UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - UNIFAP

Adriana Natividade Freitas
Gisele Natividade Freitas

UMA ABORDAGEM DO MDC E MMC DOS INTEIROS

MACAPÁ-AP
2017

Adriana Natividade Freitas
Gisele Natividade Freitas

UMA ABORDAGEM DO MDC E MMC DOS INTEIROS

Monografia apresentada ao CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, como requisito necessário para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.Orientador: Professor Me. Steve Wanderson Calheiros de Araújo

MACAPÁ-AP
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

510
F862u Freitas, Adriana Natividade.

Uma abordagem do mdc e mmc dos interiores / Adriana Natividade Freitas, Gisele Natividade Freitas; orientador, Steve Wanderson Calheiros de Araújo. -- Macapá, 2017.

33 p.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Álgebra. 2. Estratégias de aprendizagem. 3. Matemática – estudo e ensino. I. Freitas, Gisele Natividade. II. Araújo, Steve Wanderson Calheiros de, orientador. IV. Fundação Universidade Federal do Amapá. V. Título.

Adriana Natividade Freitas
Gisele Natividade Freitas

UMA ABORDAGEM DO MDC E MMC DOS INTEIROS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura de Matemática, na Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, como requisito necessário para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Me. Steve Wanderson Calheiros de Araújo
Orientador - UNIFAP

Prof. Me. João Socorro Pinheiro Ferreira
1º Membro - UNIFAP

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
2º Membro - UNIFAP

MACAPÁ-AP
2017

Dedicamos este trabalho à nossa mãe Marivalda Correia da Natividade, por sua dedicação e apoio incondicional para que concluíssemos mais essa etapa de nossa vida.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos em primeiro lugar a Deus pois sem sua força não teríamos conseguido concluir o curso. Por ter nos dado saúde, inteligência e discernimento para superar todas as dificuldades, e ter permitido que este momento fosse vivido por nós.

A nossa mãe Marivalda Correia da Natividade, por sua dura e árdua labuta para criar os seus cinco filhos. A toda nossa família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que conseguíssemos essa vitoria.

A todos os professores do curso, que foram tão importantes na nossa vida acadêmica e no desenvolvimento desta monografia.

Aos nossos colegas, em especial Marciele, Mônica, Ramon, Isis. Obrigada por todos os momentos, porque em vocês encontramos verdadeiros amigos, essa jornada não seria a mesma sem vocês. Obrigada a todos que, mesmo não estando citados aqui, tanto contribuíram para a conclusão desta etapa.

Em particular eu, Gisele Natividade, agradeço ao amigo e conselheiro Steve Wanderson Calheiros de Araújo um exemplo de docente, que me orientou em todas as etapas da minha vida acadêmica, muito do que sou hoje devo à ele, e deixo aqui minha eterna gratidão.

"Um número é uma pluralidade composta de unidades."

(Euclides)

RESUMO

O alicerce deste trabalho está construído a partir das veredas reveladas pelo estudo sobre múltiplos, divisores, múltiplos comuns, divisor comum para inteiros, maior divisor comum, menor múltiplo comum, suas propriedades elementares, algumas poucas propriedades oriundas da fatoração em primos e algumas aplicações que são exercícios. Para tal, no primeiro capítulo digo nas preliminares trataremos dos conceitos mais elementares e essências que versam sobre múltiplo, divisor, maior divisor comum - mdc e menor múltiplo comum - mmc, e por fim usando a fatoração em números primos mostrasse outra maneira de calcular o mdc e mmc entre inteiros e alguns resultados essenciais e muito simples. No segundo capítulo com as aplicações e exemplos do uso do maior divisor comum e o menor múltiplo comum que são ferramentas essenciais ao estudo dos números inteiros.
Palavras Chaves: inteiros, divisibilidade, comensurabilidade, maior divisor comum, menor múltiplo comum.

ABSTRACT

The foundation of this work is constructed from the paths revealed by the study of multiples, divisors, common multiples, common divisor for integers, greater common divisor, smaller common multiple, its elementary properties, few properties derived from prime factorization and some applications that Are exercises. For this, in the first chapter I say in the preliminaries we will deal with the most elementary concepts and essences that deal with multiple, divisor, major common divisor - mdc and smallest common multiple - mmc, and finally using prime factorization to show another way of calculating Mdc and mmc between integers and some essential and very simple results. In the second chapter with the applications and examples of the use of the greatest common divisor and the smallest common multiple that are essential tools to the study of integers.
Keywords: Integers, divisibility, commensurability, greater common divisor, smaller common multiple.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como base a dissertação "Uma Extensão do MDC e MMC dos Inteiros aos Comensuráveis" do professor Me. Steve Wanderson Calheiros de Araújo, pois seguirá fielmente o mesmo roteiro no entanto só trataremos sobre inteiros e versará sobre múltiplos, divisores, múltiplos comuns, divisor comum para inteiros, maior divisor comum, menor múltiplo comum, suas propriedades elementares, algumas poucas propriedades oriundas da fatoração em primos e algumas aplicações que são exercícios. Para tal,faremos uma abordagem histórica referente ao mdc e mmc. No terceiro capítulo trataremos dos conceitos mais elementares e essências que versam sobre múltiplo, divisor, maior divisor comum - mdc e menor múltiplo comum - mmc. Não faremos aqui um tratado sobre inteiros e aritmética, mas trataremos do básico e essencial para o cálculo de mdc e mmc para inteiros. Ainda no primeiro capítulo faremos uma observação sobre a existência do mdc e mmc onde utilizamos a demonstração que está na referência [4], assim como a demonstração da equivalência da definição de mdc, onde lançamos mão do belíssimo teorema Bachet Bizú encontrada na referência [3] para provar tal detalhe. Ressalto que apresentamos o antigo e intacto Algoritmo de Euclides que dentre outras coisas mostra a existência do mdc entre números inteiros, mas também exibi como calcular de maneira construtiva o mesmo. E frisamos que a demosntração deste algoritmo é feita como na referência [3]. Bem como as demonstrações de lemas, proposições e teoremas não foi alterada as formas que constam nas referências [3], [5] e [4]. Por fim mostraremos outra maneira de calcular o mdc e mmc usando a fatoração em números primos entre inteiros e alguns resultados essenciais e muito simples. Em seguida no capítulo quatro trataremos as aplicações dos resultados exibidos nos primeiros capítulos com exercícios e problemas. Aqui não escolhemos problemas ou exercícios complicados, mas simples e esclarecedores para os que se interessarem em ler este trabalho possa compreender e servir de apoio no entendimento do básico sobre aritmética no que se referi a múltiplos, divisores, mdc, mmc e suas formas de calcular. Outro detalhe que gostaríamos de ressaltar é que as definições, proposições são como estão nas referencias, mas os exemplos são totalmente originais. Ou seja, o que faremos é uma coleta de informações de diversos livros, revistas e dissertações em um único trabalho na tentativa de unificar o que a de melhor sobre tal assunto.

2 PRELIMINARES

2.1 Princípios históricos

Falar das origens históricas do mdc e mmc é pensar conjuntamente nas origens do processo de divisibilidade, multiplicidade e fatoração, o que remonta ao próprio processo de contagem. Existe um conjunto de pesquisadores que concordam que os primeiros seres humanos aprenderam as primeiras noções de contagem antes mesmo de aprenderem a falar ou a escrever. Daí percebemos que o pensamento lógico matemático mais primitivo e básico é algo próprio da espécie humana podendo também ser observado em outras espécies de animais.

O processo de contagem Surgiu quando as sociedades nômades começaram a se organizar em conjuntos sociais mais complexos, tem-se o fato de que em um dado momento o homem passou a comparar conjuntos para poder ter a noção de quantidade. Usavam os dedos da mãos e dos pés para indicar coleções de até vinte elementos, quando o numero de elemento era maior que o número de dedos , ele amontoavam pedras em grupos de cinco, ou entalhes num bastão.

> "... Como Aristóteles observou a muito tempo, o uso hoje difundido do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e dez dedos nos pés." [2]

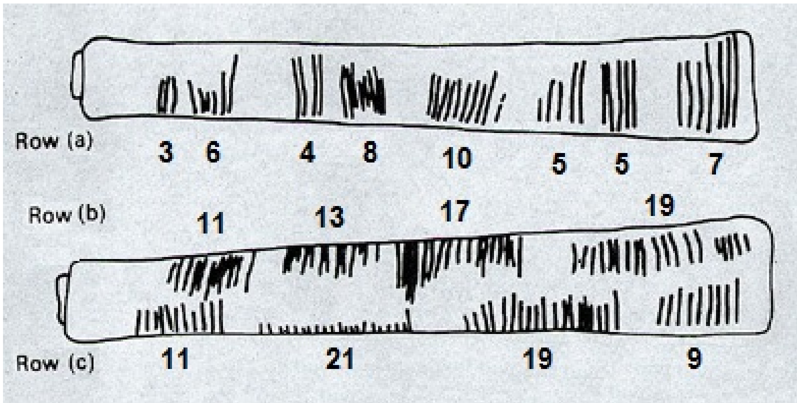
Um dos exemplos mais antigos dos primitivos ideais do homem sobre números é o Osso de Ishango. Foi descoberto pelo antropólogo belga Jean de Heinzelin de Braucourt (1920-1998). Este artefato arqueológico foi encontrado na região de Ishango que se localiza na fronteira entre o Congo e Uganda.

Figura 1 – Osso de Ishango.

Fonte: http://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-osso-ishango.html

O osso, provavelmente uma fíbula de babuíno ou outro grande mamífero, foi datado do período Paleolítico Superior da história humana, há aproximadamente 20.000-25.000 anos. Tem 10 cm de comprimento e possui uma série articulada e organizada de entalhes identificando-a prontamente, para muitos observadores, como um tally stick (antigo dispositivo de ajuda de memória usado para gravar e documentar números, quantidades ou mesmo mensagens). No osso era divido em três face que foram gravados três conjuntos numérica, onde foram notados indícios de contagem dos meses lunares, números primitivos invariáveis seqüenciais, cálculos matemáticos simples, multiplicação e divisão, porém, o seu objectivo original continua a ser objecto de debate. O Osso de Ishango está agora alojado no Museu de Ciências Naturais em Bruxelas, Bélgica, com cuja cooperação a imagem acima foi obtida.

Figura 2 – Osso de Ishango



fonte: http://www.matematicaefacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-osso-ishango.html

A matemática mesopotâmica já dispunha de um método de registro feito através da escrita cuneiforme. Os conhecimentos matemáticos desenvolvidos na sociedade mesopotâmica eram de caráter extremamente prático, com algumas exceções, e voltado para questões de cunho comercial e econômico. A Babilônia que era a cidade mais desenvolvida de toda a Mesopotâmia, estudaram e desenvolveram-se muito em cima do processo de divisão. O trabalho com taxas de juros, câmbio de moedas e divisão de colheitas exigia operações matemáticas de natureza diversa. As tábuas de divisão eram frequentemente consultadas para a verificação de resultados. Tais tábuas ou tabuletas eram feitas de barro onde eram cunhados os resultados e operações matemáticas e depois eram cozidos para aumentar sua durabilidade. Em contraste com a falta de fontes de egípcios matemáticas, o conhecimento da matemática babilônica é derivado a partir de mais do que 400 tábuas de argila descobertos desde 1850. O primeiro teste de matemática escrita remonta aos antigos sumérios, que criou a primeira civilização na Mesopotâmia. Eles desenvolveram um complexo sistema de medição de 3000 a.c. De cerca de 2500 a.c em diante, os sumérios escreveu a tabuada em tábuas de argila e exercícios geométricos realizados e problemas de divisão. Matemática Babilônicas foram escritos usando um sistema sexagesimal (base de 60). Este uso corrente de 60 segundos em um minuto, 60 minutos, em uma hora é derivado, e 360 (60 x 6) graus de um círculo. Avanços Babilônicos em matemática foram facilitados pelo fato de que 60 tem muitos divisores. Além disso, ao contrário dos egípcios, gregos e romanos, os babilônios tinham um verdadeiro sistema posicional, onde dígitos gravados na coluna à esquerda representa os maiores valores, como no sistema decimal. Faltava-lhes, no entanto, um equivalente do ponto decimal, de modo que o valor de lugar de um símbolo muitas vezes teve que ser inferido a partir do contexto.

A maioria das tábuas de argila recuperado a data de 1600 a.c. 1800, cobrindo tópicos, incluindo as frações, álgebra, equações quadráticas cúbicos e calculam tríades de Pitágoras. tábuas mesopotâmica Plimpton 322, datado de 1900 a.c, registra um número de Pitágoras triplica, e embora esta não é uma formulação abstrata do teorema de Pitágoras, milênios para a frente. Os comprimidos também contêm tabelas de multiplicação, tabelas de trigonometria e métodos para a resolução de equações linear e quadrática.

Figura 3 – Tábua Plimpton 322

Fonte: https://userscontent2.emaze.com

Outra grande civilização que deixou suas marcas na história humana foi a sociedade Egípcia. Esta ficou marcada por suas grandes construções arquitetônicas que foram grandes basilares para o crescimento fértil de muitos conhecimentos matemáticos. Pela construção das grandes pirâmides do Egito fez-se necessário o desenvolvimento de um grande estoque de registros matemáticos. Os egípcios dispunham de um grande conhecimento em relação às operações com grandezas. A determinação de divisores de um número, bem como a própria operação de divisão, realizado pelos egípcios se dava a partir de um processo conhecido como "duplicação". Isto ocorria devido ao fato de que os egípcios concebiam a adição como a operação fundamental da aritmética da qual todas as outras derivavam.

O maior aprofundamento das divisões matemáticas e das determinações de divisores ocorre quando ao fim de cada cheia do rio Nilo era preciso dividir as terras novamente aos seus proprietários. Muitos registros de problemas matemáticos elaborados e resolvidos pelos egípcios chegaram aos dias de hoje através dos papiros escritos em hieróglifos. Tais problemas envolvem as mais diversas áreas da matemática hoje conhecida. Em suma são problemas de ordem geométrica e aritmética voltados para situações reais que requisitaram tais conhecimentos. A idéia de múltiplos e divisores aparece com alguma frequência dentro de muitos dos problemas. O mais famoso dos registros matemáticos da sociedade egípcia é o papiro de Rhind. Este papiro ficou assim conhecido por ter sido adquirido pelo egiptólogo escocês Alexander Rhind no ano de 1858. Sua datação é de 1650 a. c. O conteúdo do papiro consta de 84 problemas de ordem aritmética e geométrica com suas respectivas soluções.

Figura 4 – Papiro de Rhind

Fonte: http://antigoegito.org/enigmas-matematicos-em-antigos-papiros-egipcios/

Todo o conhecimento matemático que foi desenvolvido nas primeiras sociedades organizadas foi sendo registrado e passado de um povo para outro através das viagens comercias, principalmente. Com este processo de troca e aperfeiçoamento de conhecimentos, a sociedade grega foi uma das principais impulsionadoras dos estudos matemáticos em torno dos mais variados ramos da ciência dos números. Foi na Grécia que a Matemática conheceu seu primeiro grande apogeu de descobertas e estudos lógicos apurados. Muito se deve às grandes escolas gregas de estudos matemáticos. Escolas como a Sociedade pitagórica, como a Escola de Platão e como os Eleatas (escola de pensamento conhecida entre nós por eleática está associada à pólis de Eleia, no sul da península italiana). Cada uma dessas organizações teve seu papel fundamental no desenvolvimento de toda a base matemática conhecida no período clássico. A mais famosa obra matemática grega é o conhecido compendio de livros escritos pelo grego Euclides de Alexandria. Tal compêndio é denominado de Os Elementos. Sua influência pode ser sentida quando se analisa o fato de que Os elementos foi um dos textos que mais influenciaram no desenvolvimento da Matemática como se apresenta hoje.

Euclides foi um matemático que teve sua carreira na cidade grega de Alexandria, embora não possamos afirmar com precisão a cidade de seu nascimento, muito menos a época em que viveu. Segundo alguns historiadores, Euclides foi um dos grandes professores da famosa escola de matemática de Alexandria, conhecida segundo Boyer [1], página 74, como “Museu”. Ele é autor de algumas publicações sobre matemática, música astronomia e tantas outras áreas do conhecimento, dentre as quais, a geometria com destaque para Os Elementos, uma coleção formada por treze livros, que datam aproximadamente do ano 300a.C., trazem resultados, organizados sistematicamente, muitos atribuídos a outros matemáticos, alguns anteriores a Euclides. Ao contrário do que muitos pensam, Os Elementos não tratam apenas de geometria. Em suas 465 proposições figuram textos sobre teoria dos números e álgebra elementar. Os treze volumes desta publicação estão divididos da seguinte maneira:

- Livros I-VI Geometria plana;
- Livros VII-IX Aritmética (teoria dos números);
- Livros XI-XIII Geometria espacial.

A grande inovação feita por Euclides, nos Elementos, é a adoção do método axiomático dedutivo, no qual, partindo de alguns conceitos primitivos, aceitos como triviais ou intuitivos, demonstram-se consequências chamadas de teoremas ou proposições. O ponto interessante, para este trabalho, encontrado em umas das definições que compões Os elementos é fato de que esta é a primeira obra que traz uma linguagem lógica e concisa sobre muitos temas da matemática e, entre eles, encontra-se a primeira definição de Máximo Divisor Comum. Pouco se alterou da definição de mdc que reside no livro de Euclides para a definição de mdc que se estuda e ensina hoje em dia nos meios matemáticos e nas escolas. Em contraposição ao pouco que se alterou, tem-se o muito que foi construído e descoberto a partir da definição de divisores e de mdc deixadas por Euclides em sua obra. A base teórica em torno do mdc. consta de séculos, mas sua importância jamais cairá nas brumas do tempo. No início do livro VII, Euclides expõe o processo conhecido hoje, como Algoritmo Euclidiano da divisão, bem como o processo para encontrar o Máximo Divisor Comum de dois ou mais números inteiros.

Iniciaremos o presente capítulo abordando de forma simples os conceitos mais primitivos de aritmética. Que são os de múltiplo, divisor, menor múltiplo comum e maior divisor comum para números inteiros. Assim como exibiremos o Algoritmo de Euclides onde praticamente sua forma original não foi mexida e está preservada há 2000 anos segundo a referência [2], além de mostrar a existência do maior divisor comum entre dois inteiros e as principais propriedades que decorrem imediatamente destas definições. No final do mesmo mostraremos como se utiliza a fatoração em números primos para calcular o mmc e mdc.

3 REFERENCIAL TEÓRICO DE MDC E MMC

Definição 0.1. *Dados a e b com $b \neq 0$ dizemos que o inteiro a é divisível pelo inteiro b ou que b é um divisor de a, e escrevemos $b|a$, sempre que existir um inteiro k tal que $a = kb$.*

Observe que, de acordo com a Definição 0.1, $|b| \leq |a|$ e se a e b são positivos, teremos

$$b \leq a. \tag{1}$$

De fato, considerem a e b como na definição acima de forma que b divide a, isto é, $a = kb$, para certo inteiro k. Como a, b são inteiros temos que $|b| \leq |a|$.

Agora vejamos alguns exemplos.

1. 0 é divisível por qualquer número inteiro diferente de 0. Pois, sempre podemos escrever $0 = 0k$, para qualquer inteiro $k \neq 0$. Assim,

   $$k \neq 0, \text{ então } k|0.$$

2. O número 1 divide todo inteiro k. Com efeito, basta observar que qualquer número inteiro k pode ser escrito como $k = k \cdot 1$. Assim,

   $$1|k.$$

3. 2 divide qualquer número par. Com efeito, considere a um número par. Então, podemos escrevê-lo como, $a = k \cdot 2$ para algum inteiro k. Assim, $2|a$.

4. os números 0, 12, 24, 36,... são múltiplos de 6 e 12, observe que o menor destes múltiplos comuns positivo a 6 e 12 é 12.

5. os números 1, 2, 3 e 6 dividem 6 e 12, observe que o maior destes divisores comuns a 6 e 12 é 6. Isto nos induz às definições que seguirão nas próximas páginas.

Quando um número inteiro c divide dois números a e b, inteiros, diremos que c é divisor comum de a e b.

Definição 0.2. *Dados dois inteiros a e b, dizemos que um inteiro d é o maior divisor comum (mdc) entre a e b, e escreveremos $d = (a, b)$, se:*

1. *d é um divisor comum de a e b, isto é, d é divisor tanto de a como de b.*

2. *d é o maior dos divisores comuns, no sentido de que se c é um divisor comum de a e b, então $c \leq d$.*

O mais interessante e mais complexo é mostrar que a definição acima é equivalente a:

(i) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (i) acima pode ser reescrita como se segue:

(i') Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$.

De fato, para fixar as ideias tomemos sem perda de generalidade, c e d naturais, onde c é um divisor comum de a e b e d é tal que $c|d$, isto é, $d = kc$, para certo inteiro k. Como d, $c > 0$ e inteiros temos que $c \leq d$.

À volta deste resultado, ou seja, vamos mostrar que "O maior divisor comum d de a e b é o divisor positivo de a e b o qual é divisível por todo divisor comum."Esta volta da equivalência acima na definição de maior divisor comum é o conteúdo do importante teorema conhecido por Bachet-Bézout.

Teorema 0.1 (Bachet-Bézout)**.** *Considerem $a, b \in \mathbb{Z}$. Então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com*

$$ax + by = (a, b) \tag{2}$$

Portanto, se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $c|a$ e $c|b$, então, $c|(a, b)$.

Demonstração. O caso $a = b = 0$ é trivial (temos $x = y = 0$). Nos outros casos, considere o conjunto de todas as combinações de a e b como abaixo. Considerem $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Definimos o conjunto de todas as combinações de a e b

$$J(a, b) = \{x \in \mathbb{Z}^*; \exists\ u \text{ e } v \in \mathbb{Z}, x = ua + vb\}.$$

Observe que este conjunto contém sempre os números a e b para quaisquer a e b. Como $J(a, b) \subseteq \mathbb{Z}$ e é não vazio podemos considerar $d = au_0 + bv_0$ o menor elemento positivo de $J(a, b)$. Afirmamos que d divide todos os elementos de $J(a, b)$. De fato, se tomarmos $m = au + bv \in J(a, b)$, sejam $q, r \in \mathbb{Z}$ o quociente e o resto na divisão euclidiana de m por d, de modo que

$$m = dq + r \text{ e } 0 \leq r < d.$$

Temos

$$r = m - dq = a(u - qu_0) + b(v - qv_0) \in J(a, b).$$

Mas,como $r < d$ e d é o menor elemento positivo de $J(a, b)$, segue que $r = 0$ e portanto $d|m$. Em particular como $a, b \in J(a, b)$ temos que $d|a$ e $d|b$, então pela definição temos que $d \leq (a, b)$. Note ainda que se $c|a$ e $c|b$, então $c|(au_0 + bv_0) \Leftrightarrow c|d$. Tomando $c = (a, b)$ temos que $(a, b)|d$, isto é, pela definição novamente temos que $(a, b) \leq d$ o que juntamente com a desigualdade $d \leq (a, b)$, mostra que $d = (a, b)$. □

É claro que $(a, b) = (b, a)$.

Agora vamos mostrar a existência do (mdc) em alguns casos particulares antes que mostremos que sempre existe o maior divisor comum entre dois inteiros quaisquer não simultaneamente nulos.

1. $(a, 0) = a$

De fato, pois $a|a$ e $a|0$, ou seja, a é divisor comum de a e 0. Agora suponha que a não seja o mdc de a e 0. Isto é, $(a, 0) = d$. Então $d|a$ e $d|0$, mas se a é divisor comum de a e 0 segue de acordo com a definição que $a|d$, então $d = k_1 \cdot a$ e $a = k_2 \cdot d$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ consequentemente $k_1 = k_2 = 1$.

Portanto $a = d$.

2. $(a, 1) = 1$

De fato, pois $1|a$ e $1|1$, ou seja, 1 é divisor comum de a e 1. Agora suponha que 1 não seja o mdc de a e 1. Isto é, $(a, 1) = d$. Então $d|a$ e $d|1$, mas do fato de que 1 é divisor comum de a e 1 temos que $1|d$ e com isso $d = 1$.

3. $(a, a) = a$

De fato, pois $a|a$, ou seja, a é divisor comum de a. Agora suponha que a não seja o mdc de a e a. Isto é, $(a, a) = d$. Então $d|a$ e $d|a$, mas de $a|a$ temos que $a|d$, isto é, $d = k_1 \cdot a$ e $a = k_2 \cdot d$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Daí tem-se que $1 = k_1k_2$, ou seja, $k_1 = k_2 = 1$. E com isso tem-se que $d = a$.

Mas vejamos como fica no caso geral.

Dados dois números inteiros a e b ambos não nulos podemos associar a cada um deles seu conjunto de divisores positivos, D_a e D_b respectivamente. Daí, temos as seguintes afirmações.

1. $D_a \cap D_b \neq \varnothing$.

2. $D_a \cap D_b$ é finita.

3. Como $D_a \cap D_b$ é finita, então existe o elemento máximo que é o maior divisor comum de a e b.

Prova 1. Basta observar que $1 \in D_a \cap D_b$.

Prova 2. Para mostrar que está intersecção é finita basta verificar que se $d|a$, então $a = 0$ ou $|d| \leq |a|$, pois daí tem-se que D_a é finito e analogamente teremos que D_b é finito e como a intersecção de conjuntos finitos é finito teremos $D_a \cap D_b$ é finita. De fato, para tal vamos supor que $a \neq 0$. E neste caso, $a = dq$ com $q \neq 0$, assim $|q| \geq 1$ e $|a| = |dq| = |d||q| \geq |d|$. Portanto, $|d| \leq |a|$. Donde concluímos que $D_a \cap D_b$ que é finita.

Prova 3. O fato de que $D_a \cap D_b$ é finita nos permite dizer que este conjunto tem elemento máximo. Seja $d =$máx.$D_a \cap D_b$, então $d|a$ e $d|b$ e tomemos $c \in D_a \cap D_b$. Assim $c|a$ e $c|b$ e como $d =$máx.$D_a \cap D_b$, temos que $c \leq d$, e, portanto, $d = (a, b)$ de acordo com a definição.

Outra maneira de mostrar a existência é por meio do algoritmo de Euclides. Para tal necessitamos antes demonstrar o Lema de Euclides e para mostrá-lo iremos exibir duas propriedades que decorrem diretamente da definição de *mdc*. Esta maneira de mostrar a existência é salutar fazer, pelo fato, de nos ensinar uma maneira prática de calcular o mdc entre dois inteiros, e, além disso, o fato de este algoritmo estar em muitos livros didáticos do ensino fundamental. Para tal faremos alguns pequenos resultados e o lema de Euclides.

Proposição 0.1. *Se $c|a$ e $c|a + b$, então $c|b$.*

Demonstração. Da hipótese temos que $a = k_1c$ e $(a + b) = k_2c$, com k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$. Substituindo a primeira equação na segunda temos,

$$(k_1c + b) = k_2c$$

$$b = k_2c - k_1c$$

$$b = c(k_2 - k_1)$$

$$b = ck$$

Donde concluímos que $c|b$. □

Proposição 0.2. *Se $a|b$, então $(a, b) = a$.*

Demonstração. Ora $a|a$ e $a|b$ por hipótese, então a é divisor comum de a e b. Suponha que $(a, b) = d$, segue que $d|a$ e $d|b$. Mas, como a é divisor comum de a e b, tem-se por definição que $a|d$ e, portanto $d = a$. □

Corolário 0.1. *Se* $(a, b) = 1$ *e* $a|bc$*, então* $a|c$*.*

Demonstração. Como $(a, b) = 1$, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax+by = 1 \Rightarrow a\cdot cx+(bc)\cdot y = c$. Do fato de a dividir cada termo do lado esquerdo, temos que $a|c$. □

Exemplos.

1. Observe que o 2 divide 6, então $(2, 6) = 2$.
2. Observe que o $(2, 7) = 1$ e $2|7.4$, então 2 divide 4.

Lema 0.1. *Considerem* $a, b, k \in \mathbb{Z}$ *com* $a < ka < b$*. Se existe* $(a, b - ka)$*, então* (a, b) *existe e*

$$(a, b) = (a, b - ka). \tag{3}$$

Demonstração. Considere $d = (a, b - ka)$, daí $d|a$ e $d|(b - ka)$, então $d|(b - ka + ka)$, pois se $d|a$ implica que $d|ka$. Assim, d é um divisor comum de a e b. Agora tomemos c um divisor comum de a e b, segue que c é divisor comum de a e $b - ka$, com isso $c|d$. Assim pela generalidade de c temos que $d = (a, b)$. □

1. Observe que o $(6, 72) = 6$ e $(6, 72 - 3.6) = (6, 54) = 6$.
2. Observe que o $(2, 71) = 1$ e $(2, 71 - 3.2) = (2, 65) = 1$.

Veja a citação abaixo de A. Hefez em seu livro elementos de aritmética página 54.

> "O lema de Euclides é efetivo para calcular mdc, conforme veremos nos exemplos a seguir, e será fundamental para estabelecermos o algoritmo de Euclides, que permitirá, com muita eficiência, calcular o mdc de dois números inteiros quaisquer." [5]

A seguir, apresentaremos a prova construtiva da existência do mdc entre dois inteiros quaisquer. Veja o que diz A. Hefez em seu livro elementos de aritmética página 56.

> " . . . dada por Euclides (Os Elementos, Livro VII, Proposição 2). O método, chamado de Algoritmo de Euclides, é um primor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios."

Agora passamos ao algoritmo propriamente dito.

Considerem $a, b \in \mathbb{Z}$, podemos supor sem perda de generalidade que $a \leq b$. Se $a = 1$ ou $a = b$,ou ainda $a|b$, já vimos que $(a, b) = a$. Então vamos apenas verificar o caso em que $a, b \in \mathbb{Z}$, seja tal que $a < b$ e que $a \nmid b$. Dai pela divisão euclidiana, podemos escrever,

$$b = aq_1 + r_1, \text{ com } r_1 < |a|.$$

Aqui temos duas possibilidades:

a) $r_1|a$, e, em tal caso, pelo Lema de Euclides,

$$r_1 = (a, r_1) = (a, b - q_1 a) = (a, b),$$

e termina o algoritmo, ou

b) $r_1 \nmid a$, e, em tal caso, podemos efetuar a divisão de a por r_1, obtendo

$$a = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } r_2 < r_1$$

Novamente, temos duas possibilidades:

a') $r_2|r_1$, e, em tal caso, novamente pelo Lema de Euclides tem-se

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, a - q_2 r_1) = (r_1, a) = (b - q_1 a, a) = (b, a) = (a, b),$$

E paramos, pois termina o algoritmo, ou

b') $r_2 \nmid r_1$, e, em tal caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2 obtendo

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ onde } r_3 < r_2.$$

Este procedimento não pode continuar indefinidamente, pois teríamos uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > \ldots$ que não possui menor elemento o que não é possível pelo pricípio da boa ordem, Isto é, para algum n tem-se que $r_n | r_{(n-1)}$, o que implica que $(a, b) = r_n$. Veja a seguinte citação sobre o algoritmo de Euclides.

> “Além de servir de ferramenta computacional para o cálculo do mdc a divisão euclidiana tem consequências teóricas importantes”. [4]

Vejamos um exemplo do uso do algoritimo de Euclides.

1. Considerem $a = 24$ e $b = 14$. Temos pelo algoritimo que $24 = 14.1 + 10$ e como

$$10 \nmid 14$$

, então segue que $14 = 10.1 + 4$ e novamente como $4 \nmid 10$ segue que $10 = 4.2 + 2$. Agora observe que 2 divide 4. Portanto de acordo com o algoritimo de Euclides 2 é o maior divisor comum entre 24 e 14. Ou seja, $(24, 14) = 2$.

2. Considerem $a = 36$ e $b = 24$. Temos pelo algoritimo que $36 = 24.1 + 12$ e como 12 divide 24. Tem-se que de acordo com o algoritimo de Euclides 12 é o maior divisor comum entre 24 e 36. Ou seja, $(36, 24) = 12$.

3. Considerem $a = 48$ e $b = 18$. Temos pelo algoritimo que $48 = 18.2 + 12$ e como

$$12 \nmid 18$$

, então segue que $18 = 12.1 + 6$ e 6 divide 12. Portanto de acordo com o algoritimo de Euclides 6 é o maior divisor comum entre 48 e 18. Ou seja, $(48, 18) = 6$.

Agora vamos ver o conceito de múltiplo.

Definição 0.3. *Dizemos que um inteiro a é múltiplo de um inteiro b, se*

$$a = kb,$$

para algum inteiro k. E diremos que m é múltiplo comum de dois inteiros a e b se m é múltiplo de a e b.

Exemplos.

5. Observe que o 0 é múltiplo de todos os números. Mas 0 não é divisor de número algum de acordo com a definição acima.

6. O número 24 é múltiplo de 2. Pois, existe um inteiro que é 12 tal que $28 = 12 \cdot 2$. Assim, 24 é múltiplo de 2.

7. O número -48 é múltiplo de 2. Pois, existe um inteiro que é -24 tal que $-56 = -24.2$. Assim, -48 é múltiplo de 2.

8. Observe que -48 é tanto múltiplo de 2 como de -6, então de acordo com a definição acima temos que -48 é múltiplo comum de 2 e -6.

Esta noção de múltiplo comum sugeri a seguinte definição.

Definição 0.4. *Dizemos que m é o menor múltiplo comum (mmc) entre a e b e escrevemos $m = [a, b]$ se:*

1. $a = b$, então $a = [a, b]$.
2. Se $a \neq b$ e $b = 0$, então o *mmc* é definido por $0 = [a, 0]$.
3. Se $a \neq b$ e ambos não nulos a definição é como segue:
   (i) $m > 0$,
   (ii) m é múltiplo comum de a e b,
   (iii) m é o menor dos múltiplos comuns, no sentido de que se m' é um múltiplo comum de a e b e $m' > 0$ então $m \leq m'$.

Neste trabalho seguiremos os passos da referência [1] como enunciamos no resumo e estenderemos a definição de *mmc* como feito acima para que seja possível calcular o *mmc* entre dois números iguais inclusive podendo ser nulos, entre um número diferente de 0 e outro qualquer inclusive 0 e dois números distintos ambos não nulos e isto está na dissertação do orientador deste trabalho. Assim de acordo com a definição temos os seguintes exemplos:

1. Que $3 = [3, 3]$.
2. Que $0 = [0, 0]$.
3. Que $0 = [0, 3]$.
4. Que $6 = [3, 6]$.

Uma pergunta muito natural seria: sempre existe o *mmc* entre dois números inteiros quaisquer?

Para responder a tal indagação vamos definir o seguinte conjunto: M_k o conjunto dos múltiplos positivos de k. Pois vamos restringir a prova para os naturais sem perda de generalidade.

1. Dados dois números a e b com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então a intersecção $M_a \cap M_b \neq \varnothing$
2. O conjunto $M_a \cap M_b$ possui elemento mínimo.
3. O conjunto $\min . M_a \cap M_b = [a, b]$.

Demonstração. 1: Como o ab é múltiplo de a e b, isto é, pertencem a $M_a \cap M_b$, então

$$M_a \cap M_b \neq \varnothing.$$

□

Demonstração. 2: Como $M_a \cap M_b \subset \mathbb{N}$ e os naturais são bem ordenados então pelo princípio da boa ordenação $M_a \cap M_b$ tem elemento mínimo. □

Demonstração. 3: Considere m =min.$M_a \cap M_b$, e $c \in M_a \cap M_b$. Daí pela definição de m tem-se que $m \leq c$. Portanto, $m = [a, b]$. □

Um resultado interessante que conecta os conceitos de *mdc* e *mmc* é o que segue abaixo e é na verdade uma consequênciado teorema *Bachet-Bezout*.

$$[a, b] \cdot (a, b) = |a \cdot b|.$$

Proposição 0.3. *Dados dois números naturais a e b, então*

$$[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b.$$

Demonstração. Escrevendo $d = (a, b)$ e $a = a_1 \cdot d$ e $b = b_1 \cdot d$ onde $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ são tais que $(a_1, b_1) = 1$. Temos $[a, b] = al$ para algum $l \in \mathbb{N}$, além disso, $b|[a, b] \Leftrightarrow b_1 d | a_1 d l$. Como $(a_1, b_1) = 1$, isto implica que $b_1 | l$. E Pela definição de mínimo múltiplo comum, temos que l deve ser o mínimo número divisível por b_1, assim concluímos que $l = b_1$, e, portanto $[a, b] = b_1 a$. Logo $(a, b) \cdot [a, b] = d \cdot b_1 \cdot a = a \cdot b$. □

Dois outros resultados importantes são:

Proposição 0.4. *Para quaisquer inteiros a, b*

(i) $[-a, b] = [a, -b] = [a, b]$

(ii) $(-a, b) = (a, -b) = (a, b)$.

Demonstração. Observe que $(a, b)|a \Rightarrow (a, b)| - a$ por outro lado temos que $(-a, b)| - a \Rightarrow (-a, b)|a$. Então $(a, b)|(-a, b)$ e $(-a, b)|(a, b)$. Sendo análogo o processo para mostrar que $(a, -b) = (a, b)$ concluímos que

$$(-a, b) = (a, -b) = (a, b).$$

□

Proposição 0.5. *Para quaisquer inteiros a, b e l,*

(i) $[la, lb] = |l|.[a, b]$

(ii) $(la, lb) = |l|.(a, b)$.

Demonstração. Vamos provar (ii) pois (i) é inteiramente análogo. Tomemos $l = 0$ e teremos que

$$(0 \cdot a, 0 \cdot b) = (0, 0) = 0 \cdot (a, b) = |0| \cdot (a, b).$$

Tomemos $l > 0$ pelo teorema Bachet-Bezout temos que (la, lb) é o menor valor positivo de $lau + lbv$, com u, v inteiros, que é igual a l vezes o menor valor positivo de $au + bv$ que é igual a $l(a, b)$. Assim, $(la, lb) = l \cdot (a, b)$, com $l > 0$. Para $l < 0$ temos

$$(la, lb) = -l \cdot (-a, -b) \Rightarrow |(la, lb)| = |-l \cdot (-a, -b)| = |-l| \cdot |(-a, -b)|,$$

segue que

$$(la, lb) = |-l| \cdot (a, b) \Rightarrow (la, lb) = |l| \cdot (a, b).$$

□

3.1 Fatoração em Primos

Veja a bela proposição abaixo usando a decomposição em primos cuja demonstração se encontra na referência [3].

Proposição 0.6. *Considere* $a = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_r}^{\alpha_r}$ *um número natural escrito na forma acima. Se* a' *é um divisor de* a*, então*

$$a' = {p_1}^{\beta_1}{p_2}^{\beta_2}\ldots{p_r}^{\beta_r}$$

onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$*, para* $i = 1, 2, \ldots, r$.

Demonstração. Considere a' um divisor de a e considere p^β a potência de um número primo p que esteja na decomposição de a' em fatores primos. É claro que $p^\beta|a$, segue então que divide algum ${p_i}^{\alpha_i}$ por ser primo com os demais ${p_j}^{\alpha_j}$, e, como consequência, $p = p_i$ e $\beta \leq \alpha_i$. □

Exemplo. Dado o número: $288 = 3^2.2^5$, então são divisores de 288 os números:

Tabela 1 – Tabela de divisores do número 288

$32 = 3^0.2^5$	$96 = 3^1.2^5$	$288 = 3^2.2^5$
$16 = 3^0.2^4$	$48 = 3^1.2^4$	$144 = 3^2.2^4$
$8 = 3^0.2^3$	$24 = 3^1.2^3$	$72 = 3^2.2^3$
$4 = 3^0.2^2$	$12 = 3^1.2^2$	$36 = 3^2.2^2$
$2 = 3^0.2^1$	$6 = 3^1.2^1$	$18 = 3^2.2^1$
$1 = 3^0.2^0$	$3 = 3^1.2^0$	$9 = 3^2.2^0$

Explorando um pouco mais sobre o exemplo anterior. Observe que existe 3 possibilidades para o expoente da potência de base 3 e existe 6 possibilidades para o expoente da potência de base 2. Usando o principio fundamental da contagem temos que o número de divisores positivos do número 288 é,

$$3.6 = 18$$

Veja o que diz o autor da referência [1].

> "A fatoração em números primos de um número natural é como se estivéssemos vendo o seu DNA, pois revela toda a sua estrutura multiplicativa. Desta forma é possível determinar o mdc e mmc de um conjunto de números qualquer."

3.1.1 MDC e MMC por meio de fatoração em primos

Veja o belo resultado abaixo que na prática é muito utilizado nas escolas de ensino fundamental e médio para determinar o mdc e mmc.

Considerem $a = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\dots{p_n}^{\alpha_n}$ e $a' = {p_1}^{\beta_1}{p_2}^{\beta_2}{p_n}^{\beta_n}$. Pondo

$$\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}, \quad \delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

tem-se que

$$(a, b) = {p_1}^{\gamma_1}{p_2}^{\gamma_2}\dots{p_n}^{\gamma_n} \text{ e } [a, b] = {p_1}^{\delta_1}{p_2}^{\delta_2}\dots{p_n}^{\delta_n}$$

Demonstração. Pela proposição anterior temos que ${p_1}^{\gamma_1}{p_2}^{\gamma_2}\dots{p_n}^{\gamma_n}$ é divisor comum de a e b. Logo, $c = {p_1}^{\varepsilon_1}{p_2}^{\varepsilon_2}\dots{p_n}^{\varepsilon_r}$, onde $\varepsilon_1 < \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ e portanto, c divide ${p_1}^{\gamma_1}{p_2}^{\gamma_2}\dots{p_n}^{\gamma_n}$. Do mesmo modo, prova-se para o mmc. $\square$

Exemplo. Qual o é o mmc e mdc entre $a = 2^3 3^4 5^5 7^6$ e $b = 2^2 3^3 5^6 7^7 11^3$.

$$(a, b) = 2^2 3^3 5^5 7^6$$

e

$$[a, b] = 2^3 3^4 5^6 7^7 11^3.$$

Aproveitando o momento já que falamos sobre a fatoração de um número em fatores primos não poderíamos deixar de comentar que existem outros resultados que decorrem da fatoração. Por exemplo quando fatoramos um número em fatores primos é possível dizer a quantidade de divisores positivos do determinado número. Por exemplo, dado o número a acima citado e que transcrevo abaixo

$$a = 2^3 3^4 5^5 7^6$$

já vimos pelos dois últimos resultados que todo divisor de a terá a mesma decomposição a menos dos expoentes. Desta forma, usando o princípio fundamental da contagem ou também conhecido como princípio fundamental da multiplicação temos que o número de divisores positivos de a é dado por:

$$(3 + 1).(4 + 1).(5 + 1).(6 + 1) = 4.5.6.7 = 840$$

.

4 PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

Agora de posse do conhecimento de como calcular o menor múltiplo comum e o maior divisor comum estamos preparados para resolver problemas que necessitem deste conhecimento. Além de podermos usar as vantagens da fatoração em números primos. Neste capítulo faremos alguns exercícios para colocar em prática alguns resultados estudados no capítulo anterior.

1. Vamos calcular o *mmc* e *mdc* entre os números 2 e 4. Para tal observe que

$$[2,4] = 2.[1,2] = 2.2 = 4$$

Pois, $[1,a] = a$ para qualquer número a inteiro. E

$$(2,4) = 2.(1,2) = 2.1 = 2$$

Pois, $(1,a) = 1$ para qualquer número a inteiro.

2. Vamos calcular o *mmc* e *mdc* entre os números 36 e 144. Para tal observe que

$$[36,144] = [36.1, 36.4] = 36[1,4] = 36.4 = 144$$

Pois, $[1,a] = a$ para qualquer número a inteiro. E

$$(36,144) = 6.(6,48) = 6.2.(3,24) = 6.2.3.(1,8) = 6.2.3.1 = 36$$

3. Vamos calcular o *mmc* e *mmd* entre os números 36 e 512. Para tal observe que

$$[36,512] = 4.[9,128] = 4.1152 = 4608$$

Pois, $[1,a] = a$ para qualquer número a inteiro. E

$$(36,512) = 4.[9,128] = 4.1 = 4$$

Agora usando outro resultado. Veja,

4. Vamos calcular o *mmc* e *mmd* entre os números 42 e 360. Para tal observe que

$$[42,360] = 6.[7,60] = 6.420 = 2520$$

e

$$(42,360) = 6.(7,60) = 6.1 = 6$$

5. Observe que o cálculo do mdc e mmc entre os números 9 e 128 já não é tão imediato. Para tornar mais simples usaremos a ferramento dada pela fatoração em números primos feita no final do capítulo 1. $9 = 3^2$ e $128 = 2^7$. Então temos que: $(9, 128) = 1$ $[9, 128] = 2^7.3^2 = 1152$

6. Dado o número $N = 2^5.3^3.5^4$ solicita-se:

   a. Qual o número de divisores de N?

   Resposta: Usando os resultados do final do capítulo 1 temos,

$$(5 + 1).(3 + 1).(4 + 1) = 6.4.5 = 120$$

   b. Qual o número de divisores pares de N?

   Resposta. Para tal basta perceber que os divisores que procuramos devem ser múltiplos de 2. Então devemos excluir a possibilidade do expoente do fator 2 ser 0. Daí,

$$(5).(3 + 1).(4 + 1) = 5.4.5 = 100$$

   c. Qual o número de divisores de N que são ímpares?

   Resposta: Basta fazer 120 que é o total menos os divisores pares que é 100 e obteremos 20 divisores ímpares. Mas de outra maneira basta fazer o expoente do fator 2 igual a única possibilidade que é 0. Daí,

$$1.(3 + 1).(4 + 1) = 1.4.5 = 20$$

   d. Qual o número de divisores de N que são quadrados perfeitos?

   Resposta: expoentes dos fatores primos devem ser do tipo 0, 2 e 4. Assim para o fator 2 temos as opções 0, 2 e 4; para o fator 3 temos as opções 0 e 2 e por fim para o fator 5 temos as opções 0, 2 e 4. Sendo assim, pelo Princípio fundamental da contagem temos:

$$3.2.3 = 18$$

   divisores que são quadrados perfeitos.

7. Considerem os números $N = 2^5.3^3.5^4$ e $M = 2^3.3^4.5^5.7^3$ vamos responder as seguintes perguntas:

   a. Calcule (M, N);

   Resposta: Basta tomar os fatores comuns a ambos com os menores expoentes, veja:

$$(M, N) = 2^3.3^3.5^4$$

   b. Calcule [M, N];

Resposta: Basta tomar os fatores comuns e não comuns a ambos com os maiores expoentes, veja:

$$[M, N] = 2^5.3^4.5^5.7^3$$

8. Dado duas composições A e B sendo que a composição A faz um percurso C em 420 minutos e a composição B faz esse percurso C em 90 minutos. Se ambas partirem juntas de um ponto D, solicita-se:

a. Após quantos minutos ambas as composições irão se encontrar a primeira vez no ponto D novamente?

Resposta: Observe que as composições irão se encontrar a primeira vez no menor tempo comum a ambas, ou seja, após

$$[90, 420] = 10.[9, 42] = 10.3.[3, 14] = 10.3.42 = 1260$$

minutos.

b. Quantas voltas cada uma das composições darão para se encontrar a primeira vez no ponto D?

Resposta: A composição B fará $1260 : 90 = 14$ voltas e a composição A fará $1260 : 420 = 3$ voltas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho deu-se com o intuito de visualizar de uma forma clara os caminhos percorridos do Maior Divisor Comum (mdc) e Menor Múltiplo Comum (mmc) dos Inteiros e mostrar conceitos para se chega a um resultado de maneira simples, tendo assim, uma melhor compreensão sobre o assunto prospoto com definições, propriedades e exercícios. Notamos que, ao pesquisar sobre o contexto histórico do assunto deste trabalho, não existe algo preciso que dirija-se apenas a essa temática e sim um agrupamento de outros conceitos, definições e teorias que formam e ajudam a entender melhor sua existência e principais propriedades. O objetivo proposto no trabalho foi atingido, dados que o estudo de alguns conteúdos do Maior Divisor Comum e Menor Múltiplo comum abordados foi importante para o entendimento de alguns propósitos como a de mdc e mmc por meio de Fatoração em Números Primos.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, Steve W. C.; *Uma Extensão do MDC e MMC dos Inteiros aos Comensuráveis*, 2016, 42f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Amapá, macapá-AP.

[2] BOYER, Karl B. História da matemática. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

[3] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C.P.; WGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C.; *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.

[4] MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A.; SALDANHA, Nicolau C.; MARTINEZ, Fabio E. B.; *Tópico em Teoria dos Números*, Coleção Profmat, 2012.

[5] HEFEZ, Abramo, *Elementos de Aritmética*, Coleção Textos Universitários, SBM, Edição 2006.

[6] SANTOS, Jose Plinio de Azevedo, *Introdução à Teoria dos Números*, SBM, Coleção Matemática Universitária, 2015.