando a sua forma original quando tal força é removida.

Palavras chave: Cálculo tensorial, Mecânica dos sólidos, Análise tensorial.

Abstract

In this paper we aim to address the basics of tensor, because the subject was quite broad and rich applications, both in Mathematics, Physics and Engineering, we restrict ourselves to tensor approach of first and second order, a succinct presentation of the third and fourth order, without much detail.

These concepts leads to various applications as already mentioned, and among many of the present work is addressed tensioners facing the Theory of Elasticity, branch of physics that studies the behavior of certain materials undergo deformations when subjected to a given force, and returning its original shape when that force is removed.

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

$\mathbb{R} \to$ Conjunto dos números reais;
$\mathbb{R}^3 \to$ Espaço euclidiano tri-dimensional;
$\mathbb{R}^n \to$ Espaço euclidiano n-dimensional;
$\oslash \to$ Conjunto vazio;
$\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \to$ conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 3, com coeficientes reais;
$\lambda = \lambda^i_j = \lambda_{ij} = \lambda^{ij} \to$ Matriz;
$\mathcal{M}(m \times n) \to$ Conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$;
$\langle u, v \rangle \to$ Produto Interno;
$||u|| \to$ Norma de u;
$\mathcal{L}(E_1, ..., E_r, F) \to$ Conjunto de todas as aplicações r-lineares;
$\delta^i_j \to$ Delta de Kronecker;
$\mathcal{E}_{ijk} \to$ Símbolo permutador;
$Lin \to$ Espaço dos tensore de 2º ordem;
$\bigtriangledown \to$ Gradiente;
$\Delta T \to$ Laplaciano de um tensor T;
$T_c \to$ Tensor de Cauchy.
$C_{ijkl} \to$ Tensor de quarta ordem.

Índice

Introdução

Contexto Histórico

Os conceitos de análise tensorial surgiram a partir do trabalho de Carl Friederich Gauss em geometria diferencial, e sua formulação foi muito influenciada pela teoria das formas algébricas e invariantes desenvolvidas durante a metade do século XIX. O termo "tensor"em si foi introduzido em 1846 por William Rowan Hamilton para descrever algo diferente do que é entendido hoje por um tensor. O uso contemporâneo foi trazido por Waldemar Voigt em 1898.

O cálculo tensorial foi desenvolvido por volta de 1890 por Gregório Ricci-Curbastro sob o título de Cálculo Diferencial Absoluto, e originalmente apresentato por Ricci em 1892. Tornou-se acessível a muitos matemáticos pela publicação de Ricci e Tullio Levi-Civita's em 1900 com o texto clássico Méthodes de Calcul Differential Absoluet Leurs Applications(Método de Cálculo Diferencial Absoluto e suas Aplicações).

No século XX, o assunto passou a ser conhecido como análise de tensor e obteve ampla aceitação, com introdução da teoria da Relatividade Geral de Einstein por volta de 1915. A Relatividade Geral é formulada completamente na linguagem de tensores, Einstein tinha aprendido sobre eles com grande dificuldade, a partir do geômetra Marcel Grassmann. Levi-Civita's em seguida iniciou uma correspondência com Einstein para correção de erros, Einstein tinha feito em seu uso da análise tensorial. A correspondência durou de 1915-1917, e caracterizou-se pelo respeito mútuo entre os dois:

"Admiro a elegância do seu método de cálculo, que deve ser bom para andar através destes campos montado em verdadeiros cavalos da matemática, enquanto nós temos de fazer o nosso caminho arduamente a pé".

-Albert Einstein, os matemáticos italianos da relatividade.

Tensores também são muito úteis em outros campos, como a Mecânica do Contínuo, Eletromagnetismo e a Teoria da Relatividade. Alguns exemplos bem conhecidos de tensores em geometria diferencial são as formas quadráticas dos tensores métricos e do tensor de curvatura de Riemann. A álgebra exterior de Hermann Grassmann, a partir de meados do século XIX, é em si uma teoria tensorial, e altamente geométrica, mas foi algum tempo antes que ele foi visto, com a teoria das funções diferenciais, que naturalmente foi unificado com o cálculo tensorial. O trabalho de Élie Joseph Cartan feito diferencial constituiu um dos tipos básicos de tensores usados na matemática.

No conceito atual, podemos traduzir que tensores são entidades geométricas introduzidas na Matemática e na Física para generalizar o conceito de escalares, vetores e matrizes. Assim como escalares, vetores e matrizes, um tensor é uma forma de representação associada a um conjunto de operações, tais como a soma e o produto.

Muitas grandezs físicas são melhor representadas como a correspondência entre um conjunto de vetores e outro. Por exemplo, a Tensão(mecânica) ou estresse figura(1) toma uma direção(vetor) como entrada e produz o estresse sobre a superfície normal a este vetor como saída e, assim, expressa a relação entre estes dois vetores.

De forma mais formal tensores são a generalização de vetor, funcional linear, transformação linear, forma bilinear e, de modo geral, aplicações n-lineares que levam n_1 vetores a n_2 vetores.

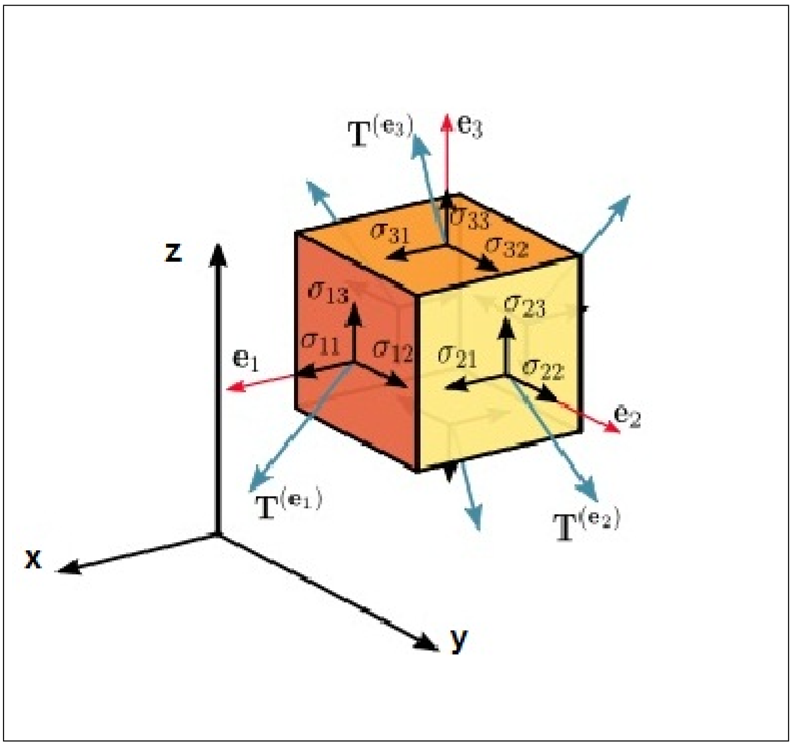

Figura 1: Tensão

Capítulo 1

Definições Prévias

1.1 Espaços Vetoriais

A maioria das definições foram tiradas ou inspiradas do livro Álgebra linear[2].

Definição 1.1.1 *Considere um conjunto* $E \neq \oslash$*, onde os elementos de* E *são chamados vetores, e um corpo de escalares* $\mathbb{K}$*, consideraremos* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*. Munido das seguintes operações, a adição que a cada par de vetores* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *faz corresponder um novo vetor* $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in E$*, chamado a soma de* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$*, e a multiplicação por um número real, que a cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e a cada vetor* $\boldsymbol{v} \in E$ *faz corresponder um novo vetor* $\alpha\boldsymbol{v}$*, chamado o produto de* α *por* $\boldsymbol{v}$*, tais que atendam as seguintes condições:*

1. *Comutatividade:* $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$;
2. *Associatividade:* $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ *e* $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$;
3. *Vetor nulo: existe um vetor* $\boldsymbol{0} \in E$*, chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que* $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ *para todo* $\boldsymbol{v} \in E$;
4. *Inverso aditivo: para cada vetor* $\boldsymbol{v} \in E$ *existe um vetor* $\boldsymbol{-v} \in E$*, chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de* $\boldsymbol{v}$*, tal que* $\boldsymbol{-v}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+(\boldsymbol{-v}) = \boldsymbol{0}$;
5. *Distributividade:* $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$ *e* $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$;
6. *Multiplicação por 1:* $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

É chamado de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$*.*

Exemplo 1.1.1 *Seja* $E = \mathbb{R}^3$ *e* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vetores de* $\mathbb{R}^3$, *munido das seguintes operações:*

$$
\begin{aligned}
+ : \quad & E \times E \longrightarrow E \\
& (\boldsymbol{u}\ ,\ \boldsymbol{v}) \longrightarrow \boldsymbol{u}\boldsymbol{+}\boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdot : \quad & \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \\
& (k\ ,\ \boldsymbol{u}) \longrightarrow k \cdot \boldsymbol{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, k \cdot u_3)
\end{aligned}
$$

Tornam $\mathbb{R}^3$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.2 *Seja* $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *e* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

$$
\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}
$$

Munido das seguintes operações:

$$
\begin{aligned}
+ : \quad & E \times E \longrightarrow E \\
& (\boldsymbol{u}\ ,\ \boldsymbol{v}) \longrightarrow \boldsymbol{u}\boldsymbol{+}\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \\ & (k\ ,\ \boldsymbol{u}) \longrightarrow k \cdot \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

Fazem de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ um espaço vetorial.

As consequências imediatas desta definição são:

1. Se $\mathbf{w}+\mathbf{u} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$ então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Em particular, $\mathbf{w}+\mathbf{u} = \mathbf{w}$ implica $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{w}+\mathbf{u} = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{w} = \mathbf{-u}$;
2. Dados $0 \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in E$ tem-se $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \in E$. Analogamente, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{0} \in E$ vale $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
3. Se $\alpha \neq 0$ e $\mathbf{v} \neq 0$ então $\alpha \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

1.2 Subespaços Vetoriais

Definição 1.2.1 *Considere E um espaço vetorial. Diz-se que $F \subset E$ é um subespaço vetorial(ou simplesmente subespaço) de E, quando satisfaz as seguintes condições:*

1. $\boldsymbol{0} \in F$;
2. *Se* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in F$ *então* $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in F$;
3. *Se* $\boldsymbol{v} \in F$ *então, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha\boldsymbol{v} \in F$.

Exemplo 1.2.1 *O conjunto das matrizes simétricas de ordem m com coeficientes reais é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.*

1.3 Bases

Definição 1.3.1 *Considere E um espaço vetorial. Dis-se que um conjunto $X \subset E$ é linearmente independente(L.I) quando nenhum vetor $\boldsymbol{v} \in X$ é combinação linear de outros elementos de X.*

Teorema 1.3.1 *Seja X um conjunto L.I no espaço vetorial E. Se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$ com $v_1, ..., v_m \in X$ então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Reciprocamente, se a única combinação linear nula de vetores de X é aquela cujos coeficientes são todos iguais a zero, então X é um conjunto L.I[2].*

Demostração:

Suponha por absurdo que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

com $v_1, ..., v_m \in X$, e nem todos os $\alpha_i = 0$. Isto é, existe pelo menos um vetor que se exprime como combinação linear dos demais.

Digamos $\alpha_1 \neq 0$.

Logo,

$$v_1 + \cdots + \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m = 0$$

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m = 0$$

Daí v_1 se exprime como combinação linear dos demais, com nem todos os $\alpha_i = 0$, absurdo pois X é L.I.

Reciprocamente se X não fosse L.I, então teríamos que algum dos seus vetores seria combinação linear dos demais.

Isto é,

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

$$1 \cdot v - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_m v_m = 0$$

Onde teríamos uma combinação linear nula de vetores em X, na qual pelo menos o primeiro coeficiente não é nulo, absurdo.

Portanto X é L.I.

Teorema 1.3.2 *Sejam $v_1, ..., v_m$ vetores não nulos do espaço vetorial E. Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores então o conjunto $X = v_1, ..., v_m$ é L.I.*

Demonstração:

Suponha que exista uma combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_m$ e suponhamos que $\alpha_r v_v$ fosse a última parcela não nula. Isto é,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0,$$

com $\alpha_r \neq 0$. Daí teríamos

$$v_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} v_{r-1},$$

logo v_r seria uma combinação linear dos elementos anteriores a ele na lista $v_1, ..., v_m$. Absurdo.

Definição 1.3.2 *Um conjunto $X \subset E$ diz-se linearmente dependente (L.D) quando não é L.I..*

Definição 1.3.3 *Seja E um espaço vetorial finitamente gerado, uma base de E é um conjunto $\mathcal{B} \subset E$ linearmente independente que gera E. Ou seja, todo vetor $\boldsymbol{v} \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear $\boldsymbol{v} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ de elementos $v_1, ..., v_m$ da base $\mathcal{B}$. Se $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_m\}$ é uma base de E e $\boldsymbol{v} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$, então os números $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ chamam-se as coordenadas do vetor $\boldsymbol{v}$ na base $\mathcal{B}$.*

Teorema 1.3.3 *Se os vetores $v_1, ..., v_m$ geram o espaço vetorial E então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é L.D..*

corolário 1.3.1 *Se o espaço vetorial E admite uma base $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ com n elementos, qualquer outra base de E possui n elementos.*

Definição 1.3.4 *Diz-se que o espaço vetorial E tem dimensão finita quando admite uma base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de E, chama-se dimensão do espaço vetorial E: $n = dimE$. Se $E = 0$ $dimE = 0$*

corolário 1.3.2 *Se a dimensão de E é n, um conjunto com n vetores gera E se, e somente se, é L.I..*

1.4 Mudanças de coordenadas

Sejam $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_n\}$ duas bases de um espaço vetorial V. Exprimindo os f_j como combinação linear dos e_i, obtemos

$$f_j = \sum_i \lambda_j^i, \ j = 1, ..., n$$

O quadro formado pelos n^2 números $\lambda_j^i, \ i, j = 1, ..., n$, de acordo com o arranjo abaixo indicado, é o que se chama uma matriz[4].

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_n^n \\ \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Note-se que λ_j^i está na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

Adotaremos sistematicamente a seguinte convenção sobre as maneiras de escrever uma matriz: quando a matriz $\lambda = (\lambda_j^i)$ tiver seus elementos com índice inferior e outro superior, o índice superior indicará sempre a linha, o índice inferior a coluna em que se encontra o elemento λ^i_j. Quando, porém, tivermos que escrever uma matriz $\lambda = (\lambda_{ij})$ com dois índices inferiores, ou $\lambda = (\lambda^{ij})$ com dois índices superiores, o primeiro índice indicará a linha e o segundo índice indicará a coluna em que se encontra o elemento $\lambda_{ij}($ *ou* $\lambda^{ij})$ mais exatamente, λ é chamada a matriz de passagem da base $\mathcal{E}$ para a base $\mathcal{F}$[4].

Tomemos um vetor $\mathbf{v} \in V$ e exprimâmo-lo sucessivamente como combinação linear dos e_i e dos f_j:

$$\mathbf{v} = \sum_i \alpha^i e_i, \quad \mathbf{v} = \sum_j \beta^j f_j.$$

Na segunda dessas igualdades , substituamos f_j pelo seu valor $f_j = \sum_i \lambda^i_j e_i$ obtendo

$$\mathbf{v} = \sum_j \beta^j (\sum_i \lambda^i_j e_i) = \sum_j (\sum_j \lambda^i_j \beta^j) e_i.$$

Como $\mathbf{v}$ se exprime de maneira única como combinação linear dos e_i, comparando $\mathbf{v} = \sum_i \alpha^i e_i$ com $\mathbf{v} = \sum_i (\sum_j \lambda^i_j \beta^j) e_i$, podemos escrever:

$$\alpha^i = \sum_j \lambda^i_j \beta^j, \ i = 1, ..., n.$$

Esta é a relação entre as coordenadas α^i, de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{E}$, e as coordenadas β^j, do mesmo vetor $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{F}$. Observe que a matriz λ, de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ dá a passagem das coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{F}$ para as coordenadas relativamente a $\mathcal{E}$. Houve uma inversão de sentido, por isso, os vetores de um espaço V são, às vezes chamadas vetores contravariantes[4].

1.5 Transformações Lineares

Definição 1.5.1 *Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma transformção linear T : $E \longrightarrow F$ é uma correspondência que associa a cada vetor $\boldsymbol{v} \in E$ um vetor $\boldsymbol{T(v)} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{Tv} \in F$ de modo que valham, para quaisquer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes condições:[2]*

1. ***T(u+v)=Tu+Tv**;*

2. *$\boldsymbol{T}(\alpha \cdot \boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{Tv}$.*

O vetor $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ chama-se a imagem(ou transformado) de $\mathbf{v}$ pela transformação T. Quando $E = F$, $\mathbf{T}$ é chamado de operador linear.

Exemplo 1.5.1 *Seja $V = W = \mathbb{R}^n$, a aplicação $T(x) = ax$, onde a é um escalar, é uma transformação linear.*

Exemplo 1.5.2 *A aplicação $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ associa a sua i-ésima coordenada, é também uma transformação linear.*

A soma de duas transformações lineares $A, B : E \longrightarrow F$ e o produto de uma transformação linear $A : E \longrightarrow F$ por um número $\alpha \in \mathbb{R}$ são as transformações lineares $A+B : E \longrightarrow F$ e $\alpha A : E \longrightarrow F$, definidas respectivamente por $(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v}$ e $(\alpha A)\mathbf{v} = \alpha \cdot A\mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in E$.

Um operador linear especial é o operador identidade $I : E \longrightarrow E$, definido por $I \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in E$.

Teorema 1.5.1 *Sejam E, F espaços vetoriais e $\mathcal{B}$ uma base de E. A cada $\boldsymbol{u} \in \mathcal{B}$, façamos corresponder (de maneira arbitrária) um vetor $\boldsymbol{u}' \in F$. Então existe uma única transformação linear $A : E \longrightarrow F$ tal que $A \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$ para cada $\boldsymbol{u} \in \mathcal{B}$.*

1.6 Produto de Transformações Lineares

Definição 1.6.1 *Dadas as transformaçoes lineares $A : E \longrightarrow F, B : F \longrightarrow G$, onde o domínio de B coincide com o contradomínio de A, defini-se o produto $BA : E \longrightarrow G$ pondo, para cada $\boldsymbol{v} \in E, (BA)\boldsymbol{v} = B(A\boldsymbol{v})$,*

$$E \overset{A}{\to} F \overset{B}{\to} G$$

Vê-se imediatamente que BA é uma transformação linear. Note que BA nada mais é que a composta $B \circ A$ das funções B e A. Daí segue-se que se $C : G \longrightarrow H$ é uma transformação linear, vale a:

1. Associatividade: $(CB)A = C(BA)$;

   A linearidade não é necessária para mostrar que, dadas $A : E \longrightarrow F$ e $B, C : F \longrightarrow G$, tem-se a:

2. Distributividade à esquerda: $(B + C)A = BA + CA$;

   Pela linearidade de $C : F \longrightarrow G$, tem-se que, dadas $A, B : E \longrightarrow F$, vale a:

3. Distributividade à direita: $C(A + B) = CA + CB$;

   Pela linearidade de B tem-se a:

4. Homogeneidade: $B(\alpha A) = \alpha(BA)$, válida para $\alpha \in \mathbb{R}, A : E \longrightarrow F$ e $B : F \longrightarrow G$ quaisquer.

1.7 Núcleo e Imagem

Definição 1.7.1 *Seja $A : E \longrightarrow F$ uma transformação linear. Diz-se que a imagem de A é um subconjunto Im(A) $\subset F$, formado por todos os vetores $\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{v} \in F$ que são imagens de elementos de E pela transformação A.*

Definição 1.7.2 *Uma transformação linear $B : E \longrightarrow F$ chama-se uma inversa à direita da transformação linear $A : E \longrightarrow F$ quando se tem $AB = I_F$, ou seja, quando $A(B\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ para todo $\boldsymbol{w} \in F$.*

Definição 1.7.3 *O núcleo $N(A)$ da transformação linear $A : E \longrightarrow F$ é o conjunto dos vetores $V \in E$ tais que $A\boldsymbol{v} = 0$.*

Definição 1.7.4 *Sejam $A : E \longrightarrow F$ e $B : F \longrightarrow E$ transformações lineares. Diz-se que B é uma inversa à esquerda de A quando $BA = I_E$, isto é, quando $B(A\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ para todo $\boldsymbol{v} \in E$.*

Definição 1.7.5 *Uma transformação linear $A : E \longrightarrow F$ chama-se invertível quando existe $B : F \longrightarrow E$ linear tal que $BA = I_E$ e $AB = I_F$, ou seja, quando B é, ao mesmo tempo, inversa à esquerda e à direita de A. Diz-se então que B é a inversa de A e denota-se por $B = A^{-1}$.*

1.8 Matriz associada a uma Transformação Linear

Em virtude do teorema 1.5.1 na pagina 21, podemos definir uma transformação linear $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, pondo para cada $j = 1, ..., n$, um vetor $\mathbf{v}_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$ e dizer que $v_j = A \cdot e_j$ é a imagem do j-ésimo vetor da base canônica, $e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$ pela transformação linear A. Ou seja, uma transformação $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fica inteiramente determinada por uma matriz $a = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$[2].

Definição 1.8.1 *Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita e $A : E \longrightarrow F$ uma transformação linear. Fixadas bases $\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_n\} \subset E$ e $\mathcal{W} = \{w_1, ..., w_m\} \subset F$, para cada $j = 1, ..., n$ o vetor $A\boldsymbol{v}_j$ se exprime como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{W}$:*

$$A\boldsymbol{v}_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + ... + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}w_i.$$

Assim, a transformação linear $A : E \longrightarrow F$ juntamente com as bases $\mathcal{V}, \mathcal{W}$, determinam uma matriz $a = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n)$, chamada a matriz de A relativamente a essas bases (ou nas bases $\mathcal{V}, \mathcal{W}$).

Teorema 1.8.1 *A matriz de $BA : E \longrightarrow G$ nas bases $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ é o produto $b \cdot a \in \mathcal{M}(m \times n)$ das matrizes $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a}$.*

Propriedades:

1. $(cb)a = c(ba)$;
2. $c(a + b) = ca + cb$; $(b + c)a = ba + ca$;
3. $a \cdot I_n = a$, $I_m \cdot a = a$ se $a \in \mathcal{M}(m \times n)$;
4. $b(\alpha a) = \alpha(ba)$.

1.9 Produto Interno

Definição 1.9.1 *Um produto interno num espaço vetorial E é um funcional bilinear simétrico e positivo em E. Mas precisamente um produto interno é uma função $E \times E \longrightarrow$*

$\mathbb{R}$, *que asocia a cada par de vetores* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in E$ *um número real* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, *chamado o produto interno de* $\boldsymbol{u}$ *por* $\boldsymbol{v}$, *de modo que sejam válidas as seguintes propriedades, para quaisquer* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u'}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v'} \in E$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. ***Bilinearidade***: $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u'}, \boldsymbol{v} \rangle$, $\langle \alpha \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v'} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v'} \rangle$, $\langle \boldsymbol{u}, \alpha \boldsymbol{v} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$;

2. ***Comutatividade(simetria)***: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$;

3. ***Positividade***: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0$ *se* $\boldsymbol{u} \neq 0$

1.10 Aplicações Multilineares

Definição 1.10.1 *Sejam* $E_1, ..., E_r, F$ *espaços vetoriais. Uma aplicação*

$$f : E_1 \times \cdots \times E_r \longrightarrow F$$

é dita r-linear quando é linear separadamente em cada uma das suas variáveis. Isto é, dados arbitrariamente $v_1 \in E_1, ..., v_i, w_i \in E_i, ..., v_r \in E_r$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tem-se:*

$$f(v_1, ..., v_i + w_i, ..., v_r) = f(v_1, ..., v_i, ..., v_r) + f(v_1, ..., w_i, ..., v_r)$$

$$e \quad f(v_1, ..., \lambda v_i, ..., v_r) = \lambda \cdot f(v_1, ..., v_i, ..., v_r)$$

Indicaremos por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_r; F)$ o conjunto das aplicações r-lineares $f : E_1 \times \cdots \times E_r \longrightarrow F$. A soma de duas aplicações r-lineares e o produto de uma aplicação r-linear por um escalar são definidos, de modo natural, pelas igualdades:

$$(f+g)(v_1,...,v_r) = f(v_1,...,v_r) + g(v_1,...,v_r)$$

$$(\lambda f)(v_1,...,v_r) = \lambda \cdot f(v_1,...,v_r)$$

Se $f, g \in \mathcal{L}(E_1,...,E_r;F)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $f+g, \lambda f \in \mathcal{L}(E_1,...,E_r;F)$ fazem de $\mathcal{L}(E_1,...,E_r;F)$ um espaço vetorial[3].

Capítulo 2

Cálculo Tensorial

2.1 Exemplos

As leis da física, para serem válidas, devem ser independentes dos sistemas de coodernadas usados para exprimí-las matematicamente. O estudo das consequências deste requisito, é o que nos leva à análise tensorial, objeto de grande emprego na teoria geral da relatividade, na geometria diferencial, na mecânica, elasticidade, hidrodinâmica, teoria do eletromagnetismo, e muitos outros campos da ciência e da engenharia. Antes de passarmos as definições de tensores recorreremos a alguns exemplos para uma melhor idéia do assunto a ser discutido e analisado.

Exemplo 2.1.1 *Função linear*

Seja $f(x)$ uma função linear em um espaço vetorial $\mathcal{R}$ de n dimensões. Tomemos em $\mathcal{R}$ uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ e seja

$$x = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$$

um vetor qualquer de $\mathcal{R}$. Neste caso

$$f(x) = a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n,$$

onde

$$a_i = f(e_i)$$

Consideremos uma nova base $\{e'^i, ..., e'^n\}$ *e suponhamos que os novos vetores base sejam obtidos a partir dos antigos mediante a fórmula*

$$e'_i = c_i^1 e_1 + \cdots + c_i^n e_n = \sum_{k=1}^{n} c_i^k e_k \tag{2.1}$$

Suponhamos que na nova base se tenha

$$x = \sum_{i=1}^{n} x'^i e'_i$$

neste caso

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a'_i x'^i \tag{2.2}$$

onde

$$a'_i = f(e'_i) = f(\sum_{k=1}^{n} c_i^k e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_i^k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_i^k a_k \tag{2.3}$$

Por consequência uma função linear $f(x)$ *é determinada em toda base por uma sequência de* n *números* $(a_1, \ldots, a_n)$ *e passando a uma nova base estes números se transformam segundo a fórmula 2.3.*

Para questões de abreviação de notação usaremos o seguinte critério criado por Albert Einstein:

A convenção da soma ou índice: Se numa expressão qualquer se repetir duas vezes, uma vez acima e outra abaixo, um mesmo índice, digamos i, isto significa que a soma será realizada a respeito deste índice (com $i = 1, \ldots, n$) em particular o sinal de soma $\sum_{i=1}^{n}$ é omitido. Por exemplo, temos por definição.

$$c_i^k e_k = \sum_{k=1}^{n} c_i^k e_k, \quad c_i^k x'^i = \sum_{i=1}^{n} c_i^k x'^i, \quad b_i^{pq} a_r^i = \sum_{i=1}^{n} b_i^{pq} a_r^i.$$

Usando esta notação podemos escrever a igualdade 2.1 na forma

$$e'_i = c_i^k e_k$$

a igualdade 2.2 na forma

$$f(x) = a'_i x'^i$$

e a igualdade 2.3 na forma

$$a'_i = c_i^k a_k$$

.

Definição 2.1.1 *Símbolo Permutador: O símbolo permutador($\mathcal{E}_{ijk}$) é usado para simplificar a representação do produto escalar triplo, sendo um tensor de terceira ordem, e este tensor é definido da seguinte forma:*

$$\mathcal{E}_{ijk} = \begin{cases} 1 & \textit{se for } (i,j,k) \textit{ em ordem cíclica e com } i,j,k \textit{ distintos} \\ 0 & \textit{se for } (i,j,k) \textit{ tal que } i=j \textit{ ou } i=k \textit{ ou } j=k \\ -1 & \textit{se for } (i,j,k) \textit{ com } i,j,k \textit{ distintos e em ordem não cíclica} \end{cases}$$

Definição 2.1.2 *Delta de Kronecker: O delta de Kronecker ou símbolo de Kronecker, é a notação δ_{ij} definida da seginte forma:*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \;\; i=j \\ 0 & se \;\; i \neq j \end{cases}$$

Exemplo 2.1.2 *Momento de Inércia: Seja um corpo rígido: um sistema de partículas cujas distâncias de umas as outras permanecem fixas. Sejam m a massa de uma partícula genérica, e $\vec{v}$ a sua velocidade. O momento total do corpo rígido será então*

$$m\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Pela convenção de índices teremos $m_i\vec{v}_i$. Temos que a velocidade instantânea de cada ponto de um corpo rígido $\vec{v}$, pode ser decomposta da seguinte forma

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade comum a todas as partículas, e $\vec{\Omega}$ é a velocidade angular instantânea(também a mesma a todas as partículas). Naturalmente, $\vec{r}$ é o vetor de posição de cada partícula. A energia cinética do corpo rígido pode então ser escrita como:

$$T = \sum \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \sum \frac{m}{2}(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2$$

onde, como é usual, o quadrado de um vetor é o produto escalar dele consigo mesmo. Calculando este produto escalar, temos

$$(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{V}.\vec{V} + 2\vec{V}.(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + (\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

O segundo termo do segundo membro aparece, na energia cinética, sob a forma

$$\sum m\vec{V}.(\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \sum m(\vec{V} \times \vec{\Omega})\vec{r} = (\vec{V} \times \vec{\Omega}).\sum m\vec{r}$$

Se tomarmos a origem no centro de massa, teremos $\sum m\vec{r} = 0$

De fato, sejam M a massa total do corpo, e $\vec{R}$ a posição de seu centro de massa. Então

$$\vec{R} = \frac{\sum m\vec{r}}{M}$$

e, se seu centro de massa está na origem, $\vec{R} = 0$, o mesmo valendo, para $\sum m\vec{r}$. A energia cinética é então escrita sob a forma

$$T = \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 + \sum \frac{m}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \tag{2.4}$$

Utilizando o símbolo permutador o último termo pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \mathcal{E}_{ijk}\Omega_j x_k \mathcal{E}_{ilm}\Omega_l x_m \\
&= \mathcal{E}_{ijk}\mathcal{E}_{ilm}\Omega_j\Omega_l x_k x_m \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm})\Omega_j\Omega_l x_k x_m \\
&= \Omega_i\Omega_i x_j x_j - \Omega_i x_i \Omega_j x_j \\
&= \Omega_i\Omega_j(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j) \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Daí substituindo 2.5 em 2.4 temos:

$$T = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j)\Omega_i\Omega_j$$

e, se definirmos as componentes do momento de inércia como

$$I_{ij} = \sum m(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j)$$

teremos

$$T = \sum \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j$$

Vamos obter agora a maneira pela qual as componentes do tensor momento de inércia se transforma por mudança de base. Observe que a inergia cinética é um invariante, pois não é alterada por uma mudança de base. Ora, a quantidade

$$I_{ij}\Omega_i\Omega_j$$

aparece na expressão da energia cinética, sendo, também, um invariante. Logo, se mudarmos de base, teremos

$$I_{ij}\Omega_i\Omega_j = I'_{lm}\Omega'_l\Omega'_m \qquad (2.6)$$

onde as quantidades do segundo membro são componentes em relação à segunda base, As propriedades de transformação das componentes de $\vec{\Omega}$ são conhecidas, pois trata-se de um vetor. Então,

$$\begin{aligned}
\Omega'_i &= a_{li}\Omega'_l \\
\Omega'_j &= a_{jm}\Omega'_m
\end{aligned}$$

que, pela equação 2.6, dão

$$I_{ij}a_{li}a_{jm}\Omega'_l\Omega'_m = I'_{lm}\Omega'_l\Omega'_m$$

Comparando, segue que

$$I'_{lm} = a_{li}a_{jm}I_{ij}$$

que dá a fórmula de transformação das componentes do tensor de inércia por mudança de base.

Exemplo 2.1.3 *Vetor:*

Dada uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$*, todo vetor* x *é representado por uma sequência* $(x^1, \ldots, x^n)$ *de* n *números que são suas coodernadas. Em uma nova base* $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *este mesmo vetor é representado por uma outra sequência* $(x'^1, \ldots, x'^n)$ *e se 1.1 é a matriz de transformação da primeira base pela segunda, teremos*

$$x^k = \lambda^k_j x'^j \tag{2.7}$$

Esta é a expressão das coordenadas antigas pelas novas. Agora procuremos as expressões das coordenadas novas x'^j *pelas antigas* x^i*. Seja então* $\Lambda^{-1} = [b^i_k]$ *a matriz inversa da matriz* Λ*. Ora da igualdade*

$$\Lambda\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda = I$$

resulta que

$$\lambda^i_k b^k_j = b^i_k \lambda^k_j = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$$

Tomando

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$$

Teremos

$$\lambda^i_k b^k_j = b^i_k \lambda^k_j = \delta^i_j$$

Multiplicando por b^i_k ambos os membros da igualdade 2.7(e, somando em relação a k) obtemos

$$b^i_k x^k = b^i_k \lambda^k_j x'^j = \delta^i_j x'^j = x'^i$$

logo

$$x'^i = b^i_k x^k$$

Analogamente, as coordenadas novas x'^i de um vetor x são obtidas de suas coordenadas antigas x^i pela matriz Λ^{-1}, inversa da matriz de mudança Λ, com a adição de que os coeficientes de desenvolvimento das x'^i por x^i formam as linhas da matriz Λ^{-1}.

Observando os exemplos considerados(função linear, momento de inércia e vetor) podemos ver que eles possuem algo em comum que nos permite colocá-los a margem de uma definição geral. Tanto uma função linear como um vetor são determinados em toda base por n números - $a_1, ..., a_n$ e $x^1, ..., x^n$, respectivamente e ao passar a uma nova base estes números se transformam linearmente: pela matriz de transformação Λ, ou seja, igual aos vetores bases, no caso de uma função linear e no caso de um vetor pela matriz Λ^{-1} que é a inversa da matriz Λ. Os coeficientes de uma função linear, assim como as coordenadas de um vetor, representam um exemplo de um **tensor**, assim como a forma que o momento de inércia é representado, são exemplos de tensores. Ou seja tensores são uma forma generalizada de vetores e escalares, e caracterizamos essa generalização atravez da "ordem", assim temos que um escalar é definido formalmente como sendo um tensor de ordem 0, por sua vez um vetor é definido como sendo um tensor de ordem 1, e qualquer outro elemento que seja de ordem superior é chamado de tensor de ordem n.

A forma mais simples de expressar um tensor é através de matrizes. Assim um escalar tensor de ordem 0 é representado simplesmente por um número, um vetor, tensor de ordem 1, é representado por uma matriz linha ou uma matriz coluna, já um tensor de ordem 2 ou superior podem ser expressos através de uma matriz $n \times n$.

2.2 Tensor:

Definição 2.2.1 *Considere $\boldsymbol{T}$ uma aplicação de E em E, a qual transforma qualquer vetor em um outro vetor. Se $\boldsymbol{T}$ transforma u em z e v em w, isto é,*

$$\boldsymbol{T}u = z \quad e \quad \boldsymbol{Tv} = w. \tag{2.8}$$

E se $\boldsymbol{T}$ satisfaz as seguintes condições:

Para quaiquer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ $\in E$

$$\begin{cases} \boldsymbol{T(u + v) = Tu + Tv} \; \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E \\ \boldsymbol{T}(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{Tv} \;\; \forall \boldsymbol{v} \in E, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.9}$$

Onde u e v são dois vetores arbitrários e α é um escalar arbitrário então $\boldsymbol{T}$ é chamado de uma Transformação Linear. A qual também é chamado de Tensor de Segunda Ordem ou simplesmente um Tensor.

Uma definição alternativa e equivalente de uma transformação linear é dada por uma única propriedade.

$$\mathbf{T}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathbf{T} u + \beta \mathbf{T} v$$

Onde u e v são dois vetores arbitrários e α eβ são escalares arbitrários.

De forma geral, dados os vetores $u_1, ..., u_n$ e os escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ as relações anteriores podem ser resumidas como

$$\mathbf{T}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 \mathbf{T} u_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{T} u_n = \mathbf{T}(\alpha_i u_i) = \alpha_i T u_i \tag{2.10}$$

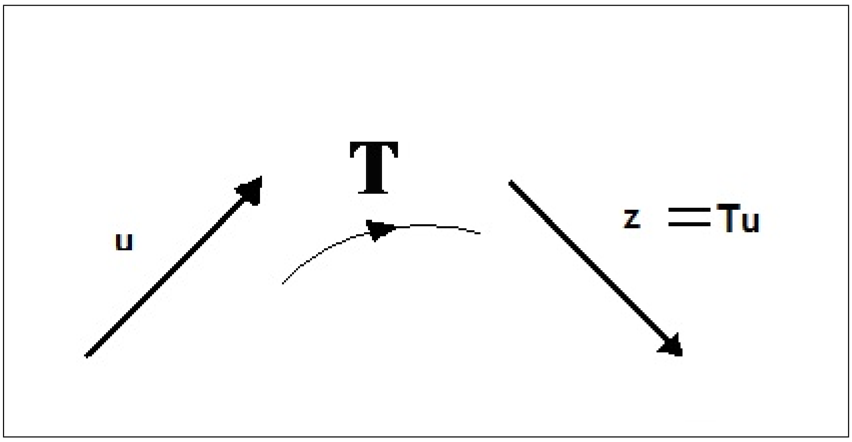

Figura 2.1: Transformação linear vetorial de um vetor u em z

Se dois tensores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$, transforma qualquer vetor arbitrário u de uma forma idêntica, então estes tensores são iguais, ou seja:

$$\mathbf{T}u = \mathbf{S}u = w$$

logo

$$\Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{S}$$

O conjunto de todos os tensores forma o espaço vetorial *Lin* se a adição e a multiplicação por escalar forem definidas ponto a ponto, ou seja, $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ e $\alpha\mathbf{S}(\ \alpha \in \mathbb{R})$ são os tensores definidos por

$$(\mathbf{S} + \mathbf{T})\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{T}\mathbf{v} \tag{2.11}$$

$$(\alpha\mathbf{S})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{S}\mathbf{v}) \tag{2.12}$$

Exemplo 2.2.1 *Considere* $\boldsymbol{T}$ *uma transformação a qual transforma todo vetor em um outro vetor fixo* n*.* $\boldsymbol{T}$ *é um tensor?*

Solução

Considere u e v dois vetores arbitrários, então pela definição de $\mathbf{T}$,

$$\mathbf{T}u \equiv n, \quad \mathbf{T}v \equiv n$$

e

$$\mathbf{T}(u+v) \equiv n$$

Como

$$\mathbf{T}(u+v) \neq \mathbf{T}u + \mathbf{T}v$$

Segue que $\mathbf{T}$ não é uma transformação linear, equivalentemente $\mathbf{T}$ não é uma tensor.

Exemplo 2.2.2 *Considere* $\boldsymbol{T}$ *uma transformação a qual transforma todo vetor em um vetor que é* $\boldsymbol{k}$ *vezes o vetor original.* $\boldsymbol{T}$ *é um tensor?*

Solução

Seja u e v dois vetores arbitrários e α e β escalares arbitrários, então por definição de $\mathbf{T}$, temos:

$$\mathbf{T}u \equiv ku \ e \ \mathbf{T}v \equiv kv$$

e

$$\mathbf{T}(\alpha u + \beta v) \equiv k(\alpha u + \beta v)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha u + \beta v) &\equiv k(\alpha u + \beta v) \\ &= k\alpha u + k\beta v \\ &= \alpha k u + \beta k v \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbf{T}(\alpha u + \beta v) \equiv \alpha \mathbf{T}u + \beta \mathbf{T}v$$

Portanto pela equação (2.8, $\mathbf{T}$ é um tensor).

Como vimos desde os exemplos, e a partir da definição do conceito de tensores acima podemos fazer uma associação biunívoca entre tensores e matrizes. Daí as operações equivalentes a 2.11 e 2.12 são, respectivamente, a soma e o produto por escalar usuais das matrizes.

2.2.1 Componentes de um Tensor

Definição 2.2.2 *Dado um vetor e uma base ortonormal* $\{e_1, e_2, e_3\}$*, as componenentes desse vetor em relação a essa base são dadas por*

$$u_i = e_i \cdot u \rightarrow \begin{cases} u_1 = e_1 \cdot \boldsymbol{u} \\ u_2 = e_2 \cdot \boldsymbol{u} \\ u_3 = e_3 \cdot \boldsymbol{u} \end{cases}$$

Por sua vez, denota-se o vetor $\mathbf{u}$ em termos de suas componentes como

$$\mathbf{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 = u_i e_i$$

Aplicando-se o tensor $\mathbf{T}$ ao vetor $\mathbf{u}$, tem-se um outro vetor $\mathbf{v} = \mathbf{Tu}$ que pela linearidade de $\mathbf{T}$, pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = \mathbf{Tu} = \mathbf{T}(u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3) = u_1 \mathbf{T} e_1 + u_2 \mathbf{T} e_2 + u_3 \mathbf{T} e_3 = u_i \mathbf{T} e_i$$

As componentes de $\mathbf{v}$ são dadas por

$$\left.\begin{aligned} v_1 = e_1 \cdot \mathbf{v} = u_1 e_1 \cdot \mathbf{T} e_1 + u_2 e_1 \cdot \mathbf{T} e_2 + u_3 e_1 \cdot \mathbf{T} e_3 \\ v_2 = e_2 \cdot \mathbf{v} = u_2 e_2 \cdot \mathbf{T} e_1 + u_2 e_2 \cdot \mathbf{T} e_2 + u_3 e_2 \cdot \mathbf{T} e_3 \\ v_3 = e_3 \cdot \mathbf{v} = u_3 e_3 \cdot \mathbf{T} e_1 + u_2 e_3 \cdot \mathbf{T} e_2 + u_3 e_3 \cdot \mathbf{T} e_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow v_i = u_j e_i \cdot \mathbf{T} e_j$$

Neste caso termos como $e_i \cdot \mathbf{T} e_j = T_{11}$ e $e_2 \cdot \mathbf{T} e_1 = T_{21}$ são interpretados como as componentes de $\mathbf{T}$ nas direções e_1 *e* e_2 respectivamente. De uma forma geral, defini-se T_{ij} como sendo as componentes do tensor $\mathbf{T}$, dadas por

$$T_{ij} = e_i \cdot \mathbf{T} e_j$$

A partir daí, a equação **v=Tu** pode ser escrita na forma de componentes como

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + T_{13}u_3 \\ v_2 &= T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + T_{23}u_3 \\ v_3 &= T_{31}u_1 + T_{32}u_2 + T_{33}u_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow v_i = T_{ij}u_j$$

Esta relação pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \rightarrow (\mathbf{v}) = (\mathbf{T})(\mathbf{u}),$$

com $(\mathbf{T})$ denominada a matriz do tensor $\mathbf{T}$ relativamente à base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Os termos nas colunas de $[\mathbf{T}]$ são, respectivamente, os coeficientes de Te_1, Te_2 *e* Te_3. Portanto temos:

$$\left.\begin{aligned} Te_1 &= T_{11}e_1 + T_{21}e_2 + T_{31}e_3 \\ Te_2 &= T_{12}e_1 + T_{22}e_2 + T_{32}e_3 \\ Te_3 &= T_{13}e_1 + T_{23}e_2 + T_{33}e_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow Te_i = T_{ji}e_j.$$

Temos que as componentes de $\mathbf{T}$, assim como de um vetor $\mathbf{v}$, dependem do sistema de coordenadas adotado através dos vetores unitários da base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Portanto um tensor terá uma matriz para cada base considerada.

2.2.2 Tensor Nulo

Definição 2.2.3 *O elemento nulo do espaço de tensores Lin é o tensor nulo* ***0*** *que transforma qualquer vetor no vetor nulo, isto é,*

$$0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Temos que a forma matricial associada a esse tensor é aquela cujos coeficientes são todos nulos, ou seja,

$$[\mathbf{0}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 2.2.4 **2.2.3 Tensor Identidade**

O tensor identidade em Lin é definido por,

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \forall \boldsymbol{v} \in E$$

Em particular, tem-se

$$\mathbf{I}e_1 = e_1 \quad \mathbf{I}e_2 = e_2 \quad \mathbf{I}e_3 = e_3$$

Daí, as componentes do tensor identidade são

$$I_{ij} = e_i \cdot \mathbf{I}e_j = e_i \cdot e_j = \delta_{ij},$$

e a representação matricial associada a esse tensor é a matriz identidade que conhecemos

$$[\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Operações com tensores

Definição 2.2.5 *Soma e subtração de tensores: dois tensores de mesma ordem e tipo podem ser somados ou subtraidos, resultando em outro tensor de mesma ordem e tipo, isto é,*

$$(\boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{T})_{ij} = e_i \cdot \boldsymbol{S}e_j \pm e_i \cdot \boldsymbol{T}e_j = \boldsymbol{S}_{ij} \pm \boldsymbol{T}_{ij}$$

Em forma matricial:

$$[\mathbf{S} \pm \mathbf{T}] = [\mathbf{S}] \pm [\mathbf{T}]$$

Definição 2.2.6 *Produto de tensores: O produto* $\boldsymbol{ST}$ *de dois tensores* $\boldsymbol{S}$ *e* $\boldsymbol{T}$ *é o tensor que define a transformação composta,*

$$\boldsymbol{ST} = \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T},$$

ou seja,

$$(\boldsymbol{ST})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S(Tv)}\ \forall \boldsymbol{v} \in E$$

As componentes de $\mathbf{ST}$ são dadas por

$$(\mathbf{ST})_{ij} = e_i \cdot (\mathbf{ST})e_j = e_i \cdot \mathbf{S}(\mathbf{T}e_j) = e_i \cdot \mathbf{S}T_{mj}e_m = T_{mj}(e_i \cdot Se_m) = S_{im}T_{mj},$$

e por sua vez

$$(TS)_{ij} = T_{im}S_{mj}.$$

As expressões anteriores podem ser escritas matricialmente como a seguir:

$$[\mathbf{ST}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}] \quad [\mathbf{TS}] = [\mathbf{T}][\mathbf{S}]$$

e, portanto, de forma geral, o produto de tensores não é comutativo, isto é,

$$\mathbf{ST} \neq \mathbf{TS}$$

Tomando os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{L}$ verifica-se, com base na associatividade do produto entre matrizes, que

$$\begin{aligned}(\mathbf{S(TL)})\mathbf{v} &= \mathbf{S}((\mathbf{TL})\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{T}(\mathbf{Lv})) = (\mathbf{ST})(\mathbf{Lv}) \\ \Rightarrow \mathbf{S(TL)} &= (\mathbf{ST})\mathbf{L}.\end{aligned}$$

Portanto o produto entre tensores também é associativo.

2.2.5 Tensor Transposto

Definição 2.2.7 *O tensor transposto de* $\boldsymbol{S}$*, denotado por* $\boldsymbol{S}^T$*, é definido como único tensor satisfazendo a propriedade*

$$\langle Su, v\rangle = \left\langle u, S^T v\right\rangle \equiv (\boldsymbol{Su})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in E$$

Da definição anterior, tem-se

$$(\mathbf{S}e_i)\cdot e_j = e_i\cdot(\mathbf{S}^T e_j) \Rightarrow S_{ji} = \mathbf{S}^T_{ij} \Rightarrow [\mathbf{S}]^T = [\mathbf{S}^T] \tag{2.13}$$

Da definição acima segue que:

1. $(\mathbf{T}^T)^T = \mathbf{T}$;

   Demonstração:

   Da definição segue que:

   $$(T^T u)v = u((T^T)^T v)$$

   Daí

   $$(T^T u)v = u(Tv)$$

   Logo, para mostrarmos que $(T^T)^T = T$, basta verificarmos que

   $$u((T^T)^T v) - u(Tv) = 0$$

   Pela distributividade á esquerda temos

   $$u[(T^T)^T v - Tv] = 0$$

   Daí para $u \neq 0$ temos

   $$(T^T)^T v - Tv = 0$$

Agora pela distributividade á direita segue

$$v[(T^T)^T - T] = 0$$

Logo para $v \neq 0$ segue

$$(T^T)^T - T = 0$$

Portanto $(T^T)^T = T$

2. $(\mathbf{S} + \mathbf{T})^T = \mathbf{S}^T + \mathbf{T}^T$;

Demonstração:

Com efeito, da definição temos

$$\left\langle (S+T)^T u, v \right\rangle = \left\langle u, (S+T)^T v \right\rangle$$

Daí pelo item anterior,

$$\left\langle (S+T)^T u, v \right\rangle = \langle u, (S+T)v \rangle$$

Aplicando a propriedade distributiva no segundo menbro da expressão temos

$$\langle u, Sv + Tv \rangle$$

Agora pela definição 1.9.1 item (1) segue

$$\begin{aligned}
\langle u, Sv + Tv \rangle &= \langle u, Sv \rangle + \langle u, Tv \rangle \\
&= \left\langle (S^T u), v \right\rangle + \left\langle (T^T u), v \right\rangle \\
&= \left\langle ((S^T + T^T)u), v \right\rangle .
\end{aligned}$$

Portanto $\forall u, v \in Lin$ vale

$$(S+T)^T = S^T + T^T$$

3. $(\mathbf{ST})^T = \mathbf{T}^T\mathbf{S}^T$.

Demonstração:

Seja

$$(ST) = (ST)_{ij} = S_{im}T_{mj}$$

Daí

$$\begin{aligned}(ST)^T = \left((ST)^T\right)_{ij} = (ST)_{ji} &= S_{jm}T_{mi} \\ &= S^T_{mj}T^T_{im} \\ &= T^T_{jm}S^T_{mi}.\end{aligned}$$

Portanto

$$(ST)^T = T^T S^T$$

2.2.6 Tensor Simétrico e Antissimétrico

Definição 2.2.8 *Tensor simétrico: Um tensor* $\boldsymbol{S}$ *é chamdo simétrico se*

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^T$$

Assim as componentes de um tensor simétrico possuem a propriedade,

$$S_{ij} = \mathbf{S}^T_{ij} = S_{ji}$$

Matricialmente temos,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}^T$$

Ou seja,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}$$

Definição 2.2.9 *Tensor Antissimétrico: Um tensor* $\boldsymbol{S}$ *é dito antissimétrico se*

$$\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{S}^T$$

Logo as componentes desse tensor satisfazem a relação

$$S_{ij} = -(\mathbf{S}^T)_{ij} = -S_{ji}$$

Matricialmente temos

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{pmatrix}^T$$

Ou seja,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -S_{21} & -S_{31} \\ -S_{12} & 0 & -S_{32} \\ -S_{13} & -S_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Todo tensor $\mathbf{S}$ pode ser escrito, de forma única, como a soma de um tensor simétrico $\mathbf{E}$ e um tensor antissimétrico $\mathbf{W}$, ou seja,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} + \mathbf{W}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T), \\
\mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T).
\end{aligned}$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^T &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}^T + \mathbf{S}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) = \mathbf{E}, \\
\mathbf{W}^T &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}^T - \mathbf{S}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T) = \textbf{-W}
\end{aligned}$$

Os tensores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{W}$ são chamados, parte simétrica e antissimétrica, respectivamente de $\mathbf{S}$

2.2.7 Produto Tensorial de Vetores

Definição 2.2.10 *O produto tensorial de dois vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é um tensor de 2^a ordem, $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$, este tensor pode atuar num vetor $\boldsymbol{w}$, ou seja, o produto tensorial $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ é definido como a transformação que associa a cada vetor $\boldsymbol{w}$, o vetor*

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}.$$

Assim de acordo com a expressão acima, o tensor $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ atua no vetor $\mathbf{w}$, sendo o resultado um vetor que tem a direção e sentido do vetor $\mathbf{u}$ e cujo comprimento é igual a $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|||\mathbf{u}||$, ou seja, o comprimento original de $\mathbf{u}$ multiplicado pelo módulo do escalar de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Em outras palavras considerando os espaços vetoriais $\mathbf{E}$, de dimensão p, e $\mathbf{F}$ de dimensão q(sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$), denomina-se o produto tensorial dos dois espaços um terceiro espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, que será designado por $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ desde que satisfaça as seguintes condições:

1. A cada par de vetores $(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ com $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{F}$, está associado um elemento $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$, chamado o produto tensorial de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$ e designado por $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, de tal modo que

   $a)\mathbf{u} \otimes (v_1 + v_2) = \mathbf{u} \otimes v_1 + u \otimes v_2$ (Lei Distributiva)

   $b)(u_1 + u_2) \otimes \mathbf{v} = u_1 \otimes \mathbf{v} + u_2 \otimes \mathbf{v}$ (Lei Distributiva)

   $c)(\lambda \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \otimes (\lambda \mathbf{v})$ (Lei Associativa).

2. Se $\{e_1, ..., e_p\}$ for uma base de vetores de $\mathbf{E}$ e $\{f_1, ..., f_q\}$ for uma base de vetores de $\mathbf{F}$, os pq vetores $e_i \otimes f_\alpha$ constituem uma base de $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ (espaço de dimensão pq).

As condições 1: a) b) c) e 2 permite-nos concluir que, com $\mathbf{u} = u_i e_i$ e $\mathbf{v} = v_\alpha f_\alpha$, o elemento $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ do produto pode ser escrito na forma

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u_i e_i) \otimes (v_\alpha f_\alpha) = u_i v_\alpha (e_i \otimes f_\alpha)$$

com pq escalares $u_i v_\alpha$ $(i = 1, ..., p; \alpha = 1, ..., q)$ como componentes do vetor $u \otimes v$ na base tensorial $e_i \otimes f_\alpha$.

2.2.8 Traço de um tensor

Definição 2.2.11 *O traço de um produto tensorial de dois vetores* $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})$ *é definido como um escalar dado por* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, *ou seja,*

$$tr(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$$

Da definição segue a linearidade do traço:

$$tr[(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}] = (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = \alpha tr[\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}] + \beta tr[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}].$$

Tomando as componentes cartesianas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ou seja, $\mathbf{u} = u_i e_i$ e $\mathbf{v} = v_i e_i$, verifica-se que

$$tr(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u_i v_i = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ii} \quad \text{com } i = 1, ...3.$$

Como qualquer tensor $\mathbf{T}$ pode ser escrito na forma $\mathbf{T} = T_{ij}(e_i \otimes e_j)$, o traço de $\mathbf{T}$ é obtido como

$$tr\mathbf{T} = tr(T_{ij}(e_i \otimes e_j)) = T_{ij}tr(e_i \otimes e_j) = T_{ij}(e_i \cdot e_j) = T_{ij}\delta_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

Logo, o traço de um tensor é bem definido através da relação

$$tr\mathbf{T} = T_{ii}$$

Verifica-se que o traço de um tensor possui ainda as seguintes propriedades

1. $tr\mathbf{T}^T = tr\mathbf{T}$

   Demonstração

   Por definição

   $$tr(u \otimes v) = (u \cdot v) \tag{2.14}$$

   logo,

   $$tr\mathbf{T}^T = tr(\mathbf{T}_{ij}(e_i \otimes e_j)^T)$$

   Por definição de transposto

   $$= tr(\mathbf{T}_{ij}(e_j \otimes e_i))$$

   Daí pela definição (2.14)

   $$\mathbf{T}_{ij}tr(e_i \otimes e_j) = \mathbf{T}_{ij}(e_j \cdot e_i) = \mathbf{T}_{ij}\delta_{ji} = \mathbf{T}_{ii} = tr\mathbf{T}$$

   Portanto

   $$tr\mathbf{T}^T = tr\mathbf{T}$$

2. $tr(\mathbf{ST}) = tr(\mathbf{TS})$.

2.2.9 Determinante de um tensor

Definição 2.2.12 *O determinante de um tensor* $\boldsymbol{S}$ *é definido como sendo o determinante de sua matriz associada* $[\boldsymbol{S}]$*:*

$$det\boldsymbol{S} = det[\boldsymbol{S}],$$

sendo independente da escolha da base.

Definição 2.2.13 *Um tensor* $\boldsymbol{S}$ *é inversível se existe um tensor* S^{-1} *chamado inverso de* $\boldsymbol{S}$*, tal que*

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

Segue da definição acima que um tensor é inversível se, e somente se $det\mathbf{S} \neq 0$. São válidas as seguinte identidades:

1. $det(\mathbf{ST}) = (det\mathbf{S})(det\mathbf{T})$,

2. $\det\mathbf{S}^T = \det\mathbf{S}$,

3. $\det(\mathbf{S}^{-1}) = \det(\mathbf{S})^{-1}$,

4. $(\mathbf{ST})^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}$,

5. $(\mathbf{S}^{-1})^T = (\mathbf{S}^T)^{-1}$

   Demostração

   Temos que

$$S^{-1} \cdot S = I$$

   Fazendo o transposto do produto temos

$$(S^{-1} \cdot S)^T = I$$

$$\Downarrow$$

$$(S^T)(S^{-1})^T = I$$

Multiplicando por $(S^T)^{-1}$ ambos os lados temos

$$(S^T)^{-1} \cdot S^T \cdot (S^{-1})^T = (S^T)^{-1}$$

Portanto

$$(S^{-1})^T = (S^T)^{-1}$$

2.2.10 Tensor Ortogonal

Definição 2.2.14 *Um tensor ortogonal é uma transformação linear sob a qual os vetores transformados preservam seus comprimentos e ângulos entre si, ver figura(2.2)*

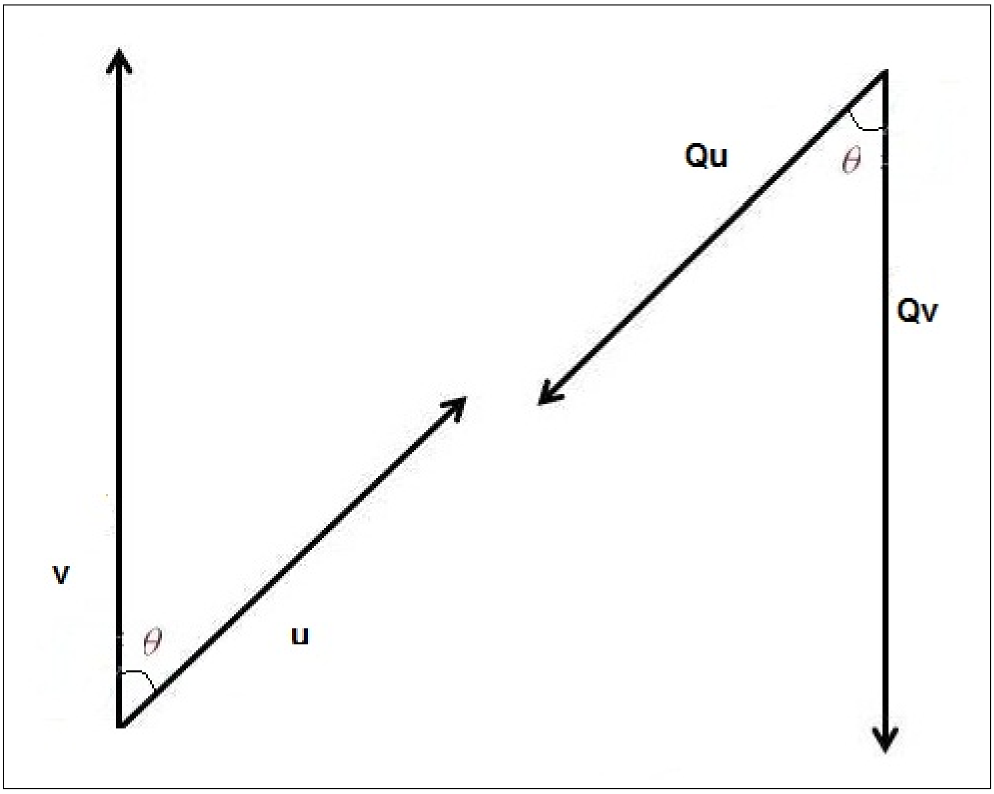

Figura 2.2: Tensor ortogonal

Onde $||\boldsymbol{u}|| = ||\boldsymbol{Qu}||$ *e* $||\boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{Qv}||$.

Ou seja,

$$\boldsymbol{Qu} \cdot \boldsymbol{Qv} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in E$$

Da definição de tensor transposto, segue que

$$\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qu}.$$

Assim,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qu} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{Iv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qv} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{v} = 0.$$

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são arbitrários, segue-se que

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

Por outro lado, o transposto do tensor identidade é o próprio tensor identidade, portanto

$$(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})^T = \mathbf{I}^T \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$$

Logo, a condição necessária e suficiente para que $\mathbf{Q}$ seja ortogonal é

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I},$$

Em representação matricial,

$$[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^T = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{Q}] = [\mathbf{I}]$$

Um tensor ortogonal com determinante positivo é chamado rotação. Todo tensor ortogonal é uma rotação ou produto de uma rotação por $\mathbf{I}$. Se $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ é uma rotação, então o conjunto de todos os vetores $\mathbf{v}$ tais que

$$\mathbf{Rv} = \mathbf{v}$$

formam um subespaço unidimensional de E chamado de R. Em outras palavras, uma-rotação R se dá em torno do eixo gerado pelo vetor **v**.

De forma geral, temos

$$det(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = det(\mathbf{I}) \Rightarrow det(\mathbf{Q})det(\mathbf{Q}^T) = 1 \Rightarrow (det\mathbf{Q})^2 = 1 \Rightarrow det\mathbf{Q} = \pm 1$$

Se det**Q**=+1 então pela definição anterior, **Q** é uma rotação. Por outro lado, se det**Q**=-1, **Q** é uma reflexão.

2.2.11 Tensor Positivo-Definido

Definição 2.2.15 *Um tensor* $\boldsymbol{S}$ *é positivo-definido se*

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{v} > 0$$

para todos os vetores $\boldsymbol{v} \neq 0$

2.2.12 Lei de Transformação

Lei de transformação para vetores e tensores: Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ duas bases cartesianas distintas. Notemos que é possivel fazer com que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ coincida com $\{e_1, e_2, e_3\}$ através de uma rotação rígida, no caso em que os sistemas possuem a mesma orientação, ou de uma rotação seguida de uma reflexão, no caso em que suas orientações são distintas.

Observe que desta forma, $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ estão relacionados por um tensor ortogonal **Q** da seguinte maneira:

$$e'_i = Q^T e_i = Q_{mi} e_m \rightarrow \begin{cases} e'_1 = Q_{11}e_1 + Q_{21}e_2 + Q_{31}e_3 \\ e'_2 = Q_{12}e_1 + Q_{22}e_2 + Q_{32}e_3 \\ e'_3 = Q_{13}e_1 + Q_{23}e_2 + Q_{33}e_3 \end{cases}$$

sendo $Q_{mi}Q_{mj} = Q_{im}Q_{mj} = \delta_{ij}$, ou ainda, $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$

Tomando-se agora um vetor $\mathbf{a}$ qualquer, as suas componentes nos dois sistemas de coordenadas são escritas, respectivamente, como $a_i = e_i \cdot a$ e $a'_i = e'_i \cdot \mathbf{a}$. Uma vez que $a'_i = e'_i \cdot \mathbf{a} = Q_{mi}e_m \cdot \mathbf{a}$, tem-se

$$a'_i = Q_{mi}a_m,$$

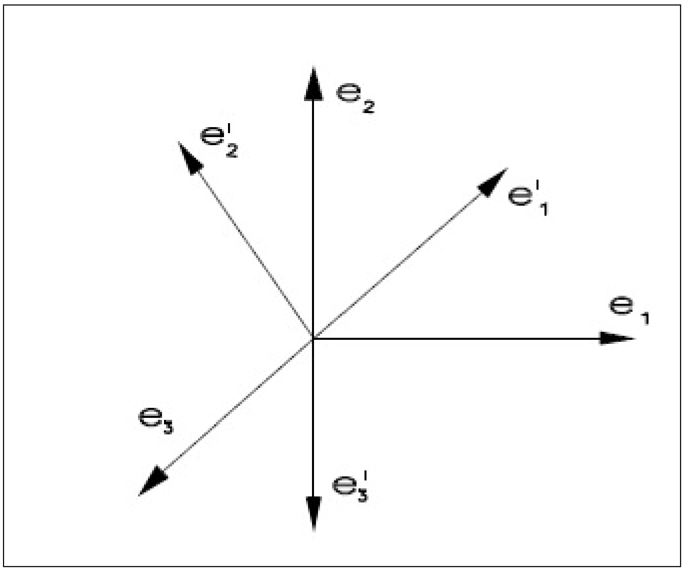

Figura 2.3: Sistema cartesiano retangular

ou em notação matricial

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}_{e'_i} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{pmatrix}^{e_i}_{e'_i} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{e_i} \rightarrow (\mathbf{a})' = (\mathbf{Q})^T(\mathbf{a}).$$

As expressões anteriores constituem-se na lei de transformação das componentes de um mesmo vetor com respeito a diferentes bases cartesianas. Vale ressaltar que $(\mathbf{a})' = (\mathbf{a})_{e'_i}$ e $(\mathbf{a}) = (\mathbf{a})_{e_i}$ são representações matriciais do mesmo vetor em bases distintas. Assim temos que $\mathbf{a}' = \mathbf{Q}^T\mathbf{a}$ indica que $\mathbf{a}'$ é o vetor transformado de $\mathbf{a}$ através de Q^T ($\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$ são dois vetores diferentes enquanto que (a) e $(a)'$ são duas matrizes que representam o mesmo vetor).

Considerando agora um tensor $\mathbf{T}$, suas componentes em relação às bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ são respectivamente, $T_{ij} = e_i \cdot \mathbf{T}e_j$ e $T'_{ij} = e'_i \cdot \mathbf{T}e'_j$. Lembrando que $e'_i = Q_{mi}e_m$, tem-se

$$T'_{ij} = e'_i \cdot \mathbf{T}e'_j = Q_{mi}e_m \cdot \mathbf{T}Q_{nj}e_n = Q_{mi}Q_{nj}(e_m \cdot \mathbf{T}e_n).$$

Logo,

$$T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$$

ou matricialmente

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{Q}],$$

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix}^{e'_i}_{e'_i} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}^{e_i}_{e'_i} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}^{e'_i}_{e_i}.$$

De maneira análoga,

$$T_{ij} = Q_{im}Q_{jn}T'_{mn}$$

ou ainda,

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{T}]'[\mathbf{Q}]^T$$

.

2.3 Funções Tensoriais de um escalar

Seja **T**=**T**(t) uma função tensorial de um escalar t:

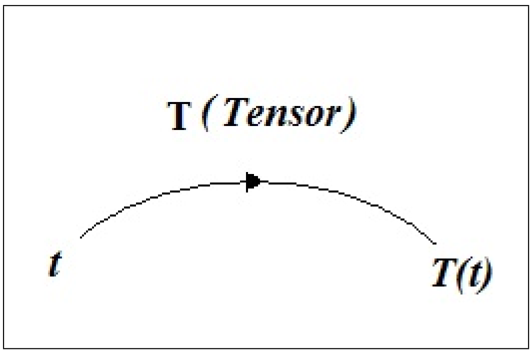

Figura 2.4: Tesorial de um escalar

Definição 2.3.1 *A derivada de **T** com relação a t é definida ser um tensor de segunda* *ordem dado da seguinte maneira*

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{T}(t+\Delta t) - \boldsymbol{T}(t)}{\Delta t}.$$

Na forma indicial temos

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{T}_{ij}(t+\Delta t) - \mathbf{T}_{ij}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{T}_{ij}}{dt}.$$

Então da definição acima as seguintes regras operacionais podem ser estabelecidas:

$$\left[\frac{d(T+S)}{dt}\right] = \left[\frac{d(T+S)}{dt}\right] = \frac{d(T)}{dt} + \frac{d(S)}{dt} \text{ ou } \left[\frac{[d(T+S)}{dt}\right]_{ij} \begin{aligned} &= \frac{d[T+S]_{ij}}{dt} \\ &= \frac{dT_{ij}}{dt} + \frac{dS_{ij}}{dt} \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\left[\frac{d(\mathbf{TS})}{dt}\right] = \frac{d[\mathbf{TS}]}{dt} = \frac{d(T)}{dt}S + T\frac{d(S)}{dt} \text{ ou } \left[\frac{d(\mathbf{TS})}{dt}\right]_{ij} \begin{aligned} &= \frac{d[\mathbf{TS}]_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{im}\mathbf{S}_{mj}) \\ &= \frac{d\mathbf{T}_{im}}{dt}\mathbf{S}_{mj} + \mathbf{T}_{im}\frac{d\mathbf{S}_{mj}}{dt} \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\left[\frac{d\mathbf{T}^T}{dt}\right] = \frac{d[\mathbf{T}^T]}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right]^T \text{ ou } \left[\frac{d\mathbf{T}^T}{dt}\right]_{ij} = \frac{d[\mathbf{T}]^T_{ij}}{dt} = \frac{d[\mathbf{T}_{ij}]^T}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{T}_{ij}}{dt}\right]^T \tag{2.17}$$

2.4 Gradiente de um campo tensorial

O gradiente de v(denotado por ∇v ou $gradv$) é definido ser um tensor de segunda ordem no qual, quando operado sobre dr dá a diferença de v em $r + dr$ e r, ou seja,

$$dv(r) = v(r+dr) - v(r) \longrightarrow dv(r) \equiv \nabla v \cdot dv$$

Seja uma base ortonormal $\{e_k\}$. Em particular, as componentes de ∇v na direção e_1

é dada por:

$$[\nabla v]_1 = \nabla v \cdot e_1 = \left[\frac{dv}{dr}\right]_{e_1} \equiv \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

analogamente para as demais direções.

De forma geral temos

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{e_k} \equiv \nabla \cdot v \cdot e = \frac{\partial v}{\partial x_k}$$

Ou seja,

$$[\nabla v] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Que é o tensor gradiente de um campo vetorial v.

2.5 Divergente de um campo tensorial

Seja $u(r)$ uma campo vetorial. A divergência de $u(r)$ é definida ser um campo escalar dado pelo traço do gradiente de u. Isto é,

$$\begin{aligned} divu &\equiv tr[\nabla u] \\ &= [\nabla u]_{ii} \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{T}$(r) um campo tensorial de segunda ordem, o divergente de $\mathbf{T}$ é definido ser um campo vetorial denotado por div$\mathbf{T}$, tal que para qualquer vetor u tem-se

$$(div\mathbf{T})u \equiv div(\mathbf{T}^T u) - tr(\mathbf{T}^T(\nabla u)) \tag{2.18}$$

Para achar as componentes cartesianas do vetor $div\mathbf{T}$, seja $v = div\mathbf{T}$, então a partir da equação (2.18)

$$\begin{aligned} v_i &= ve_i = (div\mathbf{T})e_i \\ v_i &= div(\mathbf{T}^T e_i) - tr(\mathbf{T}^T \nabla e_i) \end{aligned}$$

Note que $\nabla e_i = 0$ para coodernadas cartesianas, logo

$$\begin{aligned} v_i &= div(\mathbf{T}^T e_i) - 0 = div(\mathbf{T}^T_{mi} e_m) \\ v_i &= div(\mathbf{T}^T_{mi} e_m) = \frac{\partial \mathbf{T}_{im}}{\partial x_m} e_m \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} v_i &= div(T_{i1}e_1 + T_{i2}e_2 + T_{i3}e_3) \\ v_i &= \frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3} e_3 \end{aligned}$$

Comparando com $divu$ temos

$$v_i = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} e_k$$

Em outras palavras, em um sistema de coordenadas cartesianas as componentes v_i do div**T** são dados por:

$$div\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}_{im} e_i}{\partial x_m}$$

Observe que se:

$$div\mathbf{T} - tr[\nabla \mathbf{T}] = [\nabla \mathbf{T}_{ii}]$$

Então

$$div\mathbf{T}u = div(\mathbf{T}^T u) - tr[\mathbf{T}^T \nabla u]$$

logo,

$$tr[\nabla \mathbf{T}]u = tr[\nabla(\mathbf{T}^T u)] - tr[\mathbf{T}^T \nabla u].$$

Observação 1

1. O gradiente levanta a ordem de um tensor de ordem n a ordem n+1

2. O divergente abaixa a ordem de um tensor de ordem n a ordem n-1

Observação 2

Todo tensor pode ser expresso em termos de suas componentes relativas à base tensorial, isto é:

1. $\mathbf{u} = u_m e_m$

2. $\mathbf{T} = T_{ij}(e_i \otimes e_j)$

3. $grad(v)$ ou $\nabla v = \dfrac{\partial}{\partial x_k} v_n (e_n \otimes e_k)$

4. $div(v) = \dfrac{\partial}{\partial x_k} v_n (e_n \cdot e_k) = \dfrac{\partial}{\partial x_k} v_n \delta_{nk} = \dfrac{\partial}{\partial x_k} v_k$

2.6 Gradiente de um tensor de segunda ordem T

O gradiente de um tensor de segunda ordem $\mathbf{T}$ é por definição um tensor de terceira ordem que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\nabla(\mathbf{T}^T a) = (\nabla \mathbf{T})^T a.$$

Vejamos que esta operação está bem definida, para isto note que

$$\begin{aligned} \nabla(T^T a) &= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}(e_j \otimes e_i) a_m e_m] \otimes e_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij} a_m (e_j \otimes e_i) e_m] \otimes e_k \end{aligned} \tag{2.19}$$

Daí pela definição 2.2.10

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}a_m\delta_{mi}e_j]\otimes e_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}a_m\delta_{mi}(e_j\otimes e_k)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}a_i(e_j\otimes e_k)] \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} (\nabla\mathbf{T})^T a &= \left[\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}(e_i\otimes e_j\otimes e_k)\right]^T a_m e_m \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}(e_i\otimes e_j\otimes e_k)^T a_m e_m \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por 2.13

$$= \frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}a_m(e_j\otimes e_k\otimes e_i)e_m \tag{2.22}$$

Pela definição 2.2.10

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}a_m(e_m\cdot e_i)(e_j\otimes e_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}a_m\delta_{mi}(e_j\otimes e_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}a_i(e_j\otimes e_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}a_i(e_j\otimes e_k)] \end{aligned} \tag{2.23}$$

Daí por 2.20 e 2.23 segue que

$$\nabla(\mathbf{T}^T a) = \frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}a_i(e_j\otimes e_k) = (\nabla\mathbf{T})^T a.$$

Proposição 2.6.1 *Dado $\boldsymbol{T}\in Lin$ e $\boldsymbol{u}\in V$, V um espaço vetorial, tem-se que:*

$$\nabla(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{u}) = (\nabla\boldsymbol{T})^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}^T\nabla\boldsymbol{u}$$

Demonstração

De fato, o resultado segue de considerar **u** constante e aplicar a definição do gradiente de um tensor de segunda ordem e considerando **T** constante, obtemos o resultado acima.

Agora demonstraremos a afirmação acima através de suas componentes.

Note que,

$$\nabla(\mathbf{T}^T\mathbf{u}) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}(e_i \otimes e_j)^T u_m e_m] \otimes e_k$$

Por 2.13

$$= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}u_m(e_j \otimes e_i)e_m] \otimes e_k$$

Daí pela definição 2.2.10

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}u_m\delta_{mi}e_j] \otimes e_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ij}u_i](e_j \otimes e_k) \end{aligned}$$

Agora por 2.16 segue

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}\right)u_i(e_j \otimes e_k) + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}u_i\right)T_{ij}(e_j \otimes e_k) \\ &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}u_i(e_j \otimes e_k) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}T_{ij}(e_j \otimes e_k) \\ &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}u_m\delta_{mi}(e_j \otimes e_k) + T_{ij}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_k}\delta_{ri}e_j\right) \otimes e_k \\ &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}u_m(e_m \cdot e_i)e_j \otimes e_k + T_{ij}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_k}(e_i \cdot e_r)e_j\right) \otimes e_k \end{aligned}$$

Agora usando a definição 2.2.10

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} u_m (e_j \otimes e_k \otimes e_i) e_m + T_{ij} \frac{\partial u_r}{\partial x_k} (e_j \otimes e_i)(e_r \otimes e_k) \\
&= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} (e_i \otimes e_j \otimes e_k)^T u_m e_m + T_{ij} (e_j \otimes e_i) \frac{\partial u_r}{\partial x_k} (e_r \otimes e_k) \\
&= (\nabla \mathbf{T})^T \mathbf{u} + \mathbf{T}^T \nabla \mathbf{u}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\nabla(\mathbf{T}^T \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{T})^T \mathbf{u} + \mathbf{T}^T \nabla \mathbf{u}$$

Proposição 2.6.2 *De forma análoga, seja a função escalar ϕ e aplicando o gradiente de ϕ a um tensor de terceira ordem $\boldsymbol{T}$ temos que:*

$$\nabla(\phi \boldsymbol{T}) = \phi(\nabla \boldsymbol{T}) + \boldsymbol{T} \otimes \nabla \phi$$

Demonstração

De fato, note que

$$\nabla(\phi \mathbf{T}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\phi T_{ij})(e_i \otimes e_j \otimes e_k)$$

Pela propriedade 2.16

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) T_{ij}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) + \phi \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \\
&= T_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) + \phi \nabla \mathbf{T} \\
&= \mathbf{T} \otimes \nabla \phi + \phi \nabla \mathbf{T}.
\end{aligned}
$$

2.7 Divergente de um tensor de segunda ordem

Com base nos resultados da seção anterior podemos introduzir a noção de divergente da composição de tensores de segunda ordem, onde a expressão do div($\mathbf{ST}$) é

$$\begin{aligned} div(\mathbf{ST}) \cdot a &= div((\mathbf{ST})^T a) \\ &= div(\mathbf{T}^T \mathbf{S}^T a) \\ &= \mathbf{T} \cdot \nabla(\mathbf{S}^T a) + \mathbf{S}^T a \cdot div\mathbf{T} \\ &= (\nabla \mathbf{S})\mathbf{T} \cdot a + a \cdot \mathbf{S} div\mathbf{T} \\ &= [(\nabla \mathbf{S})\mathbf{T} + \mathbf{S} div\mathbf{T}] \cdot a, \end{aligned} \tag{2.24}$$

de onde segue que

$$div(\mathbf{ST}) = (\nabla \mathbf{S})\mathbf{T} + \mathbf{S} div\mathbf{T}$$

2.8 Laplaciano de um tensor de segunda ordem

Definição 2.8.1 *Com base no que vimos anteriormente, podemos estabelecer uma operação na qual obtemos o laplaciano de um tensor, que é um outro tensor. Dado $T \in Lin$, tal operação será denotada por $\Delta \boldsymbol{T}$ e é definida como sendo*

$$\Delta \boldsymbol{T} = [\nabla(\nabla \boldsymbol{T})]I$$

Observe que $\nabla(\nabla\mathbf{T})$ é de quarta ordem. Assim $\Delta\mathbf{T}$ pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{T} &= [\nabla(\nabla\mathbf{T})]I \\ &= \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ij}(e_i \otimes e_j) \otimes e_k\right] \otimes e_l \delta_{rs}(e_r \otimes e_s) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ij}\delta_{rs}(e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l)(e_r \otimes e_s) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ij}\delta_{rs}((e_k \otimes e_l) \cdot (e_r \otimes e_s))(e_i \otimes e_j) \end{aligned}$$

Usando a definição 2.2.10

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}\delta_{rs}\delta_{kr}\delta_{ls}(e_i \otimes e_j)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}\delta_{ks}\delta_{sl}(e_i \otimes e_j)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}\delta_{ks}(e_i \otimes e_j)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{lk}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}(e_i \otimes e_j)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ij}(e_i \otimes e_j)\\
&= \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial^2 x_k}(e_i \otimes e_j).
\end{aligned}
$$

Que é o laplaciano de cada uma das componentes do tensor $\mathbf{T}$. Outra forma de escrevê-lo é da seguinte forma

$$\Delta\mathbf{T} = div(\nabla\mathbf{T}),$$

Com efeito, definindo um tensor de terceira ordem como sendo

$$div\mathbf{T} = (\nabla\mathbf{T})I,$$

Tem-se

$$div(\nabla\mathbf{T}) = [\nabla(\nabla\mathbf{T})]I = \Delta\mathbf{T}$$

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Teoria da Elasticidade

Definição 3.1.1 *Elasticidade: Em Física e Engenharia, o termo elasticidade se refere a propriedade de certos materiais sofrerem deformações reversíveis quando aplicado uma determinada força.*

Definição 3.1.2 *Tensor Tensão: Estudado em mecânica dos meios contínuos, o tensor tensão é o tensor que aborda a distribuição de tensões e esforços internos nos meios contínuos.*

Definição 3.1.3 *Tensor de Cauchy: Dado uma distribuição de tensões internas sobre a geometria de um meio contínuo deformado satisfazendo as condições do princípio de Cauchy, garantido pelo teorema de Cauchy(sobre tensões de um corpo), existe um campo tensorial* $\boldsymbol{T}$ *simétrico definido sobre tal geometria com as seguintes condições:*

1. $t(x,n) = [\boldsymbol{T}_c(x)](n)$

2. $\nabla \cdot \boldsymbol{T}_c(x) + f(x) = 0$

3. $\boldsymbol{T}_c(x) = \boldsymbol{T}_c^T(x).$

Fixado então um sistema de referência ortogonal, teremos que o tensor de Cauchy será dado por uma matriz simétrica, com os seguinte componentes:

$$[\mathbf{T}_c] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Definição 3.1.4 *Tensão: A Tensão em um determinado ponto é definido como o limite da força aplicado sobre uma pequena região sobre um plano π que contenha o ponto da área da região, ou seja, a tensão é a força aplicada por unidade de superfície, e depende do ponto escolhido, do estado tensional do sólido e da orientação do plano escolhido à calcular este limite.*

A normal ao plano escohido n_π e a tensão t_π em um ponto estão relacionado por:

$$t_\pi = \mathbf{T}(n_\pi)$$

Onde $\mathbf{T}$ é o tensor tensão.

Dado uma região em forma de um ortoedro, vede figura(3.1), com faces paralelas aos eixos coordenados situados no interior de um solido elástico tensionado.

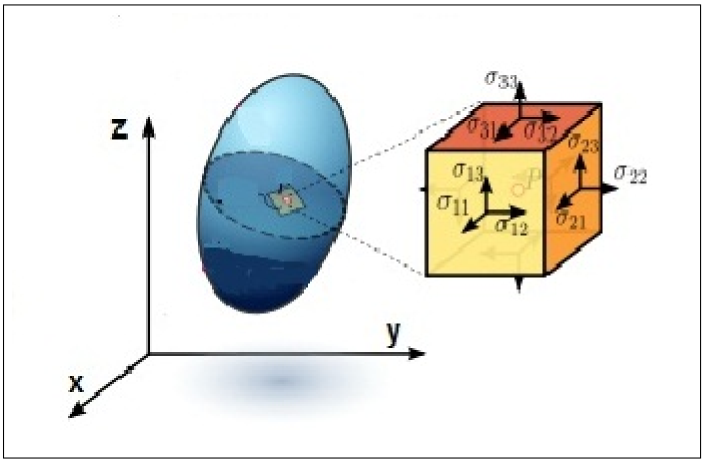

Figura 3.1: Tensor tensão

As componentes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ são responsáveis pelas alterações logitudinais nas três direções do sistema cartesiano, de modo que os ângulos não sejam alterados, enquanto que as componentes $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ estarão relacionadas com a distorção angular, ou seja, a alteração destas componentes converterão o ortoedro em um paralelepipedo.

3.1.1 Equações Básicas da Elasticidade Linear

A elasticidade linear infinitesimal trata do estudo das deformações e da distribuição dos esforços internos sujeito a cargas externas. As limitações da teoria restringe a aplicação desta teoria apenas para deformações elásticas pequenas e de magnitude muito pequena.

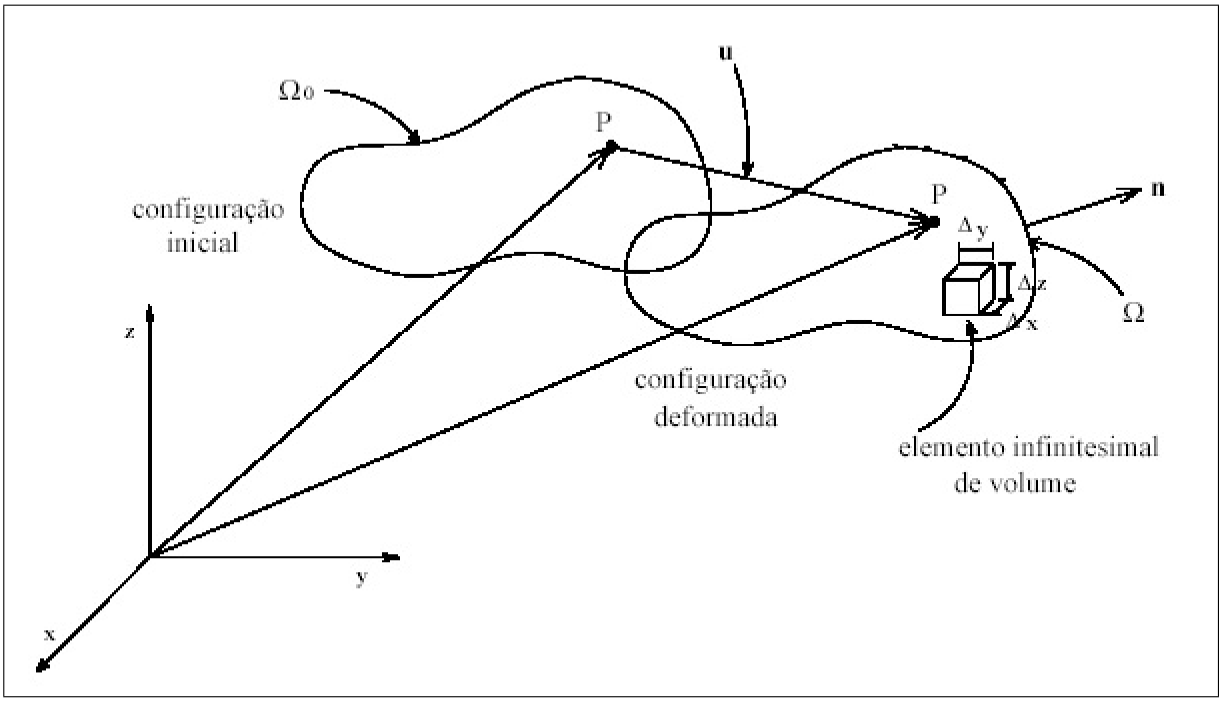

Figura 3.2: Deformação de um corpo

Definição 3.1.5 *Deslocamentos: Considere um corpo elástico(ou estrutura) Ω_0 conforme figura(3.2) que se deforma sob a ação de um sistema de forças atingindo a configuração deformada Ω_f. O vetor u denota o deslocamento de um ponto genérico P de sua posição na configuração inicial para a nova posição na configuração deformada. Este vetor deslocamento é tratado como uma função contínua da posição inicial, isto é, para cada ponto x da peça existe um vetor u(x). Esta descrição é possível devido a hipótese de um meio contínuo, que desconsidera a microestrutura do material.*

Definição 3.1.6 *Deformação: A deformação pode ser representada de forma adequada mediante o tensor deformação infinitesimal que é dado pela seguinte matriz:*

$$\mathcal{E}_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{xx} & \mathcal{E}_{xy} & \mathcal{E}_{xz} \\ \mathcal{E}_{yx} & \mathcal{E}_{yy} & \mathcal{E}_{zy} \\ \mathcal{E}_{zx} & \mathcal{E}_{zy} & \mathcal{E}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \mathcal{E}_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \mathcal{E}_{zz} \end{pmatrix}$$

Ou seja, a partir dos deslocamentos, podemos calcular as deformações em qualquer ponto de uma estrutura. Temos que as equações deformações-deslocamentos para elasticidade linear tridimensional são:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \mathcal{E}_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \mathcal{E}_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \mathcal{E}_{xy} &= \mathcal{E}_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\ \mathcal{E}_{xz} &= \mathcal{E}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \mathcal{E}_{yz} &= \mathcal{E}_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Onde as componentes da diagonal principal representam os alargamentos(ou dilatações), e os demais os meios deslocamentos.

E estas componentes estão linearmente relacionadas com os deslocamentos pela seguinte relação:

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right)$$

Exemplo 3.1.1 *Uma rotação de corpo rígido de um ângulo θ em torno do eixo z é escrita como*

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} xcos\theta - ysin\theta - x \\ xsin\theta + ycos\theta - x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tem as deformações infinitesimais dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{xx} &= cos\theta - 1 \\
\mathcal{E}_{yy} &= cos\theta - 1 \\
\mathcal{E}_{zz} &= 0 \\
\mathcal{E}_{xy} &= \mathcal{E}_{yx} = \mathcal{E}_{xz} = \mathcal{E}_{zx} = \mathcal{E}_{yz} = \mathcal{E}_{zy} = 0
\end{aligned}$$

As equações de (3.1) podem ser representadas matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \mathcal{E}_{zz} \\ 2\mathcal{E}_{xy} \\ 2\mathcal{E}_{xz} \\ 2\mathcal{E}_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Definição 3.1.7 *Equações Constitutivas: É uma relação entre as variáveis termodinâmicas ou mecânica de um dado sistema físico, à exemplo: pressão, temperatura, volume, tensão, deformação, densidade, etc. Cada material ou sólido possui uma equação constitutiva específica.*

Em mecânica dos sólidos e em engenharia estrutural, as equações constitutivas são igualdades que relacionam o campo de tensões com a deformação, naturalmente tais equações relacionam as componentes dos tensores tensão, deformação e velocidade de deformação. Para um material elástico linear as equações constitutivas se chamam equações de Lamé-Hooke ou simplesmente de Lei de Hooke.

Definição 3.1.8 *Lei de Hooke: È a lei da Física relacionada a elasticidade de corpos, que serve para calcular a deformação causada pela força aplicada num determinado corpo, tal que a força será igual ao deslocamento da massa a partir do seu ponto de equilíbrio* *vezes a caracterítica constante da mola ou do corpo que sofrerá a deformação:*

$$F = k \cdot \Delta l$$

A lei de Hooke é percebida após um ensaio de tração, figura(3.3), e deste é obtido o gráfico tensão-deformação, figura(3.4). O comportamento linear conforme pode ser observado no início do gráfico afirma que a tensão é proporcional à deformação. Logo, existe uma constante de proporcionabilidade entre essas duas grandezas. Sendo:

$$\sigma = E\mathcal{E}$$

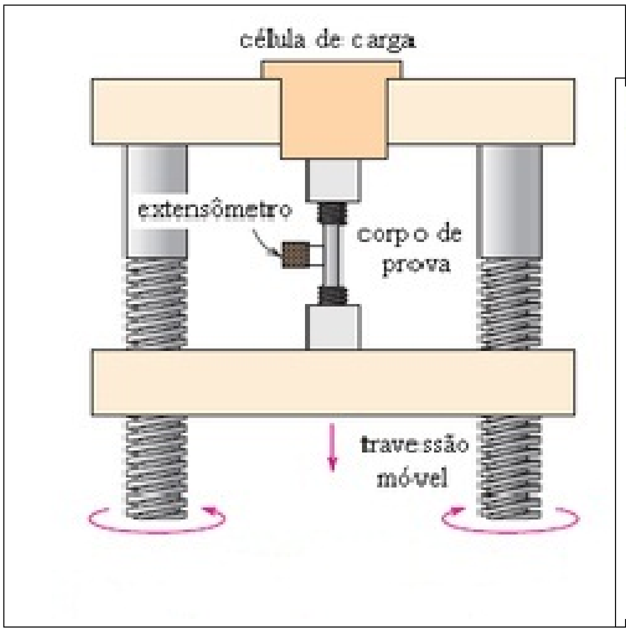

Figura 3.3: Ensaio de tensão-deformação

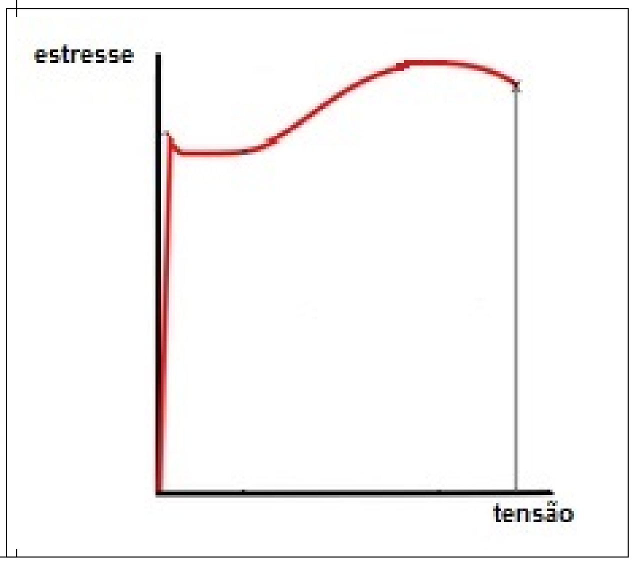

Figura 3.4: Gráfico tensão-deformação

Mais genéricamente a equação constitutiva de Lamé-Hooke e da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\mathcal{E}_{kl}$$

3.1.2 Equações de Equilíbrio

Definição 3.1.9 *Equilíbrio Interno: Quando as deformações não variam com o tempo, o campo de tensões dado pelo tensor representa um estado de equilíbrio com as forças de* *volume $b = (b_x, b_y, b_z)$ em qualquer ponto do sólido, isto implica que o campo de tensões deve satisfazer as seguintes condições de equilíbrio:*

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0.$$

Ditas equações de equilíbrio interno.

Definição 3.1.10 *Equilíbrio de Contorno: O campo de tensões além de satisfazer as condições de equilíbrio, devem satisfazer as condições de contorno sobre a superfície do sólido, que relacionam o vetor normal à mesma $n = (n_x, n_y, n_z)$, com as forças por unidade de superfície $f = (f_x, f_y, f_z)$, ou seja:*

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z = f_x$$
$$\sigma_{xy} n_y + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z = f_y$$
$$\sigma_{xz} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z = f_z.$$

Chamadas de equações de equilíbrio de contorno.

Considerações Finais

Neste trabalho tivemos por objetivo trabalhar os conceitos fundamentais de tensores, definindo-os e analisando o comportamento de suas componentes.

O conceito de tensor embora teoricamente seja novo, é um tema muito relevante, como podemos observar, tanto na própria Matemática, quanto na Engenharia e na Física, principalmente em Física onde detemos às aplicações, a teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, uma teoria totalmente tensorial, mostra o grau de impotância destes elementos matemáticos, assim como a teoria da Elasticidade, aplicação analisada neste trabalho.

Embora não seja um tema amplamente discutido, tensores são vistos corriqueiramente, como pode ser visto nos exemplos citados no texto, a forma como uma função linear pode ser expressa, a equação do Momento de Inércia, a estrutura de um vetor, ambos são exemplos de representação de tensores.

Como afirmado anteriormente, por ser um tema muito amplo, nos restringimos a análise e estudo dos tensores às suas componentes, assim ambas verificações e demonstrações foram feitas através das componentes de um tensor.

Referências Bibliográficas

[1] Azevedo, Álvaro *Mecânica dos Sólidos* - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[2] Lima, Elon Lages. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

[3] Lima, Elon Lages. *Álgebra Exterior*. Rio de Janeiro, IMPA, 2009;

[4] Lima, Elon Lages. *Cálculo Tensorial*. Publicações Matemáticas. IMPA;

[5] SCHIEL, F. *Introdução à Resistência dos Materiais*. Harper & Row do Brasil. 1984.

[6] immonds, James G. *A Brief on Tensor Analysis* - Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.

[7] CALLISTER, Jr. W.D. *Materials Science and Engineering*. 7 º ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2007.

[8] Kolecki, Joseph C. *An Introduction to Tensors for Students of Physics and Engineering*. NASA - September 2002.

[9] Fonseca, Jun Sérgio Ono. *Mecânica dos Sólidos para a Engenharia Mecânica* - 2002

[10] Westin, Michelle Fernandino & Ribeiro, Rafael Teixeira da Silva, *Métodos dos Elementos Finitos na Simulação de Tensão e Elasticidades em Placas.*Área - Engenharia Mecânica.

[11] Spiegel, Murray R. *Análise Vetorial*, Santuário.

[12] Blanco, Pablo Javier. *Tensores de Terceira Ordem.*

[13] Winterle, Paulo. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo, Pearson Makron Books, 2000.

[14] Pimenta, Paulo de Mattos, *Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas* - 2002

[15] Philippe C. Ciarlet, *Mathematical Elasticity*, Vol. 1, pp. 250-251.

[16] www.fe.up.pt/ ldinis/capitulo1.pdf.

[17] http://www.fem.unicamp.br/ em421/semII-1999/textos/tensor.pdf.