UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REIRORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Alex Modesto Amoras

ESTUDO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI VIA TEORIA DE ÁLGEBRA LINEAR

Macapá
2014

Alex Modesto Amoras

ESTUDO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI VIA TEORIA DE ÁLGEBRA LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação em Licenciatura em Matemática.

Área de Concentração: **Álgebra linear**
Orientador: *Dr.* Guzman Eulálio Isla Chamilco.

Macapá
2014

Estudo da Sequência de Fibonnacci via Álgebra Linear

por

AMORAS, Alex Modesto

Este Trabalho de Conclusão de Curso, foi julgado e aprovado, pelo Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação de Licenciatura em Matemática.

Macapá, 16 de Abril de 2014

Prof. *Dr.* Guzman Eulálio Isla Chamilco
Professor do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP

Banca Examinadora

Orientador: Prof. *Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco.*
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Dr.José Walter Cárdenas Sotil.*
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira.*
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

A minha esposa Marcilene e meus três Filhos Aline, André e Natalia.

Agradecimentos

⋆ Primeiro lugar ao meu Deus, que me sustentou nessa etapa da vida e proporcionou-me mais essa alegria, pois vem dele tudo que sou, tudo tenho e tudo que espero;

⋆ Ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIFAP;

⋆ Ao professor *Dr.* Guzmam Chamilco, pelas suas orientações e apoio durante toda a produção dese tcc;

⋆ A minha mãe e meu pai, pelas orações, conselhos e forças que foi muito importante para concluir essa Graduação e também meus irmãos, primos, minha tia Leomita, minha vó Tertulina, meu avô Roldão e meus irmãos em Cristo Jesus;

⋆ A Professora Leila e ao Professor Arleno, que me ajudaram financeiramente;

⋆ Aos amigos e colegas que tive a oportunidade de conhecer e compartilhar dos seus conhecimentos;

⋆ A todos os professores do colegiado de Matemática, que foram em parte os responsáveis pela minha formação acadêmica e profissional;

⋆ Enfim a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

"Pois que aproveitaria ao homem ganhar todo o mundo e perder a sua alma?".

Bíblia Sagrada - Evangelho de Marcos 8:36.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso exploraremos o eixo temático o estudo da Sequência de Fibonacci via Teoria de Álgebra Linear, mas especificamente no assunto de Transformação Linear que vai nos auxiliar a encontrar a fórmula de Binet que tem uma forte relação com a Sequência de Fibonacci, iniciando um breve relato biografico de Leonardo Fibonacci, assim como algumas de suas obras e conquistas em enfase um de seus principais trabalhos: Os números de Fibonacci que surgiram do "estudo o problema dos coelhos". E ainda com relação aos números de Fibonacci estudaremos suas relações com a Biologia, a Arquitetura, a Arte, a Física e com Corpo Humano. Finalizamos este trabalho relatando outros assuntos que trazem uma ligação com Sequência de Fibonacci, como algumas propriedades da Sequência de Fibonacci e sua relação com outros assuntos da matemática como Triângulo de Pascal, a Progressão Geométrica, o Número de Ouro (número Phi), Retângulo Áureo e a Divisão Áurea. E para desenvolver este trabalho foram necessários conceitos de Teoria dos Números, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e como apoio bibliográfico os livros de "Iniciação Científica OBMEP 2006 - Indução Matemática vol. 4"e "Introdução à Teoria dos Números de José Plínio de Oliveira.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci, Números de Fibonacci, Numero de ouro, Fórmula de Binet, Retângulo Áureo.

Abstract

En este trabajo de finalización explorará el tema principal del estudio Fibonacci Teoría través Álgebra Lineal, pero específicamente en el tema de la transformación lineal que nos ayudará a encontrar la fórmula de Binet tenemos una fuerte relación con la sucesión de Fibonacci, iniciando una breve reseña biográfica de Leonardo Fibonacci, así como algunas de sus obras y logros énfasis en una de sus obras más importantes: los números de Fibonacci que surgieron de la "estudiar el problema de los conejos."Y con respecto a los números de Fibonacci estudiará sus relaciones con la Biología, Arquitectura, Arte, Física y el cuerpo humano. Terminamos este artículo que informa sobre otras cuestiones que traen una relación con la secuencia de Fibonacci como algunas propiedades de la secuencia de Fibonacci y su relación con otras asignaturas de matemáticas como el triángulo de Pascal, la geométrica progresión, el número de oro (número Phi), rectángulo de oro y la División de oro "Matemático vol inducción 4 2006 OBMEP Iniciación Científica"e "Introducción a la Teoría de Números Joseph Plinio"E para desarrollar este trabajo conceptos necesarios de Teoría de números, cálculo diferencial e integral, álgebra lineal y apoyo bibliográfico como libros eran Oliveira.

Keywords:Palabras clave: Secuencia de Fibonacci, los números de Fibonacci, Número oro, fórmula de Binet, rectángulo de oro.

SUMÁRIO

Introdução

0.1 Historia de Leonardo Fibonacci

Figura 1 *Leonardo Fibonacci*

O nome de Fibonacci é Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa, que nasceu por volta de 1175 na cidade de Pisa, um importante Centro Comercial da Itália, no século XIII. Seu sobrenome é conhecido por Fibonacci, (por significar filho de Bonaccio), pois seu pai chamava - se Guilielmo Bonaccio.

O pai de Fibonacci era um homem ligado a negócios mercantis, o que contribuiria para o interesse do jovem pelos números, que a partir daí Leonardo iniciou os seus estudos de matemática, onde foi considerado mais tarde um dos matemáticos mais talentosos da Idade Média.

Naqueles tempos as cidades comerciais italianas, tais como Gênova e Veneza mantinham entrepostos em varias partes do mediterrâneo. Isso fez com que a educação de Fibonacci tivesse influencias de varias culturas daquela região. Durante a infância Fibonacci recebeu parte de sua educação numa escola em Bijaia, norte da África, onde o seu pai ocupou o lugar de chefe de um desses entrepostos.

Fibonacci viajava com seu pai por diversos países do mediterrâneo como Egito, Sicilia, Grécia e Síria o que muito contribuiu para expandir seus conhecimentos matemáticos, encontrando-se por diversas vezes com estudiosos islâmicos em cada um dos locais que visitava e adquirindo conhecimento matemático do mundo árabe, tendo a oportunidade de estudar diferentes sistemas numéricos e métodos de operações aritméticas. E assim, dedicou os seus estudos aos números indo-arábicos. Conheceu também a obra de al-Khwarismi e assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas como o problema do Resto Chinês e o famoso problema dos Coelhos.

Ao retornar para sua terra natal em 1202, Fibonacci publicou sua obra muito famosa intitulada Líber abacci (o Livro do Ábaco ou do Cálculo) e uma segunda versão desse livro surgiu em 1228. Este livro contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e Álgebra elementares da época e realizou um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes, pois por este livro que os europeus vieram a conhecer os algarismos hindus também denominados arábicos.

Fibonacci defende energeticamente a notação numérica indu-arabica pela facilidade de se trabalhar com esses números quando em comparação com o sistema utilizado pelos italianos, devendo-se muito a ele a introdução desses numerais na Europa.

Devido o livro ter uma forte influência árabe, contém não apenas as regras para cálculo com os numerais indo-árabes, mas também diversos problemas, que incluem questões, certamente muito úteis aos mercadores, como o cálculo de juros, conversões monetárias, medidas, e outros tipos de problemas que Fibonacci resolve recorrendo a diversos algoritmos e métodos, entre eles o método da falsa posição e a resolução de equações quadráticas.

Ainda se destacam como obras de Leonardo Fibonacci os livros.

- Practica geometriae (1220): Onde descreve seus conhecimentos sobre Geometria e Trigonometria.

- Flos (1225): Neste Manuscrito Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinham sido colocados por João de Palermo, um membro da corte do Imperador Frederico II.

- Liber quadratorum (1225): É o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal.

E essas descobertas deram a Fibonacci grandes reconhecimentos da sociedade da época, onde o imperador Frederico II, o patrono do saber, convidou Fibonacci a participar de um torneio matemático onde João de Palermo lhe propôs três problemas que foram prontamente resolvidos pelo talentoso matemático.

Fibonacci morreu em 1250 provavelmente na cidade de Pisa na Itália, mas suas contribuições para a matemática sobrevivem até hoje e muitas de suas descobertas tem grande aplicabilidade no mundo moderno.

0.1.1 O Líber Abaci

Também conhecido como o livro do calculo, dividido em quinze capítulos foi escrito por Leonardo Fibonacci em 1202, e foi baseado na Aritmética e Álgebra que aprendeu durante as suas viagens pelo Mediterrâneo. Há aplicações envolvendo permuta de mercadorias, sociedades e geometria métrica. Há também uma farta coleção de problemas, dentre os quais o que deu origem à importante sequência de Fibonacci, como o problema da reprodução dos coelhos, que encontramos no capítulo doze desse livro, onde temos o seguinte enunciado em latim:.

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Ou seja, um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado, onde não há possiblidades de entrada de coelhos externos ou saída de coelhos internos neste período; os coelhos não morrem de velhice, fome ou doença. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano. Supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa há procriar dois meses após o seu nascimento.

Sendo assim, no primeiro mês, o mês inicial, teríamos um par de coelhos (ainda filhotes). No mês seguinte ainda apenas um par de coelhos (agora adultos), no terceiro mês teremos o par inicial mais o seu par de filhotes. Ao quarto mês o par inicial dá a luz ao seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes). Notemos que no próximo mês, o quinto, o número de pares de coelhos será a soma do número de pares de coelhos do mês atual, mais o número de pares de coelhos do mês anterior. Pois serão estes que irão contribuir com o acréscimo do número de coelhos para o próximo mês, já que quando chegar o quinto mês estarão aptos a procriar. Logo, o quinto mês terá cinco pares de coelhos: os três pares presentes no quarto mês, mais dois pares de filhotes, um par gerado pelo par inicial e o outro pelo primeiro par de filhotes que o par inicial teve.

A figura 2 ilustra os primeiros seis meses.(No capitulo 3 faremos a demonstração completa).

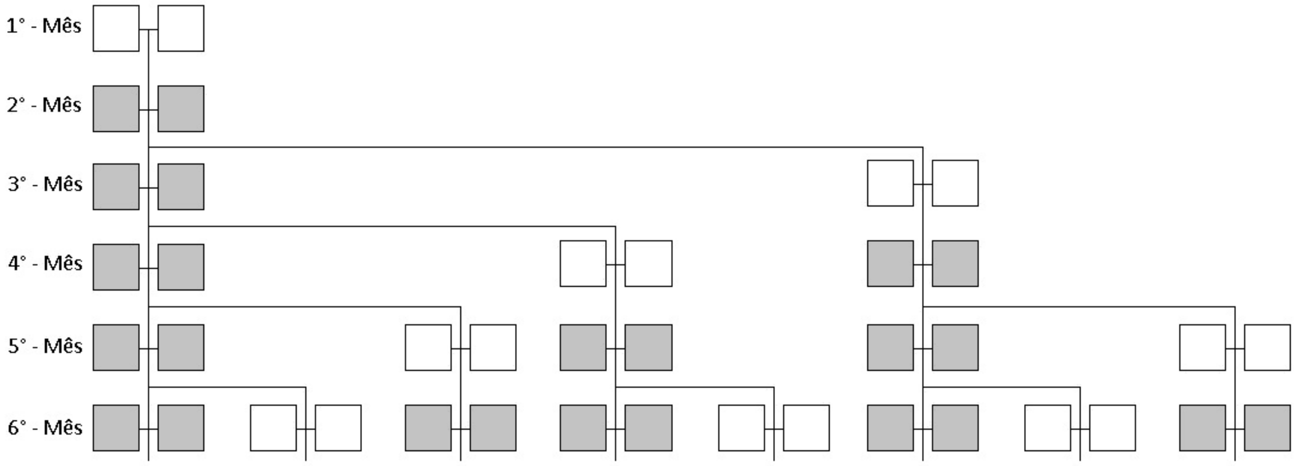


Figura 2 *Crescimento da população de coelhos*

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Noções Primitivas

A evolução dos números, assim como a dos conjuntos numéricos, ocorreu de modo a colaborar com a necessidade da humanidade. Os números inteiros apareceram quando os números naturais não satisfaziam todas as necessidades, por exemplo, na contagem, da medida, de temperatura.

Os Números Inteiros positivos foram os primeiros números trabalhados pela humanidade e tinham como finalidade contar objetos, animais, enfim, elementos do contexto histórico no qual se encontravam.

O conjunto dos números inteiros positivos recebe o nome de conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Sendo ele:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$$

Enquanto que o conjunto dos números inteiros contempla também os inteiros negativos, constituindo o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{..., -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

Os números inteiros estão presentes até hoje em diversas situações do cotidiano da humanidade como, por exemplo, para medir temperaturas, contar dinheiro, marcar horas, etc. Sua importância é indiscutível.

Vejamos algumas definições:

Axioma: Na matemática, um axioma é uma hipótese inicial as quais outros enunciados são logicamente derivados. Pode ser uma sentença, uma proposição, consideradas como óbvias ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Diferentemente de teoremas, axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução e nem são demonstráveis por derivações formais, simplesmente porque eles são hipóteses iniciais. Isto é, não há mais nada a partir do que eles seguem logicamente. Em muitos contextos, "axioma", "postulado"e "hipótese"são usados como sinônimos. A palavra "axioma"vem do grego, que significa "considerado válido ou adequado"ou "considerado auto-evidente".

Teorema: Um Teorema é uma proposição fundamental. Ou seja, é um resultado importante que se destaca. Usualmente deixa-se o termo "teorema"para as afirmações que podem ser provadas de grande "importância matemática". São dados outros nomes para os outros tipos dessas afirmações (proposições):

Proposição: Proposição é uma sentença declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa. Geralmente, de simples prova e de importância Matemática menor.

Lema: é um "pré-teorema". Um teorema que serve para ajudar na prova de outro teorema maior. A distinção entre teoremas e lemas é um tanto quanto arbitrária, uma vez que grandes resultados são usados para provar outros. Por exemplo, o Lema de Gauss e o Lema de Zorn são muito interessantes, e muitos autores os denominam de Lemas, mesmo que não os usem para provar alguma outra coisa.

2.2 Noções Preliminares

2.2.1 Notações

$\forall$: leia-se "para todo" ou "qualquer que seja".

$\exists$: leia-se "existe (pelo menos) um".

2.2.2 Implicação

Suponhamos, P e Q são "asserções" (ou "propriedades"). Quando escrevemos:

$$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$$

queremos dizer que:

$$\text{P implica em Q}$$

Ou seja, sempre que P for verdadeiro, também Q será verdadeiro.

Também podemos dizer que (a verdade de) P é condição suficiente para (a validade de) Q.

- Ou Q é condição necessária para P;
- Ou Q vale se P vale;

- Q vale se P vale;

- Se P, então Q.

Temos ainda que:

$$\text{P} \Longrightarrow \text{Q significa o mesmo que } Q \Longleftarrow P.$$

Observação 2.2.1. *A seta numa implicação $P \Longleftarrow Q$ não pode ser simplesmente invertida. Se P é condição suficiente para Q, isto é, significa que Q é condição necessária para P, mas não que Q é condição suficiente para P.*

Existem asserções P e Q que ambas implicam na outra, ou seja, as quais satisfazem simplesmente:

$$P \Longleftarrow Q \text{ e } Q \Longleftarrow P.$$

Temos então que P é suficiente para Q e também P é necessário(a) para Q. Dizemos que P é (condição) necessário (a) e suficiente para Q, ou seja, P vale se, e somente se, vale Q.

Indicaremos isto por:

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Dizemos que P e Q são asserções equivalentes, ou ainda, que P constitui uma propriedade de característica para Q (e vice-versa).

Se P é uma asserção, indicaremos por $\overline{P}$ a asserções "não P", a qual é verdadeira se, e somente se, P é falsa. Sejam P e Q duas asserções e suponha:

$$P \Longrightarrow Q.$$

Caso as duas asserções forem falsas, temos:

$$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$$

Ou seja, se P é suficiente para Q, então $\overline{Q}$ é suficiente para $\overline{P}$, ou ainda, se P é suficiente para Q, então $\overline{P}$ é necessária para $\overline{Q}$.

2.3 Conceito Primitivos e Conjuntos

Como conceitos admitiremos: A noção de elemento, a relação de igualdade "=", a noção de conjunto e a relação da pertencia "$\in$".

Um conjunto A é uma "coleção" ou "família" de "elementos" ou "objetos".

Dado um conjunto A. Para indicarmos que um elemento a pertence a A, escreveremos $a \in A$, enquanto sua negação é escrita $a \notin A$.

Admitimos também que, para qualquer objeto de a ocorre exatamente uma das propriedades:

$$\text{Ou } a \in A \text{ ou } a \notin A.$$

Além disso, para dois elementos $a, b \in A$ teremos exatamente uma das possibilidades:

$$\text{Ou } a = b \text{ ou } a \neq b.$$

Temos que:

$A = \{a|...\}$, é lido: A é um conjunto de todos os elementos a tal que.

2.3.1 Igualdade entre Conjuntos

Definição 2.3.1 (Igualdade entre Conjuntos)**.** *Dados dois conjuntos A e B, são iguais quando eles possuem os mesmos elementos, isto é:*

$$A = B \Longleftrightarrow \forall\ a \in A \Longrightarrow a \in B \text{ e } \forall\ b \in B \Longrightarrow b \in A.$$

Exemplo 2.3.1. *Os seguintes conjuntos tem notação padrão e serão sempre usados :*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *representa o conjunto dos números naturais.*

$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ *representa o conjunto dos números inteiros.*

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m, n \in Z \text{ e } n \neq 0\right\}$ *representa o conjunto dos números racionais.*

$\mathbb{R}$ *representa o conjunto dos números reais.*

2.3.2 Subconjuntos

Definição 2.3.2. *Se A e B são dois conjuntos, dizemos que A é um subconjunto (ou uma parte) de B (também B abrange A), se todo o elemento de A for elemento de B, ou seja, se para todo o elemento a, a implicação*

$$a \in A \Longrightarrow a \in B.$$

se for verdadeira. Escreve-se como $B \supseteq A$ ou $A \subseteq B$.

Temos:

$$A{=}B \Leftrightarrow A\subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Observação 2.3.1. *Considere A,B e C três conjuntos, valem as regras:*

a) *Sempre $A \subseteq A$;*

b) *$A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$;*

c) *Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.*

A negação de A $\subseteq$ B é simbolizada por A $\not\subseteq$ B.

Se A $\subseteq$ B e A $\neq$ B, diremos que A é subconjunto próprio de B. Assim, A $\subset$ B significa que existe um $b \in$ B tal que B $\notin$ A.

2.4 Método de Indução Matemática

Definição 2.4.1. *Seja $P(\cdot)$ Uma função proposicional em $\mathbb{N}$. Se $P(1)$ é verdade e para todo $m \in \mathbb{N}$, $p(m)$ implica $P(m+1)$, então $p(n)$ e verdade par todo $n \in \mathbb{N}$ isto é:*

$$(P(1) \text{ e } (\forall m \in \mathbb{N}, P(m) \Rightarrow P(m+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$$

Note que:

$$(P(1) \text{ e } (\forall m \in \mathbb{N}, P(m) \Rightarrow P(m+1))){\Rightarrow} P(1){\Rightarrow} P(2){\Rightarrow} P(3){\Rightarrow} \ldots \Rightarrow P(n) \Rightarrow \ldots$$

Em outros termos: Seja $\mathbb{S}$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisfaz

i) $P(1) \in \mathbb{S}$

ii) $\forall n \in \mathbb{S}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Então

$$\mathbb{S} = \mathbb{N}$$

Exemplo 2.4.1. *Prove que para todos inteiros $n \geq 1$*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$P(1)$, para $n = 1$, tem-se que:

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Se a formula é verdadeira pra $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$, ou seja, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$

$$P(k) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para algum inteiro $k \geq 1$

Deve-se motrar que:

$$P(k+1) : 1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$P(k+1) : 1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Logo é verdadeiro

2.5 Estudo das Sequências Númericas

Definição 2.5.1. *Uma sequência de números reais é uma função.*

$$f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto f(n) = a_n$$

As notações clássicas para sequências são:$f(n) = a_n$, que é o termo geral da sequência. A sequência é denotada por:

$$a_n = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$$

Para $n \in \mathbb{N}$

A imagem de n por a é chamada de n-énesimo termo da sequência.

$a_1 \to$ Primeiro Termo

$a_2 \to$ Segundo Termo

$a_3 \to$ Terceiro Termo

$\vdots$

$a_n \to$ n-ésimo termo.

Exemplo 2.5.1. *Seja a sequência* $(\frac{1}{n})$ *no intervalo* $1 \leq n \leq \infty$*, calcule os primeiros termos.*

Primeiro termo é 1

Segundo termo é $\frac{1}{2}$

Terceiro termo é $\frac{1}{3}$

Quarto termo é $\frac{1}{4}$

Quinto termo é $\frac{1}{5}$

Sexto termo é $\frac{1}{6}$

Setimo termo é $\frac{1}{7}$

Oitavo termo é $\frac{1}{8}$

Nono termo é $\frac{1}{9}$

$\vdots$

n-ésimo termo é $\frac{1}{n}$

$\vdots$

Logo a sequência será

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$$

2.5.1 Estudo do Limite de uma Sequência Númerica

Definição 2.5.2. *Uma sequência* (a_n) *para* $n \in \mathbb{N}$ *converge ao número real* L *quando para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*$|a_n - L| < \varepsilon$ *para todo* $n > n_0$

Se a sequência (a_n) para $n \in \mathbb{N}$ converge para L denotamos:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

O número L é dito o limite da sequência.

Uma sequência é dita divergente se não converge. Logo, a sequência (a_n) para $n \in \mathbb{N}$ diverge quando, para nenhum número real L se tem $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, ou seja, se existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

Exemplo 2.5.2. *Seja a sequência* $(a_n) = \frac{1}{n}$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *converge a zero.*

De fato $\varepsilon > 0$ devemos determinar um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$; $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ desde que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ caso $\frac{1}{\varepsilon}$ pode não ser um número natural escolhemos $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, logo para todo $n > n_0$ temos $\frac{1}{\varepsilon} < \varepsilon$, logo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2.5.2 Estudo de Sequências Definidas Recursivamente

Definição 2.5.3. *Algumas sequências não surgem de uma fórmula para o termo geral, mas de fórmulas que especificam como gerar cada termo em função de seus anteriores. Tais sequências são definidas recursivamente e as fórmulas que as definem são chamadas de fórmulas de recursão.*

Exemplo 2.5.3. *Considere a sequência cujos termos são:*

$a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

Como são os Termos dessa sequência?

$$\begin{array}{lll}
a_1 = \sqrt{2} & & \\
a_2 = \sqrt{2a_1} & = & \sqrt{2\sqrt{2}} \\
a_3 = \sqrt{2a_2} & = & \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \\
a_4 = \sqrt{2a_3} & = & \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} \\
\vdots \quad \vdots & & \vdots \\
a_n = \sqrt{2a_{n-1}} & = & \underbrace{\sqrt{2\ldots\sqrt{2\sqrt{2}}}}_{n \text{ vezes}}
\end{array}$$

Observação 2.5.1. *Importante: toda sequência definida recursivamente precisa ter um* *caso inicial não recursivo, Neste caso é* $a_1 = \sqrt{2}$*, Também outro exemplo clássico sobre sequencia recursiva é a sequência de fibonacci:*

Sequência de Fibonacci:

$F_1 = 1$
$F_1 = 1$
$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots)$

2.6 Critério de Convergência de Cauchy

O assunto seguinte é de caráter geral, é um critério de convergência, que nos dará uma condição, não somente suficiente, mas também necessária, para a convergência de qualquer sequência de números reais. Este critério é conhecido como Critério de Convergência de Cauchy.

Definição 2.6.1. *:Uma sequência de números reais* (a_n) *é dita ser uma sequência de Cauchy se ela satisfaz a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real* $\varepsilon > 0$ *pode se obter* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $m > n_o$ *e* $n > n_0$ *implica*$|a_m - a_n| < \varepsilon$*.*

Percebemos que esta definição compara-se com a definição de limites, pois o limite exige que os termos a_n se aproximem arbitrariamente de um número real L, Enquanto que, para (a_n) ser uma sequência de Cauchy, exige-se que seus termos a_n e a_m para valores suficientemente grandes dos índices m e n, se aproximem arbitrariamente uns dos outros, ou seja, impõe-se, apenas, uma condição sobre os termos da própria sequência.

Usando os Teoremas a seguir, mostraremos que uma sequência é convergente se e somente se é de Cauchy.

Teorema 2.6.1. *Toda Sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração 2.6.0.1. *Seja* (a_n) *tal que* $x_n \to a$ *então dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$*, assim para* $m, n > n_0$ *temos que* $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$*, ou seja* (a_n) *é uma sequência de Cauchy.*

Teorema 2.6.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração 2.6.0.2. *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, tomando $\varepsilon = 1$, na definição, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implicam $|x_m - xn| < 1$ em particular $n \geq n_0$ implica $|x_m - x_n| < 1$,isto é,para $n \geq n_0$ temos $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$ segue-se que $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$ e a é o menor e b é o maior elemento de X, então $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que conclui a demonstração.*

Teorema 2.6.3. *Se x_n é uma sequência de Cauchy, se x_n possui uma subsequencia convergente. Então x_n é convergente.*

Demonstração 2.6.0.3. *Seja (x_{n_k}) subsequência de (x_n) que converge pra $a \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$. Tal que $m, n \geq n_0$ implica que $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como x_{n_k} converge para a existe tambem um $n_1 > n_0$ tal que $|x_1 - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, assim $n > n_0$ implica $|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ desta forma x_n converge para a.*

Teorema 2.6.4. *(x_n) é convergente se e somente se (x_n) é de Cauchy.*

Demonstração 2.6.0.4. *Se (x_n) é de cauchy $\Rightarrow$ é limitada $\Rightarrow$ (x_n) admite uma subsequencia convergente (x_n) $\Rightarrow$ é convergente, ou seja, $X = \lim_{n\to a}(x_n)$ seja $\varepsilon > 0$, como (x_n) é de cauchy, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $m, n \geq n_0$.*

Como (x_{n_k}) é convergente então existe $k \in \{n_1, n_2, \ldots\}$ tal que $k > n_0$ implica $|x - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $k > n_0$ temos também que $|x_n - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$ finalmente para todo $n \geq n_0$ temos $|x - x_n| \leq |x - x_k| + |x_k - x_n| < \varepsilon$ concluindo que (x_n) converge.

2.7 Conceito Sobre Limites

Definição 2.7.1. *Seja f uma função e p um ponto do domínio ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f dizemos que f tem um limite L, em p se para todo $\varepsilon > 0$ dado $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in Df$.*

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tal número L, que quando existe um único, será indicado por $\lim_{x\to p} f(x) = L$. assim:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \;\; talque \;\; \forall x \in Df \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{array} \right.$$

Exemplo 2.7.1. *Calcule o limite.*

$$\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2$$

.

Pela definição $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$ e $0 < |x - 1| < \delta$

O exame da desigualdade envolve ε proporciona uma chave a escolha de δ, as seguintes desigualdades são equivalentes.

$$|3x - 1 - 2| < \varepsilon$$

$$|3x - 3| < \varepsilon$$

$$|3(x - 1)| < \varepsilon$$

$$3|x - 1| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

A ultima desigualdade nos sugere a escolha do ε, fazendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$ vem que $|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$ Portanto

$$\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2$$

2.8 Transformação Linear

Definição 2.8.1. *Sejam U e V espaços vetoriais. Dizemos que uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se forem verificadas as seguintes condições:*

i) $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in U$

ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u), \forall u \in U$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Observação 2.8.1. *Note que $T : U \to V$ é uma transformação linear se e somente se $T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$, para todo $u, v \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Proposição 2.8.1. *Se* $Tu = \lambda.u \Rightarrow T^n u = \lambda^n.u$*, sendo* u *Autovetor,* λ *Autovalor e* $n \in \mathbb{N}$

Demonstração 2.8.0.5. *Usaremos indução finita para provar tal fato Temos que para os casos de* n *igual a 0 ou 1 a demonstração é trivial.* $n = 2$

$$T^2u = T(Tu) = T(\lambda.u) = \lambda.\lambda u = \lambda^2.u$$

Supondo verdedeiro para $n = k$.

$$T^k u = \lambda^k u$$

Para $n = k + 1$

$$T^{(k+1)}u = T(T^k u) = T(\lambda^k u) = \lambda.\lambda^k.u = \lambda^{(k+1)}.u$$

Definição 2.8.2. *Dada* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *definimos o polinômio característico de* A *como sendo determinante*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

onde I é matriz identidade de orden n.

Capítulo 3

Teoría Matemática de Fibonacci

Neste capítulo apresentaremos a teoría matemática que está ligada a sequência de Fibonacci, bem como o problema dos coelhos, a genealogia do zangão e algumas propriedades da sequência de Fibonacci.

3.1 Os Coelhos de Fibonacci.

Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado, onde não há possiblidades de entrada de coelhos externos ou saída de coelhos internos neste período; os coelhos não morrem de velhice, fome ou doença. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano. Supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa há procriar dois meses após o seu nascimento.

Modelagem do Problema:

Vamos adimitir um casal de coelhos diferenciando o sexo de ambos pelos símbolos.

$$\begin{cases} \spadesuit \rightarrow Macho \\ \heartsuit \rightarrow Femea \end{cases}$$

E as suas respectivas idades, Jovens um mês e Adulto dois meses de idade por.

$$\begin{cases} \circ \rightarrow Jovem \\ \bullet \rightarrow Adulto \end{cases}$$

Representaremos essa evolução da população pela seguinte tabela:

Simplificando esse problema em uma tabela mais capactada, observa-se o seguinte:

Observamos a tabela 3.2 que apresenta detalhadamente a reprodução de coelhos que ao longo de um ano o número de pares será 144. Assim , Fibonacci resolveu o problema dos coelhos e observou que apartir do terceiro mês, os números da sequência podem ser obitidos através da soma dos dois números anteriores e sendo assim poderíamos obter qualquer elemento desta série, neste caso, o número de coelhos em um determinedo mês.

Mês	*População*	*Casais*
1	$(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	1
2	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet$	1
3	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	2
4	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	3
5	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	5
6	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	8
7	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	13
8	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	21
9	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	34
10	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	55
11	$(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\bullet,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,(\spadesuit, \heartsuit)^\circ,$ $(\spadesuit, \heartsuit)^\circ$	89

Mês	*População*	*Casais*
12	$(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet}$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\bullet},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},$ $(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ},(\spadesuit,\heartsuit)^{\circ}$	144

Tabela 3.1 *Reprodução dos casais de coelhos por mês.*

Mês	*Casais de Adultos*	*Casais de jovens*	*Totais de Casais*
1	00	01	01
2	01	00	01
3	01	01	02
4	02	01	03
5	03	02	05
6	05	03	08
7	08	05	13
8	13	08	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Tabela 3.2 *Reprodução de coelhos em suas respectivas gerações.*

Temos que a solução do problema nos dá uma sequência de números que tem uma característica especial denominada recursividade, ou seja:

1º termo somado com o 2º termo gera o 3º termo

2º termo somado com o 3º termo gera o 4º termo

3º termo somado com o 4º termo gera o 5º termo

4º termo somado com o 5º termo gera o 6º termo

5º termo somado com o 6º termo gera o 7º termo

6º termo somado com o 7º termo gera o 8º termo

7º termo somado com o 8º termo gera o 9º termo

8º termo somado com o 9º termo gera o 10º termo

9º termo somado com o 10º termo gera o 11º termo

10º termo somado com o 11º termo gera o 12º termo

e assim por diante.

Denotando a sequência por $u = u_n$ como o número de pares de coelhos ao final do mês n, poderemos escrever:

$$\begin{array}{l}
u_1 + u_2 = u_3 \\
u_2 + u_3 = u_4 \\
u_3 + u_4 = u_5 \\
u_4 + u_5 = u_6 \\
u_5 + u_6 = u_7 \\
u_6 + u_7 = u_8 \\
u_7 + u_8 = u_9 \\
u_8 + u_9 = u_{10} \\
u_9 + u_{10} = u_{11} \\
u_{10} + u_{11} = u_{12} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}$$

$$u_{n-2} + u_{n-1} = u_n \quad para \quad u_1 = u_2 = 1. \tag{3.1}$$

Também está lei de formação desta sequência pode ser escrita da seguinte maneira:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; \quad n \in \mathbb{N} \quad e \quad F_1 = F_2 = 1 \tag{3.2}$$

As relações (3.1) e (3.2) definem, por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada de Sequência de Fibonacci, cujos elementos são chamados de números de Fibonacci.

Uma recorrência do tipo (3.1),

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Basta determinar o elemento u_n se conhecermos os elementos anteriores u_{n-1} e u_{n-2}, que , para serem calculados, necessitam doconhecimento dos dois anteriores, e assim por diante. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando são dados u_1 e u_2; onde $u_1 = u_2 = 1$ Sendo assim, aplicando a recorrência (2.1), temos a sequência de Fibonacci fica da seguinte maneira: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,. . .)

$$\begin{cases} u_1 = 1 & 1+2=3 & 5+8=13 & 21+34=55 \\ u_2 = 1 & 2+3=5 & 8+13=21 & 34+55=89 \\ 1+1=2 & 3+5=8 & 13+21=34 & 55+89=144 \end{cases}$$

3.1.1 A árvore Genealógica da abelha macho (Zangão).

Veremos também que está sequencia não aplica - se somente a reprodução de coelhos, mas será encontrada em diversos fenômenos da natureza como na árvore genealógica do zagão como mostraremos a seguir, ou seja, na reprodução das abelhas, quando um óvulo não é fertilizado ele gera uma abelha macho (Zangão), e quando ocorre à fertilização, gera uma abelha fêmea. Assim, uma abelha macho sempre terá como pais apenas uma abelha fêmea, ao passo que a abelha fêmea terá um casal de abelhas como pais. Logo, se analisarmos a árvore genealógica de um zangão, teremos que seu gerador é sempre apenas uma abelha fêmea. Esta, por sua vez, tem um pai e uma mãe gerados por uma abelha fêmea e um par de abelhas macho e fêmea, respectivamente.

Modelagem do Problema:

$$\begin{cases} M \to Abelha \quad Macho \\ F \to Abelha \quad Femea \end{cases}$$

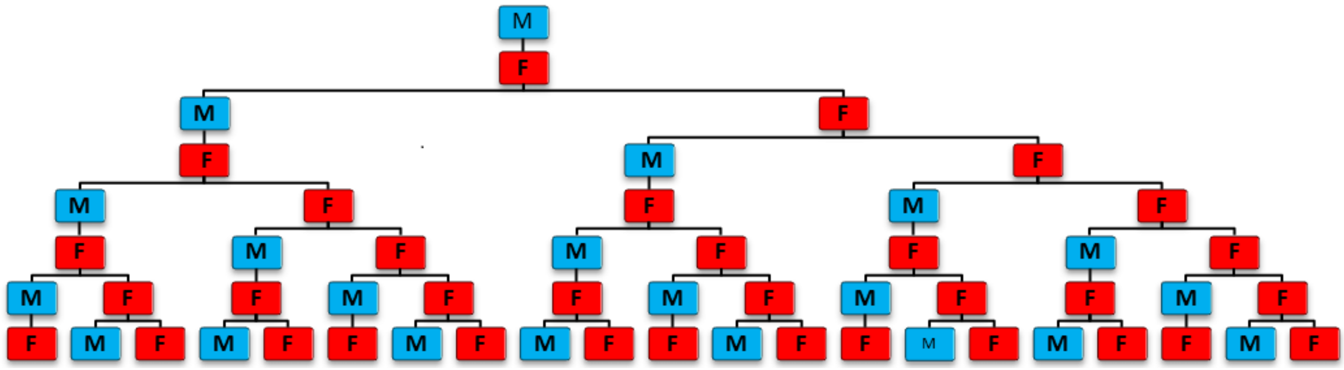


Figura 3.1 *Árvore Genealógica do Zangão*

Vamos simplificar através de uma tabela tomando-se o número de abelhas de cada geração.

Geração	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de Abelhas	1	1	2	3	5	8	13	21

Tabela 3.3 *Abelhas ao longo das gerações.*

Percebemos que o problema da árvore genealógica do Zangão (tabela 3.3) assemelha-se com problema dos coelhos (tabela 3.2), por essa razão temos que a sequência de Fibonacci permanece da mesma forma: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...).

3.2 Propriedades Númericas da Sequência de Fibonacci.

A seguir expomos algumas propriedades matemáticas da sequência ou dos números de Fibonacci. Embora muitas delas não sejam utilizadas nesse trabalho, acreditamos que é importante estuda-las, já que são inúmeras as possibilidades de aplicação desta sequência. Seja a sequência de Fibonacci $F_1; F_2; F_3; ...; F_n; ...$, com $n \in \mathbb{N}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Temos as seguintes propriedades.

Propriedade 3.2.1. *Igualdade Fundamental.*

Seja a equação

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; \quad para \quad todo \quad n \geq 1 \quad n \in \mathbb{N} \quad e \quad F_1 = F_2 = 1 \tag{3.3}$$

Desse modo, descreve-se a Sequência de Fibonacci como uma sequência recursiva, isto é quando qualquer termo a partir do terceiro pode ser obtido através da somoa de dois números anteriores, sendo essa a principal caracteristica desta sequência.

Propriedade 3.2.2. *A Soma dos n Primeiros Números da Sequência de Fibonacci.*

É dada por.

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1} = F_{n+1}$$

Demonstração 3.2.0.1. *Por indução finita, provamos ser valida para o primeiro termo* $n = 1$.

$$F_0 = 1 = 2 - 1 = F_2 - 1$$

supondo verdadeiro para $n = k$

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_k = F_{k+1} - 1$$

devemos provar para $n = k + 1$ *de fato*

$$(F_0 + F_1 + \ldots + F_{k-2} + F_{k-1}) + F_k = (F_{k+1} - 1) + F_k = F_{k+2} - 1$$

Propriedade 3.2.3. *A Soma dos Termos de Indices ímpares da Sequência de Fibonacci*

pode ser dada por:

$$F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n} - 1 = F_{2n} - 1$$

com $n > 0$

Demonstração 3.2.0.2. *Por indução finita, provamos ser valida para o primeiro termo* $n = 1$.

$$F_1 = 1 = 2 - 1 = F_2 - 1$$

Supondo verdadeiro para $n = k$

$$F_1 + F_3 + ... + F_{2k} - 1 = F_{2k} - 1$$

Basta provar para $n = k + 1$

$$F_1 + F_3 + ... + F_{2k} - 1 + F_{2(k+1)} - 1 = (F_1 + F_3 + ... + F_{2k} - 1) + F_{2k+2-1}$$

$$F_1 + F_3 + ... + F_{2k} - 1 + F_{2(k+1)} - 1 = (F_{2k} - 1) + F_{2k} + 1$$

$$F_1 + F_3 + ... + F_{2k} - 1 + F_{2(k+1)} - 1 = F_{2k} + 2 - 1$$

$$F_1 + F_3 + ... + F_{2k} - 1 + F_{2(k+1)} - 1 = F_{2(k+1)} - 1$$

Propriedade 3.2.4. *A Soma do Quadrado dos Termos da Sequência de Fibonacci*

é dada por

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n.F_{n+1}$$

Demonstração 3.2.0.3. *Por indução finita, provamos ser valida para o primeiro termo $n = 0$.*

$$F_0 = 1 = 1.1 = F_0.F_1$$

Supomos ser verdadeira para $n = k$

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + ... + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$$

Tem-se provar ser valida para $n = k + 1$

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + ... + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_k.F_{k+1} + F_{k+1}^2$$

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + ... + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_k.F_{k+1} + F_{k+1}.F_{k+1}$$

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + ... + F_k^2 + F_{k+1}^2 = (F_k + F_{k+1})F_{k+1}$$

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + ... + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1}.F_{k+2}$$

Propriedade 3.2.5. *Para* $m, n > 0; m, n \in \mathbb{N}$ *temos:*

$$F_{m+n+1} = F_{n-1}.F_m + F_n.F_{m+1}$$

Demonstração 3.2.0.4. *Por indução finita sobre* m *temos que para* $m = 1$

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &= F_{n-1} + F_n + F_n \\ &= F_{n+1} + 2F_n \end{aligned}$$

logo

$$F_{n+2} = F_{n+1} + 2F_n = F_1.F_{n+1} + F_2.F_n$$

Para $m = 2$

$$\begin{aligned} F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+1} + F_n \\ &= 2F_{n-1} + F_n \\ &= (F_n + F_{n-1} + F_n) \\ &= 2F_{n-1} + 3F_n \end{aligned}$$

Logo

$$F_{n-3} = F_{n-1}.F_2 + F_n.F_3$$

Supondo verdadeiro para $m = k$

$$F_{k+n+1} = F_{n-1}.F_k + F_n.F_{k+1}$$

Temos de provar ser verdadeiro para $m = k+1$*, como supomos verdadeiro até um certo* $m = k$*, temos que pela hipótese indutiva a fórmula é válida para* $m = k - 1$*. Assim*

$$\begin{aligned} F_{(k+1)+n+1} = F_{k+n+1} + F_{k+n} &= (F_{n-1}.F_k + F_n.F_{k+1}) + (F_{n-1}.F_{k-1} + F_n.F_k) \\ &= F_{n-1}(F_k + F_{k-1}) + F_n(F_k + F_{k-1}) \\ &= F_{n-1}.F_{k+1} + F_n(F_{k+2}) \\ &= F_{n-1}.F_{k+1} + F_n(F_{(k+1)+1}) \end{aligned}$$

Propriedade 3.2.6. *para* $F_n^2 = F_{n-1}.F_{n+1} + (-1)^m$ *com* $n > 0$

Demonstração 3.2.0.5. *Usaremos novamente indução finita para provar essa propriedade, para* $n = 1$

$$F_1^2 = 1 = 1.2 = F_0.F_2 + (-1)^1$$

Supondo verdadeiro para $n = k$.

$$F_k^2 = F_{k-1}.F_{k+1} + (-1)^k$$

Temos de provar que vale para $n = k + 1$

$$F_{k+1}^2 = F_{k+1}.F_{k+1} = F_{k+1}(F_k + F_{k-1}) =$$

$$= F_k.F_{k+1} + F_{k-1}.F_{k+1} = F_k.F_{k+2} + F_k^2 - (-1)^k =$$

$$= F_k(F_{k+1} + F_k) + (-1).(-1)^k = F_k.F_{k+2} + (-1)^{(k+1)}$$

Definição 3.2.1. *Dados dois números inteiros a e b, dizemos que a e b são primos entre si, se o único divisor comum entre eles for 1.*

Teorema 3.2.1. *Os números consecutivos de Fibonacci são primos entre si.*

Demonstração 3.2.0.6. *Vamos supor por absurdo que F_n e F_{n+1} possuem um divisor inteiro $d > 1$ em comum, logo $F_n - F_{n+1} = F_{n-1}$ também é divisível por d. Se tomarmos F_n e F_{n-1} e repetirmos o processo, teremos que F_{n-2} também será divisível por d.*

Por indução finita sobre m podemos provar que se F_{n-m} e $F_{n-(m+1)}$ possuem um divisor d em comum, então $F_{n-(m+2)}$ também é divisível por d, sendo $m \leq n - 2$. Temos que para $m = 0$ é verdade (mostrado acima). Supondo verdade para $m = k$ temos

$$F_{n-k} - F_{n-(k+1)} = F_{n-(m+2)}$$

com d divisor de ambos os lados. Temos de provar para $m = k + 1$

$$F_{n-(k+1)} - F_{n-(k+2)} = F_{n-(k+3)} = F_{n-((k+1)+2)}$$

Como o lado esquerdo, $F_{n-(k+1)}$ e $F_{n-(k+2)}$ são divisíveis por d, então o lado direito, $F_{n-((k+1)+2)}$, também é divisível por d. Assim, repetindo-se o processo várias vezes, teremos que F_0 é divisível por d, o que é absurdo, pois $F_0 = 1$ e $d > 1$. Logo F_n e F_{n+1} são primos entre si.

Capítulo 4

A Sequência de Fibonacci na Matemática.

Neste capítulo abordaremos Fibonacci e sua relação com a matemática, mostrando ou demonstrando alguns assuntos que estão ligados diretamente com os números de Fibonacci e que são de muita valia , pois comprovão a veracidade que Fibonacci descobriu em seus estudos.

4.1 A Sequência de Fibonacci.

Definição 4.1.1. *A sequência de Fibonacci é a sequência (F_n) definida pela recorrência.*

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{(n+1)} + F_{(n-2)} \end{cases}$$

Para todo $n \geq 3$

Às vezes é conveniente definirmos $f_0 = 0$, nesse caso a recorrência é válida para todo $n \geq 2$.

Veja os primeiros termos da sequência: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...)$

4.2 Encontrando a Fórmula Generalizada (A Fórmula de Binet)

Como já percebemos a sequência de Fibonacci segue o modelo da recursividade, pois para conhecer um termo F_n qualquer temos de conhecer os elementos anteriores $n - 1$ termos anteriores a F_n. Nesta seção, iremos determinar uma fórmula capaz de encontrar o termo F_n. Será necessário para desenvolver essa fórmula generalizada da sequência de Fibonacci, conceitos sobre transformações lineares.

Em 1843 um matemático francês redescobriu uma fórmula capaz de calcular o n-ésimo termo da sequência de fibonacci, onde em sua homenagem está fórmula recebeu o nome de Fórmula de Binet.

Onde nesta seção mostraremos a fórmula de Binet e no proximo capitulo trataremos também sua relação com número de ouro também conhecido como número aureo.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

4.3 Fibonacci e Transformação Linear

4.3.1 Definindo a Transformação Linear

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x, y) = (y_n, x_n + y_n)$ temos que $v_{n+1} = Tv_n$, com $v_n = (x_n, y_n)$ possui o seguinte sistema;

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & y_n \\ y_{n+1} &= & x_n + y_n \end{cases}$$

Seja

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} \qquad (1)$$

e $y_n = x_{n+1}$, então $y_{n-1} = x_n$, logo $y_{n+1} = y_n + x_n$

De (1) se transforma no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & y_n \\ y_{n+1} &= & x_n + y_n \end{cases} \qquad (2)$$

Em forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Então seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Associamos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associado a matriz A definido por:

$$v_n = (x_n, y_n)$$

$$Tv_n = v_{n+1}$$

logo

$$T(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (Y_n, x_n + y_n)$$

Equivale a (2)

Analisamos agora os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, a qual é linear

$$(x, y) \to T(x, y) = (y, x + y)$$
$$(y, x + y) = \lambda(x, y)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y & = & \lambda x \\ x + y & = & \lambda y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda x + y & = & 0 \\ -x + (1 - \lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$p(T) = det(T - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$
$$p(T) = \lambda(\lambda - 1) - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

desenvolvendo essa equação quadraticas obteremos duas raizes reais:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

sendo estas raizes os autovalores da transformação T.

Temos agora de encontrar uma base formada pelos autovetores $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ da transformação T de modo que

$$Tu = \lambda_2 = \Big(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\Big)u$$

e

$$Tv = \lambda_2 = \Big(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\Big)v$$

Assim chegamos nos seguintes sistemas indeterminados.

$$\begin{cases} b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a \\ a + b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}c \\ c + d = \frac{1-\sqrt{5}}{2}d \end{cases}$$

se tomarmos b e d iguais a 2, temos que $a = \sqrt{5} - 1$ e $c = -\sqrt{5} - 1$ ficando os outovetores u e v iguais a $(\sqrt{5} - 1, 2)$ e $(-\sqrt{5} - 1, 2)$ respectivamente.

Segue da Proposição 1.8.1 que;

$$Tu = \lambda u \Rightarrow T^n u = \lambda^n u = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n.(\sqrt{5} - 1, 2)$$

e

$$Tv = \lambda v \Rightarrow T^n v = \lambda^n v = \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.(-\sqrt{5} - 1, 2)$$

Assim se escrevermos o vetor $v_0 = (1, 1)$ como combinação linear dos autovetores u e v, ao aplicarmos T, n vezes, teremos $T^n(v_0) = v_n = (x_n, y_n)$, onde o termo de posição $(n + 1)$ da sequência de fibonacci sera igual a x_n.

escrevendo

$$v_0 = (1, 1) = \Big(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\Big)(\sqrt{5} - 1, 2) - \Big(\frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\Big)(-\sqrt{5} - 1, 2)$$

Temos que.

$$v_n = T^n v_0 = \Big(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\Big)T^n u - \Big(\frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\Big)T^n v$$

Substituindo $T^n u$ e $T^n v$.

$$v_n = T^n v_0 = \Big(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\Big)\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n(\sqrt{5} - 1, 2) - \Big(\frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\Big)\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n(-\sqrt{5} - 1, 2)$$

Ou seja;

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Bigg(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{(n+1)} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{(n+1)}\Bigg)$$

Como

$$\begin{aligned}
v_0 &= (1, 1) \to 1^{o} termo = F_1\\
v_1 &= (1, 2) \to 2^{o} termo = F_2\\
v_2 &= (2, 3) \to 3^{o} termo = F_3\\
v_3 &= (3, 5) \to 4^{o} termo = F_4\\
v_4 &= (5, 8) \to 5^{o} termo = F_5\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$v_{(n-1)} = (x_{n-1}, y_{n-1}) \rightarrow n- \text{ ésimo termo} = F_n, \text{ logo.}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Temos assim uma fórmula que torna possível determinar qualquer termo da sequência de Fibonacci sem a necessidade de conhecer os termos anteriores.

Vejamos o exemplo aseguir.

Exemplo 4.3.1. *Encontre diretamente da formula de Binet o 20º número da Sequência de Fibonacci.*

Temos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

deste modo, basta substituir na fórmula de Binet, ou seja,

$$n = 20 \Rightarrow F_{20} = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{20}\right]$$

agora desenvolvemos

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = \frac{(1+\sqrt{5})^{20}}{2^{20}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{20}}{262144}$$

e

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = \frac{(1-\sqrt{5})^{20}}{2^{20}} = \frac{(1-\sqrt{5})^{20}}{262144}$$

pelo binômio de Newton, o desenvolvimento de $(1+\sqrt{5})^{20} - (1-\sqrt{5})^{20}$ é igual a

$$(1+\sqrt{5})^{20} - (1-\sqrt{5})^{20} = 2\left(\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}\sqrt{5} + \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}(\sqrt{5})^3 + ... + \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix}(\sqrt{5})^{19}\right)$$

Assim,

$$F_{20} = \tfrac{1}{5}\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{20}\right] = \tfrac{1}{262144\sqrt{5}}\left[2\left(\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}\sqrt{5} + \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}(\sqrt{5})^3 + ... + \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix}(\sqrt{5})^{19}\right)\right] =$$

$$= \tfrac{1}{131072}\left[\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}(\sqrt{5})^2 + ... + \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix}(\sqrt{5})^{18}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{131072}\left[\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}(\sqrt{5})^2 + ... + \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}(\sqrt{5})^9\right] = 6765$$

4.4 Fibonacci e Progressão Geométrica.

Através dessa propriedade encontraremos também a fómula de Binet, que nos garante obter todas as soluções da equação recursiva de Fibonacci:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$$

válida para todo inteiro $n > 1$, basta obter quaisquer duas soluções não proporcionais, assim pela propriedade linear da multiplicação por escalar, podemos escolher uma sequência de Fibonacci cujo primeiro termo seja igual a 1.

Vamos considerar então a sequência W_n que seja uma progressão geométrica com $W_1 = 1$ e a razão não nula $(q \neq 0)$, isto se:

$$W = q^{n-1}$$

para que está sequência seja de Fibonacci devemos ter que:

$$W_{n-1} + W_n = W_{n+1}$$

ou seja

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

que se reduz a

$$1 + q = q^2$$

Resolvendo a equação vamos ter duas raizes:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Observamos que:

$$q_1 + q_2 = 1$$
$$q_2.q_2 = -1$$

Para cada raiz, obtemos uma seqüência de Fibonacci, logo podemos construir V_n e W_n através de:

$$V_n = q_1^{n-1}$$

$$W_n = q_2^{n-1}$$

e U_n pode ser escrita como combinação linear de V_n e W_n, isto é:

$$U_n = a.V_n + b.W_n = a\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n-1} + b\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n-1}$$

E esta é a forma mais geral possível para uma seqüência de Fibonacci, logo se tomarmos em particular:

$$a + b = 1$$

$$a.q_1 + b.q_2 = 1$$

Teremos que:

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$b = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

e substituindo na expressão de U_n, obtemos a Fórmula de Binet:

$$U_n = a\left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n-1} + b\left[\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n-1}$$
$$U_n = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n-1} - \tfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left[\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n-1}$$
$$U_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}.\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left[\tfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right]\left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}.\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left[\tfrac{2}{1-\sqrt{5}}\right]\left[\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n}$$
$$U_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n} - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n}$$
$$U_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

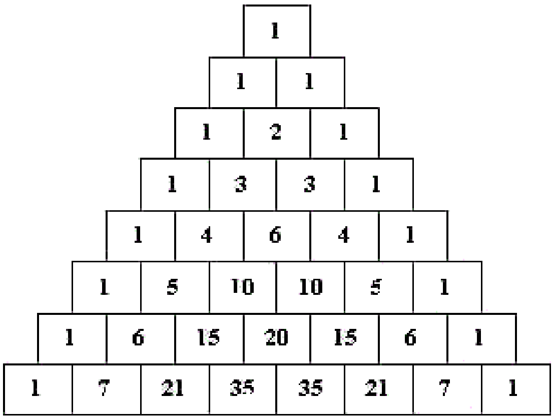


Figura 4.1 *Triângulo de Pascal*

4.5 Fibonacci e o Triângulo de Pascal.

O triângulo de Pascal (Figura 4.1) é um padrão numérico infinito muito antigo, Foi utilizado por Pascal para determinar os coeficientes do desenvolvimento binomial $(a+b)^n$ e para solucionar problemas combinatório. A sua construção é muito simples: no vértice do seu ponto mais elevado, temos o algarismo 1 fileira $n = 0$. Na fileira $n = 1$, temos os algarismos 1 e 1. Cada um dos outros números é a soma do número logo acima com o número à esquerda.

Exemplo 4.5.1.

$1 + 1 = 2 \quad 1 + 2 = 3$

$1 + 3 = 4 \quad 3 + 3 = 6$

$4 + 6 = 10 \quad 1 + 5 = 6$

E assim por diante.

Os números de Fibonacci podem ser encontrados também no Triângulo de Pascal, o triângulo aritmético, também conhecido como Triângulo de Tartaglia em alguns países, já era conhecido no século XII, e algumas das suas propriedades foram estudadas pelos matemáticos Yang Hui na China e por Omar Khayyam na Pérsia.

A partir do Triângulo de Pascal podem ser obtidos os números de Fibonacci, basta somar os números das diagonais, como mostra a figura 4.2. Começa a partir da primeira diagonal 1, a segunda 1, em seguida, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

O seguinte teorema nos fornece uma fórmula para encontrar os números de Fibonacci nas diagonais do Triângulo de Pascal.

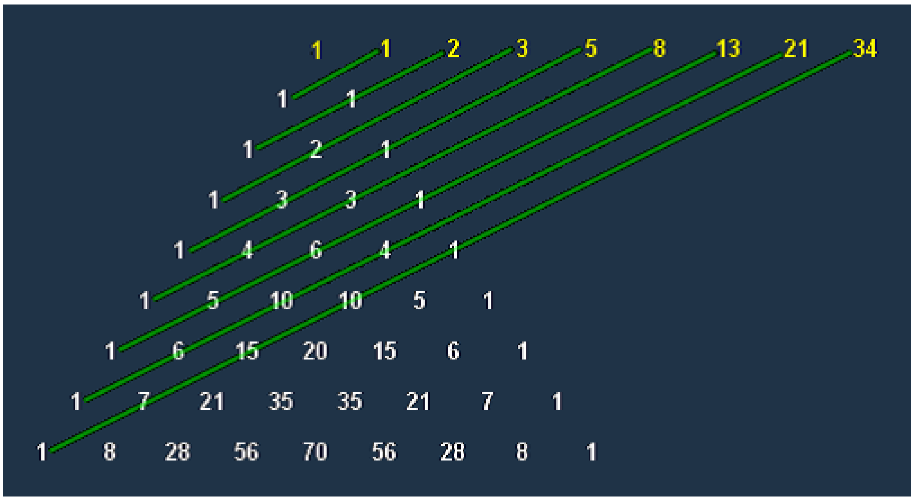


Figura 4.2 *Números de Fibonacci no Triângulo de Pacal*

Teorema 4.5.1. *(Teorema de lucas) para qualquer $n > 1$, sequência de Fibonacci é dado pelo somatório.*

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} \binom{n-k}{k-1}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro ou igual a x.

Antes de mostrar a demonstração desse teorema 3.5.1 por indução matemática, vamos apresentar dois casos importantes:

$i)$ se n for impar, temos que:

$$F_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1}$$

$ii)$ se n for par, obtemos:

$$F_n = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-1}$$

Demonstração: Provaremos esse teorema 3.5.1 usando o princípio da indução matemática.

Quando $n = 1$, temos:

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\frac{1+1}{2}} \binom{1-k}{k-1}$$

$$F_1 = \binom{0}{0}$$

$$F_1 = 1$$

Quando $n = 2$, temos:

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\frac{1+1}{2}} \binom{2-k}{k-1}$$

$$F_1 = \binom{0}{0}$$

$$F_1 = 1$$

Suponhamos agora que seja verdadeira para $n > 2$. Queremos provar que para $n+1$ também é verdadeira. Para isso, consideremos os dois casos $i)$ e $ii)$

$i)$ Para n par, temos $n-1$ e $n+1$ ímpares. Logo,

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{(n+1)+1}{2}} \binom{(n+1)-k}{k-1}$$

A relação de stifel, nos permite realizar o proximo passo.

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \left[\binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{(k-1)-1} \right]$$

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \binom{n-k}{(k-1)-1}$$

Vamos efetuar uma mudança de variável, fazendo $p = k-1$, e p variando de 0 a $\frac{n}{2}$, mas como $p \neq 0$ então ele deve variar de 1 a $\frac{n}{2}$.

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{(n-1)-p}{p-1}$$

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{\frac{(n-1)+1}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{(n-1)+1}{2}} \binom{(n-1)-p}{p-1}$$

$$F_{n-1} = F_n + F_{n-1}$$

ii) para n ímpar, temos $n-1$ e $n+1$ pares logo,

$$F_{n+1}=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\left(\begin{array}{c}(n+1)-k\\ k-1\end{array}\right)$$

Ultilizando a relação de stifel

$$F_{n+1}=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\left[\left(\begin{array}{c}n-k\\ k-1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}n-k\\ (k-1)-1\end{array}\right)\right]$$

$$F_{n+1}=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\left(\begin{array}{c}n-k\\ k-1\end{array}\right)+\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\left(\begin{array}{c}n-k\\ (k-1)-1\end{array}\right)$$

Substituindo $p=k-1$ temos

$$F_{n+1}=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\left(\begin{array}{c}n-k\\ k-1\end{array}\right)+\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\left(\begin{array}{c}(n-1)-p\\ p-1\end{array}\right)$$

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, completamos a prova do teorema, o qual é verdadeiro para todo $n\geq 1$.

Capítulo 5

O Número de Ouro

Nesta seção vamos mostrar que a matemática esta presente em nosso meio atraves de uma simples razão, e faremos isto por meio de um número conhecido como o número de ouro, o número ϕ(Phi), e apresentaremos a relação do número de ouro com a sequência de Fibonacci.

5.1 Breve História do Número de Ouro.

O número de ouro, também chamado de proporção áurea, razão de ouro ou número áureo, é uma constante irracional representada pela letra grega (Phi) ϕ definido por

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Sua representação é uma homenagem ao escultor Fídias, que utilizava está constante em suas obras, a sua primeira definição foi dada no livro Os Elementos de Euclides de Alexandria, Euclides chamou esse número de razão extrema e média.

Este número é muito querido pelos matemáticos, astrônomos, físicos, biólogos, artistas que há anos o estudam, e ficam fascinados com cada descoberta, e a sua influência na arte, na arquitetura, na música, na geometria, na natureza e outros.

Grandes matemáticos como Euclides e Pitágoras, na Grécia Antiga, Leonardo de Pisa também conhecido como Fibonacci, o astrônomo Johannes Kepler, dentre outros estudiosos, até mesmo o físico Roger Penrose, trabalharam intensamente com esta simples razão e suas propriedades.

É considerado como símbolo da harmonia e beleza, e podemos encontrá-lo tanto nas pirâmides ou papiros do Egito, como em obras de arte de Botticelli, Leonardo da Vinci e Salvador Dalí. Este número está fortemente ligado à sequência de Fibonacci, como é possível verificar observando a expressão

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

do termo geral.

O número de ouro, teve a sua primeira definição, por volta de 300 a.C., dada por Euclides de Alexandria. Euclides definiu uma proporção derivada da divisão de um segmento no que ele chamou de "razão extrema e média". Assim definiu: "Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor"(Demonstração aseguir).

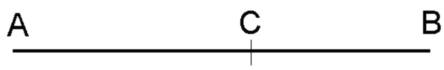
5.1.1 O Número do Ouro.

Definição 5.1.1. *Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.*

Demonstração 5.1.1.1. *Considere um segmento de reta AB e encontre um ponto intermediário,C, tal que*

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{CB}$$

.



De acordo com a definição temos que a razão dos comprimentos de AC (segmento maior) e CB (segmento menor) é igual a razão dos comprimentos de AB (linha completa) e AC (segmento maior), ou seja,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{CB}$$

Se tomarmos o comprimento $CB = 1$ e o comprimento maior $AC = x$, e utilizando a definição acima, chegamos a equação:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

o que implica na equação quadratica.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

cujas as raízes são

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

a solução positiva é exatamente razão áurea

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$$

e o recípocro

$$\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618...$$

somando ϕ_1 e ϕ_2 obtemos,

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

ou seja

$$\phi_1 + \phi_2 = 1 \Rightarrow \phi_2 = 1 - \phi_1$$

e multiplicando a raízes temos,

$$\phi_1 \cdot \phi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1$$

ou seja,

$$\phi_1 \cdot \phi_2 = -1 \Rightarrow \phi_2 = -\frac{1}{\phi_1}$$

Se observarmos a taxa de crescimento dos números de Fibonacci, ou seja, a razão entreo $(n+1)$-ésimo número da sequência e o (n)-ésimo quando n aumenta, se aproxima cada vez mais da razão áurea. Observem que os quocientes a seguir vão se aproximando do número de ouro.

5.2 Fibonacci e o Número de Ouro.

Curiosos que são os matemáticos descobriram fato bastante interessante nos números de Fibonacci, tomando as razões (divisões) de cada termo pelo seu antecessor, obtemos uma outra sequência numérica cujo termo geral é dado por:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Vejamos asseguir Algumas dessas razões:

$$\frac{1}{1} = 1; \qquad \frac{2}{1} = 2; \qquad \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{5}{3} = 1,66666666666666666666666666666667...$$

$$\frac{8}{5} = 1,6; \qquad \frac{13}{8} = 1,625$$

$$\frac{21}{13} = 1,615384615384615384615384615384 6...$$

$$\frac{34}{21} = 1,6190476190476190476190476190476...$$

$$\frac{55}{34} = 1,6176470588235294117647058823529...$$

$$\frac{89}{55} = 1,6181818181818181818181818181818...$$

$$\frac{144}{89} = 1,6179775280898876404494382022472...$$

$$\frac{233}{144} = 1,6180555555555555555555555555556...$$

$$\frac{377}{233} = 1,6180257510729613733905579399142...$$

Vejamos a razão dos números de posição 15 e 14.

$$\frac{610}{377} = 1,6180371352785145888594164456233...$$

Vejamos a razão dos números de posição 20 e 19.

$$\frac{6765}{4181} = 1,6180339631667065295383879454676...$$

Também os números de posição 200 e 199.

$$\frac{280571172992510140037611932413038677189525}{173402521172797813159685037284371942044301} = 1,6180339887498948482045868343656...$$

E assim por diante, a medida que aumentamos os números da sequência de Fibonacci, a razão entre um número e o seu antecessor, varia em torno da Razão áurea, cada vez mais aproximando do seu valor. Seja n a posição do número na sequência, F_n o número de Fibonacci e F_{n+1} o seu sucessor, então a razão $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ se aproxima de ϕ quando n aumenta.

Está sequência não é limitada superiormente, mas existe um fato interessante: Tomando as razões de cada termo pelo seu antecessor, obtemos uma outra sequência numérica cujo termo geral é dado por:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = 1,6180339887...$$

que é uma seqüência limitada.

Vamos observar o grafico a baixo (Figura 5.1),onde o eixo das ordenadas representa as razões sucessivas e no eixo das abcissas estão indicados os elementos da sequência de Fibonacci.

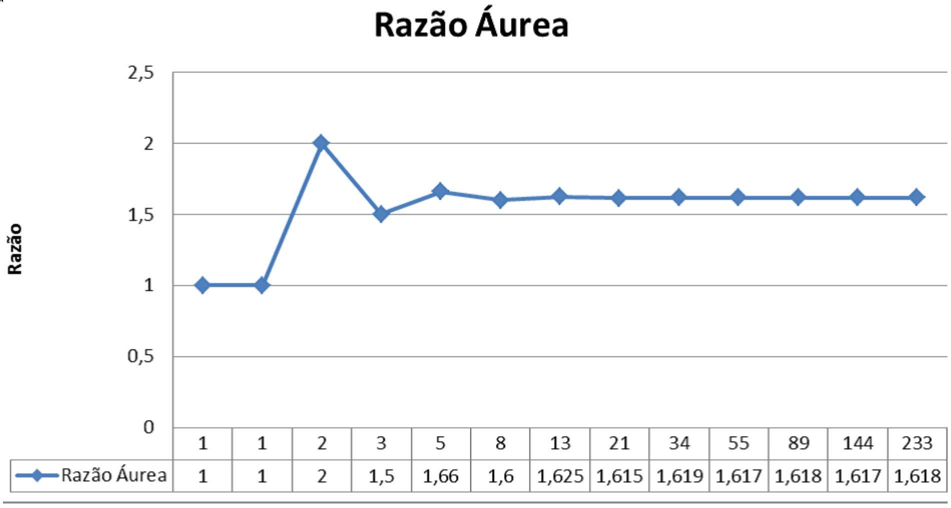


Figura 5.1 *Convergências das razões entre os números de Fibonacci para a razão áurea*

Propriedade 5.2.1. *A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci tende ao número de ouro quando n vai para o infinito, ou seja:*

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Demonstração 5.2.0.2. *Temos pela fórmula generalizada que.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}$$

assim

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n}$$

como $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ podemos escrever

$$F_n\cdot\sqrt{5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad e \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=F_n\cdot\sqrt{5}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ficando o limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(F_n\cdot\sqrt{5}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n\cdot\sqrt{5}}$$

fazendo a distibuitiva e colocando em evidência $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ chegamos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{F_n\cdot\sqrt{5}}$$

logo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n}$$

Pela Sequência de Fibonacci temos que $F_n\geq 1 \quad \forall \quad n\in\mathbb{N}$, assim

$$\left|\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n}\right|\leq\left|\frac{1-\sqrt{5}^n}{2}\right|$$

como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|=0$$

pois

$$\left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|<1$$

Temos pelo teorema do confronto que.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n}\right|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n}=0$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Utilizando o resultado acima, temos,

$$\lim_{n\to\infty} = (-1)\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

pois

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+2}-F_{n-1}}{F_{n+1}}.$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+2}-F_{n-1}}{F_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_{n+1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}} = (-1)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\phi}$$

5.3 Fibonacci e o Retângulo Áureo.

O mátematico grego Eudoxus que estudou a teoria das proporções e descobriu as propriedades de um retângulo que mais tarde ficaria conhecido como retângulo áureo ou retângulo de ouro.

Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo com a seguinte propriedade: "Se de um retângulo $ABCD$, suprimirmos um quadrado, como $ABEF$, o retângulo restante, $CDEF$, será semelhante ao retângulo original." Considere um retângulo áureo $ABCD$, de lado $AB = a$ e $AD = a + b$, retirando o quadrado $ABEF$, como mostra a Figura 5.2, teremos um outro retângulo $EFCD$.

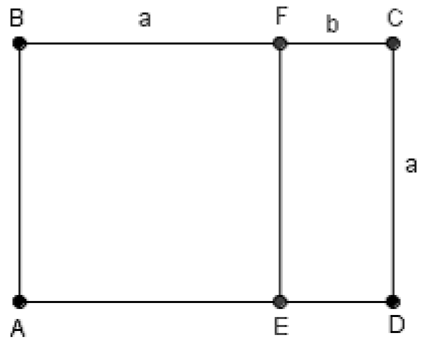


Figura 5.2 *Retângulo Áureo*

O retângulo que sobra, $EFCD$, é semelhante ao retângulo ABCD. Então, vale a proporção:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{EF}{ED}$$

substituindo os valores de AB e AD, ED e EF, teremos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{EF}{ED} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

dai

$$(a+b)b = a \cdot a \Rightarrow ab + b^2 = a^2$$

$$-a^2 + ab + b^2 = 0$$

dividindo ambos membros da equação por $(-b^2)$, temos

$$\frac{-a^2}{-b^2} + \frac{ab}{-b^2} + \frac{b^2}{-b^2} = \frac{0}{b^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

vamos chamar essa relação $\frac{a}{b} = \phi$, logo

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

chegamos assim em uma equação do segundo grau, como o $\Delta > 0$ possui duas raízes reais, uo seja,

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180...$$

e

$$\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6180...$$

Por ser uma proporção entre medidas, não consideramos valores negativos, então fica apenas o valor positivo

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180...$$

Isto significa que o retângulo de lados $a+b$ e a é áureo, e o retângulo de lados a e b também é um retângulo áureo.

Usando o mesmo raciocínio aplicamos o mesmo processo anterior para mostrar que também são áureos os retângulos de lados b e $a-b$, $a-b$ e $2b-a$ e sucessivamente, como mostra na figura 4.3.

Em outras palavras, dados os números positivos a e b, satisfazendo a relação

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

formaremos a seqüência $a+b$, a, b, a_2, a_3,..., sendo $a_2 = a - b$ e $a_3 = b - a_2 = 2b - a$, em geral $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$.

Trata da seqüência $a+b, a, b, a-b, 2b-a, 2a-3b, 5b-3a, 5a-8b, 13b-8a, \ldots$. Pois bem, o raciocínio anterior estabelece que quaisquer dois elementos consecutivos desta sequência, são os lados de um retângulo áureo. Portanto, o processo anterior de retirar quadrados de retângulos áureos conduz a uma sequência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores.

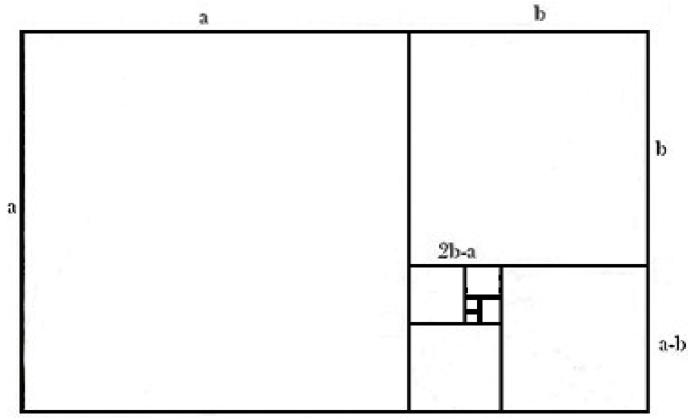


Figura 5.3 *Retângulos Áureos de Dimenções Menores*

Muitos matemáticos, além do próprio Fibonacci, dedicaram-se ao estudo da sequência que foi proposta, e foram encontradas inúmeras aplicações para ela no desenvolvimento de modelos explicativos de fenômenos naturais, vejamos uma aplicação que relaciona o retângulo áureo com a sequência de Fibonacci e entenda por que ela é conhecida como uma das maravilhas da Matemática.

A partir de dois quadrados de lado 1, podemos obter um retângulo de lados 2 e 1. se adicionarmos a esse retângulo um quadrado de lado 2, obtemos um novo retângulo 3 e 2. Se adicionarmos agora um quadrado de lado 3, obtemos um retângulo 5 e 3. Observe a figura 4.4 e veja que os lados dos quadrados que adicionamos para determinar os retângulos formam a sequência de Fibonacci.

Para construir uma espiral inscrita no retângulo, iremos seguir os mesmos passos para a construção do retângulo áureo. Tendo o retângulo dividido em infinitos outros retângulos áureos, estaremos formando uma seqüência de quadrados dispostos em uma espiral logarítmica, esta espiral é formada pelos arcos criados ao dividir o retângulo em outros cada vez menores.

A espiral logarítmica é conhecida também como a espiral do crescimento ou a spira mirabilis. Está espiral é relacionada aos números de Fibonacci, à relação dourada, e aos retângulos dourados, e chamada às vezes de espiral dourada. Este padrão de crescimento é chamado de "lei da natureza", ver a figura 5.6

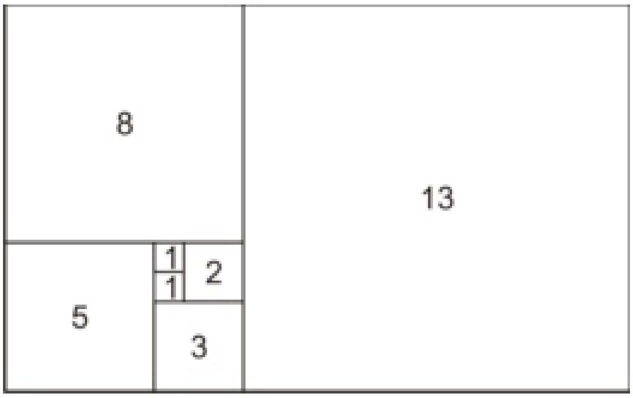


Figura 5.4 *Retângulo de Ouro*

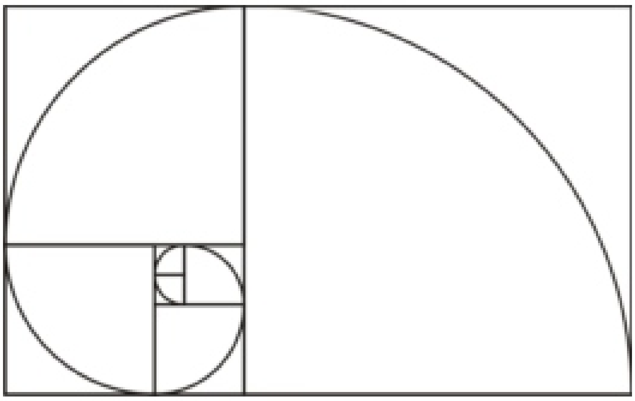


Figura 5.5 *Espiral de Fibonacci*

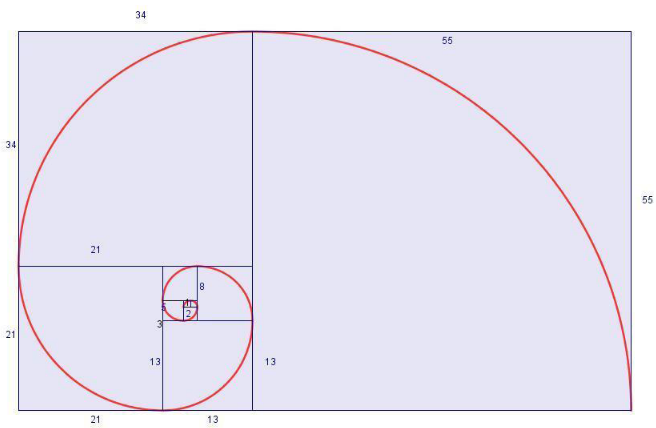


Figura 5.6 *Espiral de Ouro*

Observação 5.3.1. *A espiral logarítmica e uma espiral cuja equacao polar e dada por* $r = ae^{\theta\cot(\alpha)}$*, onde a é a distancia da origem do referencial ao ponto inicial da espiral* $(\theta = 0)$ *e* α *é o ângulo constante de abertura da espiral e* θ *é uma variável independente variando de* $-\infty$ *a* $+\infty$*, de modo que a curva tenha comprimento ilimitado. Para o ângulo* $\alpha = 90^o$*, a curva formará uma circunferência.*

Assim encerramos essa seção e mostramos a relação dos números de Fibonaci com o número de ouro e consequentemente com o Retângulo Áureo.

Capítulo 6

Fibonacci e Suas Aplicações

Neste capitulo abordaremos acerca das aplicações de Fibonacci, vamos mostrar que essa sequência aparentemente sem importância e apenas uma mera curiosidade na época, que acabou virando a grande atração matemática no mundo da biologia porque se começou a perceber que essa sequência e a proporção entre seus números, apareciam várias vezes na natureza.

Assim, os números de Fibonacci estão presentes, de uma forma ou de outra, na concha do caramujo, na organização das sementes na coroa das flores, no número de espirais dos girassóis, no desenho das pinhas, no crescimento dos galhos de uma árvore, na proporção entre machos e fêmeas entre abelhas, bem como nas manifestações humanas e culturais, detecta-se a razão áurea nas arquitetura do Parthenon e em muitas outras arquiteturas antigas, temos a presença na arte nos quadros de Leonardo Davinci como a Monalisa, as secções áureas estão presentes no corpo humano, percebemos as aparições dos números de Fibonacci também na Física.

São muitas as aparições dos números de Fibonacci em nosso cotidiano e na maioria das vezes é facil perceber suas manifestações, para muitos estudiosos essa sequência pode até parecer enigmática ou mística mas para a matemática e a simples comprovação de que a matemática está presente em nossa história e muito mais em nosso futuro.

No final da defesa do Tcc reproduziremos dois videos, em relação aos assuntos abordados que comprova a veracidade dessa descoberta de Fibonacci.

6.1 Os Números de Fibonacci e a Razão Áurea na Natureza.

Está seção mostraremos aplicações de Fibonacci e a Razão Áurea que estão presente na natureza, e percebemos com isso que a natureza ja havia descoberto a matemática muito mais cedo que o homem.

6.1.1 No Nautilus

O Nautilus é um molusco que possui uma concha e a sua forma é semelhante a uma espiral que é chamada de "espiral de ouro"e que pode ser formada através dos números de Fibonacci ver figura 6.1 a seguir é possível observar uma dessas conchas é uma espiral que a representa (espiral logarítmica).

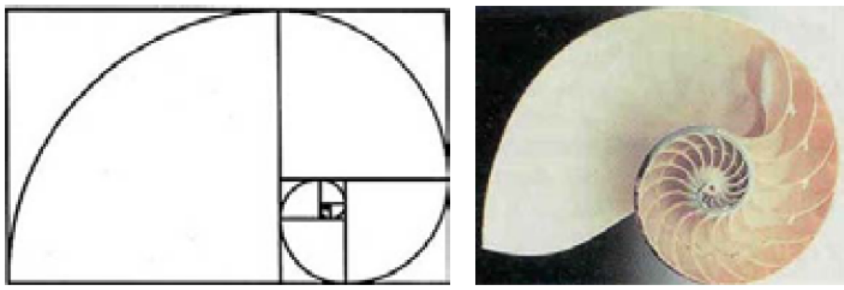


Figura 6.1 *A Semelhança do Nautilus e a Espiral Logarítmica*

A espiral logarítmica é uma espiral crescente, cuja curvatura aumenta em progressão geométrica, tal espiral pode ser obtida a partir tanto da proporção áurea quanto da Sequência de Fibonacci, utilizando régua e compasso, construa essa espiral logarítmica a partir do retângulo áureo.

A espiral da concha do nautilus tem uma propriedade interessante, se tomarmos qualquer uma das câmaras e ampliarmos ela vai se encaixar perfeitamente na câmara seguinte, o animal cresce numa mesma proporção e mais impressionante é que se tomarmos as primeiras câmaras e aumentarmos na mesma proporção elas vão se encaixar nas câmaras adjacentes e assim por diante.

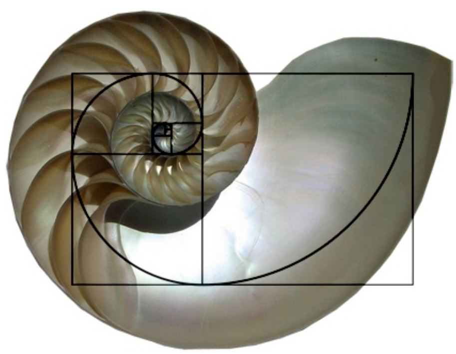


Figura 6.2 *Nautilus Apartir de Retângulos Áureos*

6.1.2 Na Pinha e no Romanesco

A espiral de ouro pode ser encontrada nas pinhas. Podemos ver que as sementes nas pinhas parecem formar espirais que se curvam tanto para a direita quanto para a esquerda, se contarmos as espirais, verificaremos que há 8 que curvam para a direita, e 13 que curvam para a esquerda. Estes dois valores são dois dos termos consecutivos da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...). Esta disposição permite que as sementes se encontrem distribuídas uniformemente, não se encontrando concentradas demais no centro e dispersas demais nos bordos, tendo todas as sementes o mesmo tamanho ver a figura 6.3.

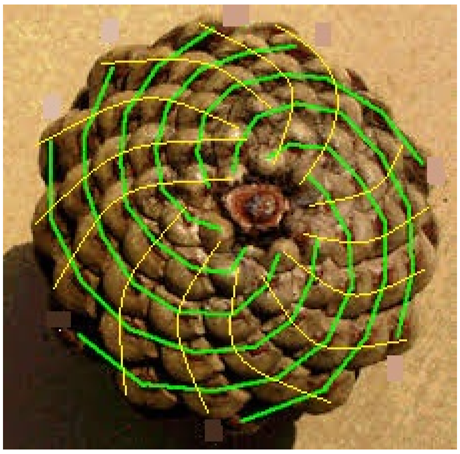


Figura 6.3 *Espiral de Ouro na Pinha*

A espiral no romanesco.

Figura 6.4 *Espiral de Ouro no Romanesco*

6.1.3 No Girassol

Um outro exemplo da espiral de ouro encontramos na maioria dos girassóis, mas se conseguirmos encontrar um bom espécime verificaremos que as suas sementes formam espirais curvando-se para a esquerda ou para a direita, de forma que todas fiquem eqüidistantes, afirma-se que esta disposição permite melhorar a eficiência dos girassóis na captação de água e de luz. Além disso, as pétalas dos girassóis encontram-se em pares de 21 e 34 pétalas, ou 34 e 55, ou até mesmo 55 e 89, que são números consecutivos da sequência de Fibonacci.

As sementes do girassol têm o formato da espiral equiangular, elas se distribuem regularmente, aparentemente em circunferências concêntricas e seguindo certa lei de crescimento que faz com que o arranjo fique perfeitamente regular seja qual for seu tamanho. Onde aspecto é parecido com o da figura abaixo:

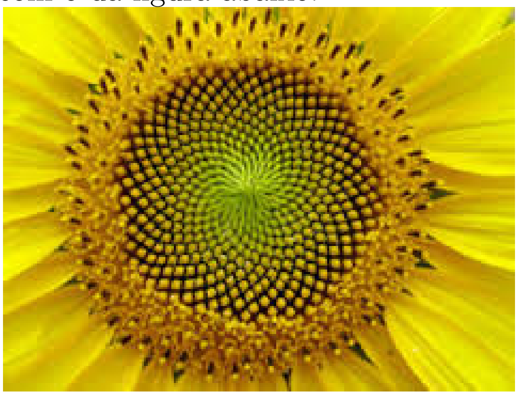


Figura 6.5 *As Sementes do Girassol Formam Espirais*

6.1.4 Nos Furacões e nas Galaxias

Na formação dos furacões percebemos uma espiral dourada.

Figura 6.6 *Espirais no Furacão*

assim como nas galaxias.

Figura 6.7 *Esperiais na Galaxia*

6.1.5 Crescimento de Árvores

De modo geral, podemos dizer que em muitas plantas os ramos e galhos crescem em quantidades baseadas nos números da sequência de Fibonacci. Esquematizando, teremos a representação da seqüência de Fibonacci na figura abaixo:

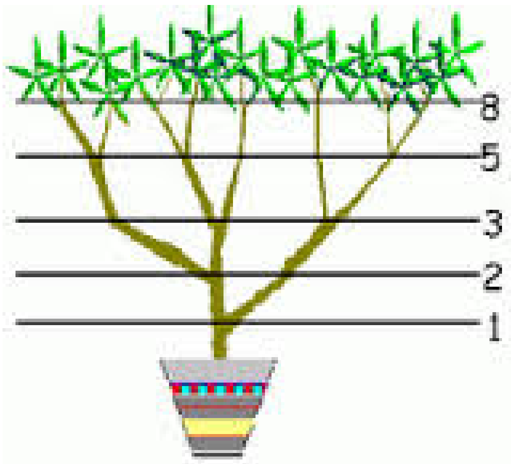


Figura 6.8 *Crescimento dos Ramos e Galhos*

Percebemos nesta seção a ligação que há entre a matemática e a natureza, e atraves de exemplos visuais provamos a semelhança entre elas e existem muitas outras aplicações na natureza que relacionan essas duas áreas de trabalho.

Na natureza, está repleta de seres vivos contendo essas dimensões, "secção áurea", por isso, nos fascinam tanto.

6.2 Fibonacci e a Razão Áurea no ser Humano.

No corpo humano, essas dimensões também são percepitiveis, as secções áureas no corpo humano estão presentes nas orelhas, como também nas falanges dos dedos, na razão entre o tamanho do braço e a mão; a medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo; a altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça; a medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até o chão; o tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta, de acordo com a figura 6.9

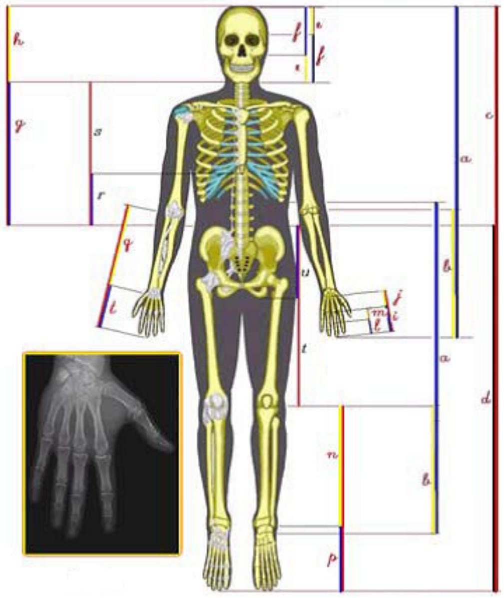


Figura 6.9 *Segmento Áureo no corpo humano*

6.2.1 Na Orelha

Uma orelha perfeita seria aquela na qual se encaixaria em uma espiral logarítmica como na figura 6.10.

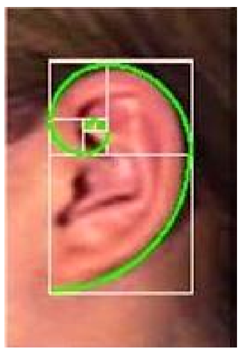


Figura 6.10 *Espiral Logarítmica na Orelha*

6.2.2 No Rosto

Alem disso, pode-se encontrar as proporcoes aureas também no rosto humano, constatou-se que o rosto humano e baseado inteiramente em ϕ. Em particular, a cabeca forma um retangulo àureo, sendo o ponto do meio dos olhos, a seçao áurea, a boca e o nariz sao posicionados em seções de ouro da distancia entre os olhos e a parte inferior do queixo ver na figura 6.11.

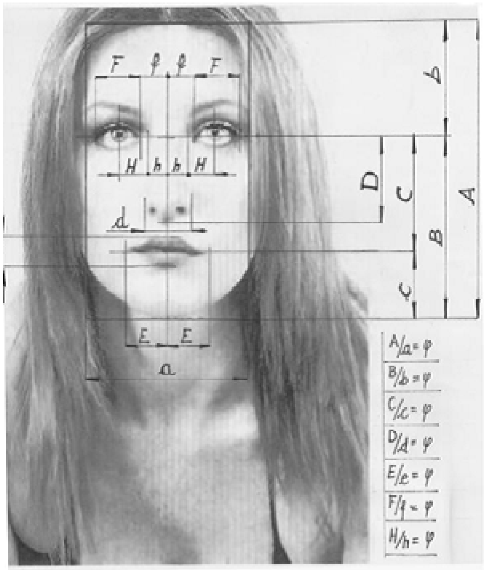


Figura 6.11 *Seções Áureas no Rosto*

6.2.3 No Sorriso

Muitos estudos demonstram que a regra de ouro está presente na harmonia do sorriso e da dentição.

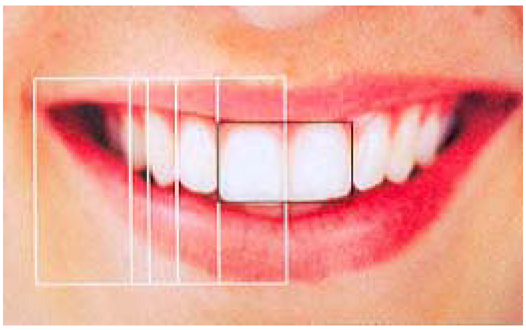


Figura 6.12 *Proporção Áurea nos Dentes*

Os dentes vistos frontalmente, como a figura 6.12 acima, estão na proporção áurea um em relação ao outro. Por exemplo, a largura do incisivo central está proporcional à largura do incisivo lateral, assim como o incisivo lateral está proporcional ao canino, e o canino ao primeiro pré-molar. O segmento "incisivo central até o primeiro pré-molar"se encontra na proporção áurea em relação ao canto da boca. A altura do incisivo central está na proporção áurea em relação à largura dos dois dentes centrais (retângulo de ouro).

Na face relaxada, veja a figura a 6.13, a linha dos lábios divide o terço inferior da face nos segmentos da proporção áurea da ponta do nariz à linha dos lábios e da linha dos lábios até o queixo.

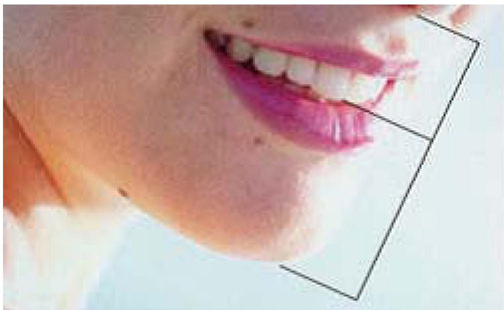


Figura 6.13 *Divisão Áurea do Queixo ao Nariz*

As "Marcas da Seção Áurea", impressas em papel no sortimento de blocos fornecidos no estojo, (figura 6.14), são muito úteis para registros da boca e para trabalhos sobre modelos.

Figura 6.14 *Modelo com Marcas da Seção Áurea*

6.2.4 Na Mão

Na mão se medimos os tamanhos dos dedos é a medida da dobra central até a ponta ver a figura 6.15

Figura 6.15 *Segmento Áureo na Mão*

6.3 Fibonacci e a Razão Áurea na Arte e Arquitetura Antiga.

6.3.1 Na Arte Antiga (Monalisa)

Na arte temos muitos pintores que se utilizaram das proporções áureas em seus famosos quadros, entre eles está o pintor Leonardo da Vinci que no quadro Mona Lisa pode-se observar a proporção áurea em várias situações, note, na figura 6.16 abaixo, que se construirmos um retângulo em torno de seu rosto, veremos que este é um retângulo de ouro e também entre os elementos do rosto os retângulos áureos enquadram a face e a testa, o lado direito da face com a linha que passa pelo nariz e o olho e a posição da pupila. Note também o retângulo envolvendo todo o corpo, sendo dividido na razão extrema e média separando o tronco e a cabeça.

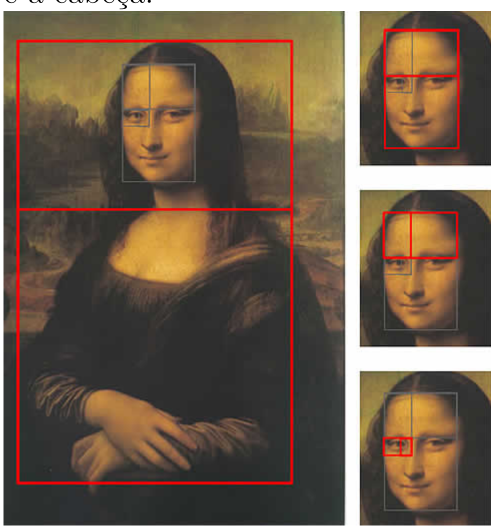


Figura 6.16 *As Proporções no Quadro da Monalisa*

6.3.2 Na Arquitetura Antiga (Parthenon)

Para os gregos, o retângulo áureo representava a lei da beleza matemática. Ele está em sua arquitetura clássica e em suas esculturas. O Partenon, construído em Atenas por volta de 430-440 a. C. teve como base para a sua construção o retângulo de ouro veja a figura 6.17.

Figura 6.17 *Parthenon Formado por Retângulos Áureos*

6.4 Fibonacci na Física.

6.4.1 Na Ótica

Vamos agora ver a sequência de Fibonacci surgindo na física, mais precisamente na ótica dos raios de luz, tomemos duas placas de vidro, com índices de refração diferentes, justapostas uma sobre a outra. Um raio de luz que incida sobre esse conjunto pode sofrer reflexões e desvios. Vamos contar o número de caminhos possíveis de um raio de luz aumentando, gradualmente, o número de reflexões nesses caminhos.

Olhando a figura 6.18, podemos ver que o número de caminhos segue a sequência de Fibonacci. Representando o número de reflexões, chamado de "geração", pela letra n, o número de caminhos será $F(n)$, um número de Fibonacci. Por exemplo, a geração $n = 4$ leva a $F(4) = 8$ caminhos.

Neste caso os raios podem passar direto ou refletir uma, duas, três até n vezes. O curioso é que as possibilidades fazem parte da sequência de Fibonacci, por exemplo: o número de possibilidade de passar direto é 1, de refletir uma vez é 2, de refletir duas vezes é 3, três vezes é 5, quatro vezes é 8, cinco vezes é 13 e assim sucessivamente há um número infinito de reflexões internas antes de emergir. O número de possibilidades é a sequência 1,2,3,5,8,13..., a própria sequência de Fibonacci com exceção de um número 1 no início. Sendo que todos esses caminhos são permitidos pelas leis da ótica.

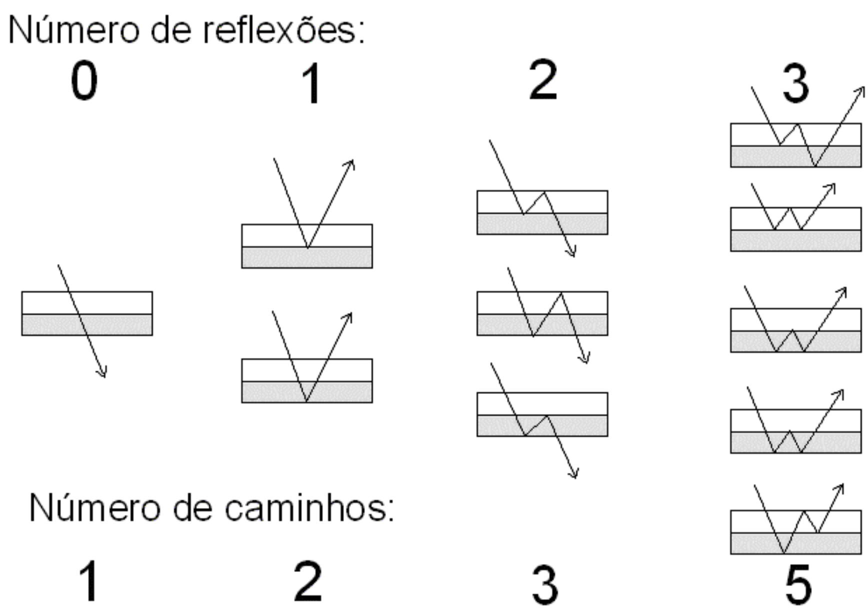


Figura 6.18 *Reflexões de Luz Sobre Placas de Vidros*

Considerações Finais

Neste trabalho a priori apresentamos um pouco da biografia de Leonardo Fibonacci e suas contribuições para a Matemática, como o famoso problema dos Coelhos que encontramos em uma de suas principais publicações o livro Liber Abaci, e percebemos também que existe uma semelhança do problema dos Coelhos com à árvore genealogica do Zangão.

Estudamos a sequência de Fibonacci e algumas de suas diversas aplicações na Matemática, bem como suas relações com a transformação linear, progressão geométrica e triângulo de pascal. Apresentamos a sua definição, e algumas propriedades. Que mais adiante foram úteis para demonstrarmos a lei de formação da sequência de Fibonacci, chegando então que os termos desta sequência são escritos apartir da soma dos dois termos anteriores, conforme foi demonstrado no capítulo 3.

Mostramos a relação da sequencia de Fibonacci com o número de ouro, onde constatou-se sua interação com o numero $\phi = 1,618$.

Temos também suas aplicações nas diversas áreas da encontradas na sociedade, como na natureza, no corpo humano, na arquitetura, na arte, na física e muitos outros exemplos que podemos observar que existe algo em comum.

Portanto vemos que os números de Fibonacci que formam a sequência de Fibonacci traz um rico legado de conhecimento que está bem presente em nosso cotidiano, e que passam desapercebidos pela sociedade e esse trabalho tem por finalidade trazer uma pequena introdução acerca da Sequência de Fibonacci e suas Aplicações.

BIBLIOGRAFIA

[1] AZEVEDO, Alberto. *Sequências de Fibonacci*, São Paulo, 2001, pág. 44-47, (Revista do Professor de Matemática).

[2] BOYER, Carl, B. *História da Matemática*, 3ª ed, Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974.

[3] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F., *Álgebra Linear e Aplicações*, 2ª ed., Atual Editora Ltda, 1978.

[4] COSTA, Neto, Nazaré do Socorro. *Sequência de Fibonacci: Teoria, Aplicação e Simulações Númericas.* Macapá, Amapá 2010 (Trabalho de Conclusão de Curso)

[5] CARVALHO, Jacques de, Jurandir. *Razão Áurea.* Belo Horizonte, 2008, (Trabalho de Conclusão de Curso), Disponivel em http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia Jurandir.pdf, Acesso em 08/07/2013

[6] EVES, Howarde. *História da Geometria.* São Paulo: Atual, 1992 (Série: Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula; Vol. 3).

[7] FLEMMING, Diva, Marilia. *Calculo A - A Função, limite, Derivação, Integração*, 6ª ed., Makron Books, 2007.

[8] FREIRE, V. T. Benedito. *Notas de Aula: Teoria dos Núeros.* 2009, Pag. 111-120, Disponivel em http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgPzIAG/teoria-dos-numeros-benedito-tadeu-vasconcelos-freire, Acesso em 07/07/2013

[9] HEFEZ, Abramo. *Indução Matemática.* Niterói, Rio de Janeiro: SBM, 2007 (Coleção: Iniciação Científica - OBMEP 2006, Vol. 4).

[10] http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo Fibonacci, Acessado em 05/08/2013

[11] http://pt.wikipedia.org/wiki/Parthenon, Acessado em 05/08/2013

[12] http://www.searadaciencia.ufc.br/donafifi/fibonacci/fibonacci6.htm, Acessado em 05/08/2013

[13] MARTINS, Camara, Petricia. *O Número de Ouro e a Divina Proporção.* Paraná, 2008, (Artigo Apresentado na XXII SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA). Disponivel em http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/20.pdf, Acesso em 08/07/2013

[14] PACCI, C. Daniel; RODRIGUES, V. T. Camila *Sequência de fibo-*

nacci, Campinas, 2013,(Trabalho de Conclusão de Curso), Disponivel em http://www.ime.unicamp.br/ ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/DC M1 FM 2013.pdf, Acesso em 01/07/2013.

[15] RODRIGUES, M. S.; CAMARA, M. A. *O Número* ϕ, Minas Gerais, Outubro de 2008, FAMAT em Revista, nº 11, Disponível em http: www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat revista 11 artigo 05.pdf, Acesso em 04/07/2013.

[16] SANTOS, de Oliveira , José Plinio. *Introdução a Toria dos Números*, Rio de Janeiro: SBM, 1998, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA.

[17] SUNG, Hon, Sae, Victor. *Sequência de Fibonacci e suas Aplicações* . São Carlos, 2012, (Trabalho de Conclusão do Curso).