UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE MATEMÁTICA

NOÇÕES DE TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E UMA INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

por

ANDRÉ COSTA MARQUES

MACAPÁ-AP
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE MATEMÁTICA

NOÇÕES DE TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E UMA INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

por

ANDRÉ COSTA MARQUES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao colegiado de Matemática da Universidade
Federal do Amapá, como requisito parcial
para a obtenção do grau acadêmico em
Licenciatura Plena em Matemática

Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento
Orientador

MACAPÁ-AP
2018

NOÇÕES DE TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E UMA INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

por

ANDRÉ COSTA MARQUES

Trabalho submetido ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para a obtenção do grau acadêmico em Licenciatura Plena em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento (Orientador)
DECET-UNIFAP

Prof. Me Kelmem da Cluz Barroso
DECET-UNIFAP

Prof. Me Márcio Aldo Lobato Bahia
DECET-UNIFAP

MACAPÁ-AP
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborado por Mara Patrícia Corrêa Garcia CRB2/1248

515.782
M357n Marques, André Costa

Noções de teoria das distribuições e uma introdução aos espaços de Sobolev / André Costa Marques ; orientador, Marcel Lucas Picanço Nascimento. - Macapá, 2018.

67 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Teoria das distribuições (Análise funcional). 2. Espaços de Sobolev. I. Nascimento, Marcel Lucas Picanço, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

Agradecimentos

Eu André Costa Marques, agradeço primeiramente a deus que me permitiu ter a saúde e a força necessárias para enfrentar as dificuldades e concluir as tarefas que me foram impostas durante o processo de produção deste trabalho.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe e ao meu pai de criação, que sempre me incentivaram e acreditaram no meu potencial, mesmo quando eu mesmo duvidava.

Ao Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento, que me propos o tema e, como meu professor orientador, sempre me auxiliou em tudo que foi necessário.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o conceito e as principais propriedades das Distribuições Regulares e também abordar de forma introdutória os espaços de Sobolev, um assunto que esta intimamente ligado ao estudo das Distribuições Regulares. Mostraremos a definição e as principais propriedades da integral de Lebesgue, um conceito de integral que é mais geral que a integral de Riemann, pois é capaz de integrar um conjunto maior de funções. Com o estudo da integral de Lebesgue exploraremos os espaços L_p, um espaço composto por classes de equivalência de funções que satisfazem condições especificas de integração a Lebesgue e mostramos que esses espaços são espaços de Banach. Analisamos o espaço das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto, denominado espaço das funções teste e denotado por C_0^∞, onde provamos a densidade desses espaços sobre os espaços L_p. Com base no estudo dos espaços C_0^∞ e L_p, nos dedicamos aos objetivos do trabalho, é mostrado um estudo sobre distribuições, onde prova-se resultados interessantes como o Lema de Du Bois Raymond, donde podemos inferir que uma Distribuição Regular é gerada pela classe de equivalência de uma função localmente integrável. Mostramos que uma função pode não ser derivável no sentido convencional, mas possuir o que denominamos Derivada Fraca. Com as noções de teoria das Distribuições pudemos analisar os espaços de Sobolev, demonstrando que estes são espaços de Banach. Abordamos os espaços H^m, um caso particular dos espaços de Sobolev, provamos que esses espaços também são espaços de Hilbert.

Palavras-chaves: integral de Lebesgue; espaços L_p; espaços de Banach; Distribuições; Espaços de Sobolev.

Abstract

The purpose of this work is to present the concept and main properties of Regular Distributions and also to introduce the Sobolev spaces in an introductory way, a subject that is closely linked to the study of Regular Distributions. We will show the definition and main properties of the Lebesgue integral, a concept of integral that is more general than the integral of Riemann, since it is capable of integrating a larger set of functions. With the study of the Lebesgue integral we will explore the spaces L_p, a space composed of classes of equivalence of functions that satisfy specific conditions of integration to Lebesgue and we show that these spaces are spaces of Banach. We analyze the space of the infinitely differentiable functions with compact support, called space of the test functions and denoted by C_0^∞, where we prove the density of these spaces on the spaces L_p. Based on the study of the spaces C_0^∞ L_p, we focus on the objectives of the work, a study on distributions is shown, where interesting results such as the Du Bois Raymond Lemma are proved, where we can infer that a Regular Distribution is generated by the equivalence class of a locally integrable function. We show that a function may not be derivable in the conventional sense, but possess what we call the Weak Derivative. With the notions of Distributions theory we were able to analyze the spaces of Sobolev, demonstrating that these are spaces of Banach. We approach the spaces H^m, a particular case of the Sobolev spaces, we prove that these spaces are also Hilbert spaces.

Keywords: Lebesgue integral; spaces L_p; Banach spaces; Distribution; Sobolev spaces.

Sumário

Introdução

Sabemos que a Derivada é um conceito de fundamental importância em vários ramos das ciências exatas, mas sabemos que a noção clássica de Derivada exige a continuidade e também um comportamento suave da função, porém há muitas funções que não satisfazem estas condições. Desta forma, fomos motivados a procurar um conceito mais geral de Derivada que nos permitisse fazer menos exigências sobre as funções avaliadas. Assim, após um árduo processo de pesquisa e análise de dados, fomos capazes de compreender o conceito de Derivada no sentido das distribuições, nesse sentido de Derivada tudo que se exige de uma função de valor real em $\mathbb{R}^n$ é que ela seja localmente integrável.

Neste trabalho mostramos que toda função em $L_p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é uma função localmente integrável. Desta constatação surgiu uma nova questão a se considerar: Considerando a Deriva no sentido das distribuições, a Derivada parcial de uma função $L_p(\Omega)$, poderia ser também uma função em $L_p(\Omega)$? Até que ordem de Derivada essa informação poderia ser verdadeira?

Dessas indagações surge a necessidade de estudarmos os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, que são os espaços que reúnem todas as funções em $L_p(\Omega)$ que tem todas as Derivadas parciais de ordem igual ou menor que m também pertencentes ao espaço $L_p(\Omega)$. Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ acabam se mostrando muito interessantes, pois somos capazes de provar que esses espaços também são espaços de Banach e para o caso de $p = 2$ são também espaços de Hilbert.

Tendo em vista nortear os leitores, a dissertação deste trabalho foi desenvolvida da seguinte maneira: No primeiro capítulo, apresentam-se os conceitos essenciais para que o apreciador deste trabalho seja capaz de compreender as discussões que acontecem nos capítulos que se seguirão. No segundo capítulo, discutimos o conceito e alguns dos resultados mais importantes da integral de Lebesgue, pois este é o conceito de integral que será empregado no decorrer deste trabalho. Ainda no segundo capítulo, introduzimos as principais propriedades dos espaços L_p. No terceiro capítulo, abordamos o espaço das Funções Teste C_0^∞ que esta atrelado ao estudo das Distribuições, este último também é explorado neste capítulo. Com base em tudo que é visto nos primeiros capítulos, no quarto capítulo mostramos um estudo introdutório a respeito dos espaços de Sobolev. Nos apêndices são colocadas algumas provas de resultados apresentados no decorrer desta dissertação.

1 Preliminares

Neste capítulo serão expostos os conceitos e resultados fundamentais que o leitor precisará para a perfeita compreensão dos tópicos abordados nos capítulos que se seguirão. É importante também que se tenha conhecimento dos conteúdos básicos relacionados à Análise Real, Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear, tais assuntos são normalmente estudados em cursos de graduação em Matemática.

1.1 Função Mensurável

Definição 1.1.1 *Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathbb{X}$ não vazia de subconjuntos de X é dita ser uma álgebra quando satisfaz*

(i) *Se $A \in \mathbb{X}$, então o complementar $A^{\complement} = X \backslash A$ pertence a $\mathbb{X}$;*

(ii) *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{X}$, então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{X}$.*

Quando também é verdade que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a $\mathbb{X}$, sempre que A_n é uma sequência de conjuntos em $\mathbb{X}$, dizemos que $\mathbb{X}$ é uma Sigma-álgebra (ou δ-álgebra).

Considerando A um conjunto em uma álgebra $\mathbb{X}$, dos itens (i) e (ii) da definição (1.1.1) vem que $A \cup A^{\complement} = X \in \mathbb{X}$ e, portanto, $X^{\complement} = \varnothing \in \mathbb{X}$. Quando $\mathbb{X}$ é uma Sigma-álgebra sobre X, o par ordenado $(X, \mathbb{X})$ é chamado um Espaço Mensurável.

Quando $A, B \in \mathbb{X}$, de forma que $B \subset A$, temos que $A \setminus B \in \mathbb{X}$. Com efeito, basta notar que $(A \setminus B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B$ e o resultado segue da definição (1.1.1).

Exemplo 1.1.1 *Sejam $X = \mathbb{N}$ e $\mathbb{X} = \{\{1, 3, 5, \ldots\}, \{2, 4, 6, \ldots\}, \varnothing, \mathbb{N}\}$. Verificamos fácilmente que $\mathbb{X}$ satisfaz as condições de uma Sigma-álgebra sobre $\mathbb{N}$.*

Proposição 1.1.1 *Sejam $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ Sigma-álgebras de subconjuntos de X. Se $\mathbb{X}_3$ é a interseção de $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$, então $\mathbb{X}_3$ é uma Sigma-álgebra de subconjuntos de X.*

Prova.

(i) Se $A \in \mathbb{X}_3$, então $A \in \mathbb{X}_1$ e $A \in \mathbb{X}_2$, daí $A^{\complement} \in \mathbb{X}_1$ e $A^{\complement} \in \mathbb{X}_2$, assim $A^{\complement} \in \mathbb{X}_3$.

(ii) Sejam $A, B \in \mathbb{X}_3$, então $A, B \in \mathbb{X}_1$ e $A, B \in \mathbb{X}_2$. Portanto, $A \cup B \in \mathbb{X}_1$ e $A \cup B \in \mathbb{X}_2$, daí $A \cup B \in \mathbb{X}_3$.

(iii) Se A_n é uma sequência de conjuntos em $\mathbb{X}_3$, então A_n também é uma sequência de conjuntos em $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$. Portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$, assim $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{X}_3$.

De (i), (ii) e (iii) vem que $\mathbb{X}_3$ é uma Sigma-álgebra. $\blacksquare$

Seja $\mathcal{A}$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. É trivial que a família de todos os subconjuntos de X é uma Sigma-álgebra contendo $\mathcal{A}$, esta será, obviamente, a maior Sigma-álgebra contendo $\mathcal{A}$. Pela proposição (1.1.1) a interseção de Sigma-álgebras contendo $\mathcal{A}$ também é uma Sigma-álgebra contendo $\mathcal{A}$. Dessa forma, a interseção de todas as Sigma-álgebras que contém $\mathcal{A}$ é a menor Sigma-álgebra contendo $\mathcal{A}$, esta Sigma-álgebra menor é chamada de Sigma-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.1.2 *Seja $\mathcal{A} = \{(-\infty, x];\ x \in \mathbb{R}\}$. A Sigma-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, se define como a menor Sigma-álgebra de $\mathbb{R}$ que contém $\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é gerada por $\mathcal{A}$. Vejamos outros conjuntos que pertencem a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:*

1. $(x, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $(x, \infty) = (-\infty, x]^{\complement}$;

2. $(-\infty, x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois prova-se que* $(-\infty, x) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$;

3. $[x, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $[x, \infty) = (-\infty, x)^{\complement}$;

4. $[x, y] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $[x, y]^{\complement} = (-\infty, x) \cup (y, \infty)$;

5. $[x, y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $[x, y)^{\complement} = (-\infty, x) \cup [y, \infty)$;

6. $(x, y] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $(x, y]^{\complement} = (-\infty, x] \cup (y, \infty)$;

7. $(x, y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $(x, y)^{\complement} = (-\infty, x] \cup [y, \infty)$;

8. $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $\{x\} = [(-\infty, x) \cup (x, \infty)]^{\complement}$;

9. $\mathbb{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $\mathbb{N} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$;

10. $\mathbb{Z} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $\mathbb{Z} = \left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}\{n\}\right) \bigcup \left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\{-n\}\right)$;

11. $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *pois* $\mathbb{Q} = \left(\displaystyle\bigcup_{m,n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{m}\right\}\right) \bigcup \left(\displaystyle\bigcup_{m,n=1}^{\infty}\left\{\frac{-n}{m}\right\}\right) \bigcup \{0\}$.

Proposição 1.1.2 *A Sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é gerada por qualquer um dos conjuntos seguintes*

(a) *O conjunto dos intervalos abertos* $\mathcal{A}_1 = \{(a, b);\ a < b\}$;

(b) *O conjunto dos intervalos fechados* $\mathcal{A}_2 = \{[a, b];\ a < b\}$;

(c) *O conjunto dos intervalos semiabertos* $\mathcal{A}_3 = \{(a,b];\ a < b\}$ *ou* $\mathcal{A}_4 = \{[a,b);\ a < b\}$*;*

(d) *O conjunto dos raios abertos* $\mathcal{A}_5 = \{(a,\infty);\ a \in \mathbb{R}\}$ *ou* $\mathcal{A}_6 = \{(-\infty,a);\ a \in \mathbb{R}\}$*;*

(e) *O conjunto dos raios fechados* $\mathcal{A}_7 = \{[a,\infty);\ a \in \mathbb{R}\}$ *ou* $\mathcal{A}_8 = \{(-\infty,a];\ a \in \mathbb{R}\}$*;*

Prova. Referência [3], p. 5.

No que se seguirá daqui em diante, consideraremos $\mathbb{X}$ uma Sigma-álgebra de X.

Definição 1.1.2 *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é dita* $\mathbb{X}$*-mensurável, ou simplesmente mensurável, se para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *o conjunto* $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\}$ *pertence a* $\mathbb{X}$*.*

O próximo teorema é um resultado clássico da teoria dos conjuntos.

Teorema 1.1.1 (Regras de De Morgan) *Seja* A_n *uma sequência (finita ou infinita) de conjuntos, então*

$$\left(\bigcup_n A_n\right)^{\complement} = \bigcap_n (A_n)^{\complement} \quad e \quad \left(\bigcap_n A_n\right)^{\complement} = \bigcup_n (A_n)^{\complement}$$

O lema seguinte mostra que há outras maneiras equivalentes de enunciar a definição de Função Mensurável.

Lema 1.1.1 *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função* $f : X \to \mathbb{R}$*.*

(a) *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$*, o conjunto* $A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\}$ *pertence a* $\mathbb{X}$*.*

(b) *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$*, o conjunto* $B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \le \alpha\}$ *pertence a* $\mathbb{X}$*.*

(c) *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$*, o conjunto* $C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \ge \alpha\}$ *pertence a* $\mathbb{X}$*.*

(d) *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$*, o conjunto* $D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\}$ *pertence a* $\mathbb{X}$*.*

Prova. Uma vez que $(A_\alpha)^{\complement} = B_\alpha$ e $(C_\alpha)^{\complement} = D_\alpha$, o item (i) da definição (1.1.1) diz que (a) $\Leftrightarrow$ (b) e (c) $\Leftrightarrow$ (d). Temos também

(I) Se (a) é verdade, então $A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathbb{X}$. Mostra-se que $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$, a Regra de De Morgan nos dá $(C_\alpha)^{\complement} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_{\alpha-\frac{1}{n}}\right)^{\complement}$. Da definição (1.1.1), segue que $C_\alpha \in \mathbb{X}$, daí (a) $\Rightarrow$ (c).

(II) Se (c) é verdade, então $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathbb{X}$. Prova-se que $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$, segue da definição (1.1.1) que $A_\alpha \in \mathbb{X}$, daí (c) $\Rightarrow$ (a).

Portanto, (d) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (a) $\Leftrightarrow$ (b). ■

Lema 1.1.2 *Sejam f, g funções mensuráveis de valor real e $c \in \mathbb{R}$. As funções*

$$cf,\ f^2,\ f+g,\ fg,\ |f|,$$

também são mensuráveis.

Prova. Referência [1], p. 9.

Definição 1.1.3 *Na reta real estendida $\overline{\mathbb{R}}$ consideramos os simbolos $+\infty$ e $-\infty$, ou seja, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.*

Definição 1.1.4 *Dizemos que uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável quando satisfaz*

$$\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathbb{X} \text{ para cada } \alpha \in \mathbb{R}.$$

A coleção de todas as funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis é indicada por $M(X, \mathbb{X})$. Assim, $M^+(X, \mathbb{X}) = \{f \in M(X, \mathbb{X});\ f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X\}$.

Lema 1.1.3 *Uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se, são satisfeitas*

(i) *Os conjuntos $A = \{x \in X;\ f(x) = \infty\}$, $B = \{x \in X;\ f(x) = -\infty\}$ pertencem a $\mathbb{X}$;*

(ii) *A função de valor real f_1 definida por*

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x)\,, & se\ x \notin A \cup B \\ 0\,, & se\ x \in A \cup B \end{cases}$$

é mensurável.

Prova. Pode-se mostrar que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} \tag{1}$$

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) \leq -n\} \tag{2}$$

Supondo que f é mensurável, usando as regras de De Morgan em (1) e (2), temos

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) \leq n\} \right)^{\complement}$$

$$B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^{\complement}$$

das definições (1.1.1) e (1.1.4), segue que $A, B \in \mathbb{X}$.

Também temos que

$$\begin{aligned}
\alpha &\geq 0 \implies (\{x \in X;\ \ f_1(x) > \alpha\})^{\complement} = \{x \in X;\ \ f(x) \leq \alpha\} \cup A \\
\alpha &< 0 \implies \{x \in X;\ \ f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X;\ \ f(x) > \alpha\} \cup B
\end{aligned}$$

das definições (1.1.1) e (1.1.4), segue que

$$\{x \in X;\ \ f_1(x) > \alpha\} \ \in \ \mathbb{X} \quad \text{para qualquer } \alpha \ \in \ \mathbb{R},$$

portanto, f_1 é mensurável.

Por outro lado, se (i) e (ii) são satisfeitas, como

$$\begin{aligned}
\alpha &\geq 0 \implies \{x \in X;\ \ f(x) > \alpha\} = \{x \in X;\ \ f_1(x) > \alpha\} \cup A, \\
\alpha &< 0 \implies (\{x \in X;\ \ f(x) > \alpha\})^{\complement} = \{x \in X;\ \ f_1(x) \leq \alpha\} \cup B,
\end{aligned}$$

segue das definições (1.1.1), (1.1.2) e do lema (1.1.1) que

$$\{x \in X;\ \ f(x) > \alpha\} \in \mathbb{X} \quad \text{para qualquer } \alpha \ \in \ \mathbb{R},$$

portanto, f é mensurável. ■

1.2 Medidas

Definição 1.2.1 *Uma Medida é uma função de valor real estendido $\mu : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ que satisfaz*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$*;*

(ii) $\mu(E) \geq 0 \ \ \forall \ E \in \mathbb{X}$*;*

(iii) *Se E_n é uma sequência disjunta de conjuntos em $\mathbb{X}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Uma tripla ordenada $(X, \mathbb{X}, \mu)$ é chamada um Espaço de Medida. Um exemplo importante de medida é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ que será estudada em detalhes na próxima seção.

Teorema 1.2.1 *Seja μ uma medida definida em uma Sigma-álgebra $\mathbb{X}$. Se E e F pertencem a $\mathbb{X}$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$. Se $\mu(E) < \infty$, então $\mu\left(F \backslash E\right) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Prova. Como $F = E \cup (F \backslash E)$ e $E \cap (F \backslash E) = \varnothing$, segue que

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \tag{3}$$

Sendo $\mu(F \backslash E) \geq 0$, segue que $\mu(E) \leq \mu(F)$.

Se $\mu(E) < \infty$, então podemos subtrair $\mu(E)$ de ambos os lados de (3) e obtemos

$$\mu(F \backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$$

■

Definição 1.2.2 *Dizemos que uma proposição, que depende dos pontos de X, mantém-se* q.t.p *(quase em todo ponto), se existe um subconjunto $Z \subset X$ com $\mu(Z) = 0$, de forma que a proposição se sustenta em $Z^{\complement} = X \setminus Z$.*

1.3 Medida de Lebesgue

Definição 1.3.1 *Seja E um retângulo aberto de $\mathbb{R}^n$, isto é, E indica o produto cartesiano de n intervalos abertos limitados*

$$E = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

Indicamos o conteúdo $C(E)$ do retângulo E por

$$C(E) = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \cdots \cdot |b_n - a_n| = \prod_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$$

Definição 1.3.2 *Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{A;\ A \subset \mathbb{R}^n\}$, o conjunto das partes de $\mathbb{R}^n$. Consideremos a aplicação $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, definida por*

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C(E_k)\,;\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right\}$$

A aplicação λ chama-se medida exterior de Lebesgue.

Proposição 1.3.1 *A medida exterior de Lebesgue goza das seguintes propriedades*

(i) $\lambda(\varnothing) = 0$.

(ii) $\lambda(A) \leq \lambda(B)$, *sempre que $A \subset B$.*

(iii) $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$, *qualquer que seja a sequência A_k em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

Prova.

(i) Seja $E = (a_1, a_1) \times (a_2, a_2) \times \cdots \times (a_n, a_n)$, verificamos que $C(E) = 0$. Fazendo $E_k = E$ para cada $k = 1, 2, \ldots$, segue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} C(E_k) = 0$$

Como $\lambda(A) \geq 0 \ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e $\varnothing \subset E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, segue que $\lambda(\varnothing) = 0$.

(ii) Seja A, B em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tais que $A \subset B$. Temos que

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \Longrightarrow \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

Portanto,

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C(E_k)\, ;\ B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right\} \subset \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C(E_k)\, ;\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right\} \tag{4}$$

De (4), segue que $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

(iii) Sejam A_k uma sequência em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de retângulos $E_{k,\,j}$, tal que

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k,\,j} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} C(E_{k,\,j}) < \lambda(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \tag{5}$$

Ficamos com

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{k,\,j} \tag{6}$$

De (5), (6) e da definição de λ, segue que

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} C(E_{k,\,j}) < \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) + \varepsilon \end{aligned}$$

Como ε é arbitrariamente próximo de zero, obtemos

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$$

$\blacksquare$

Definição 1.3.3 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se mensurável em relação a medida exterior de Lebesgue se verificar*

$$\lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A^{\complement} \cap B), \quad \forall\, B \subset \mathbb{R}^n$$

Também se diz que A é λ-mensurável ou ainda que A é mensurável no sentido de Lebesgue.

Teorema 1.3.1 *Seja $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n\,;\ \ A$ é λ-mensurável$\}$. Então*

(i) *$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma sigma-álgebra de $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *A medida exterior de Lebesgue, restrita a $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma medida.*

Prova.

(i) Seja $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Tendo em vista que $(A^{\complement})^{\complement} = A$, da definição (1.3.3) resulta imediatamente que

$$A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad A^{\complement} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

Consideremos $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $B \subset \mathbb{R}^n$. Sendo A_1 λ-mensurável, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda(B \cap [A_1 \cup A_2]) &= \lambda(B \cap [A_1 \cup A_2] \cap A_1) + \lambda(B \cap [A_1 \cup A_2] \cap {A_1}^{\complement}) \\
&= \lambda(B \cap [A_1 \cup \{A_2 \cap A_1\}]) + \lambda(B \cap [\varnothing \cup \{A_2 \cap {A_1}^{\complement}\}]) \\
&= \lambda(B \cap [A_1]) + \lambda(B \cap [A_2 \cap {A_1}^{\complement}]) \\
&= \lambda(B \cap A_1) + \lambda(B \cap A_2 \cap {A_1}^{\complement})
\end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
\lambda(B \cap [A_1 \cup A_2]) + \lambda(B \cap [A_1 \cup A_2]^{\complement}) &= \lambda(B \cap A_1) + \lambda(B \cap A_2 \cap {A_1}^{\complement}) \\
&+ \lambda(B \cap {A_1}^{\complement} \cap {A_2}^{\complement}) \\
&= \lambda(B \cap A_1) + \lambda(B \cap A_1^{\complement}) \\
&= \lambda(B)
\end{aligned}$$

Decorre desta última igualdade que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra.

Agora, seja A_k uma sequência em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Definamos uma sequência H_k por

$$\begin{aligned}
H_1 &= A_1 \\
H_k &= A_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right)^{\complement}, \quad k = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Seja $k_1 < k_2$, temos que $k_2 \geq k_1 + 1$, daí $k_1 \leq k_2 - 1$. Assim, $A_{k_1} \in \bigcup_{j=1}^{k_2-1} A_j$. Portanto, H_{k_2} não possui pontos de A_{k_1}, como $H_{k_1} \subset A_{k_1}$, segue que $H_{k_2} \cap H_{k_1} = \varnothing$. De forma análoga, verificamos que $k_1 > k_2 \Longrightarrow H_{k_1} \cap H_{k_2} = \varnothing$. Segue que $H_{k_1} \cap H_{k_2} = \varnothing$ para $k_1 \neq k_2$.

Como já sabemos que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra, observamos que H_k também é uma sequência de elementos em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Vamos provar, usando o princípio de indução que

$$\lambda(B) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(B \cap H_j) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} H_j\right)^{\complement}\right) \tag{7}$$

para todo $B \subset \mathbb{R}^n$.

Para $k = 1$ a igualdade (7) é trivial. Para o caso $k = 2$, basta notarmos que, para qualquer que seja $B \subset \mathbb{R}^n$, verifica-se

$$\begin{aligned}
\lambda(B) &= \lambda(B \cap H_1) + \lambda(B \cap H_1{}^{\complement}) \\
&= \lambda(B \cap H_1) + \lambda(B \cap H_1{}^{\complement} \cap H_2) + \lambda(B \cap H_1{}^{\complement} \cap H_2{}^{\complement}) \\
&= \lambda(B \cap H_1) + \lambda(B \cap H_2) + \lambda(B \cap [H_1 \cup H_2]^{\complement})
\end{aligned}$$

Supondo que (7) vale para algum $k \geq 2$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\lambda(B) &= \sum_{j=1}^{k} \lambda(B \cap H_j) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} H_j\right)^{\complement} \cap H_{k+1}\right) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} H_j\right)^{\complement} \cap H_{k+1}^{\complement}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda(B \cap H_j) + \lambda(B \cap H_{k+1}) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} H_j\right)^{\complement}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \lambda(B \cap H_j) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} H_j\right)^{\complement}\right)
\end{aligned}$$

Assim, segue que (7) vale para todo $k = 1, 2, \ldots$.

Tendo em vista que

$$\left[B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)^{\complement}\right] \subset \left[B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} H_j\right)^{\complement}\right],$$

temos que

$$\lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)^{\complement}\right) \leq \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} H_j\right)^{\complement}\right)$$

Assim, a igualdade (7) implica que

$$\lambda(B) \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda(B \cap H_j) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)^{\complement}\right) \tag{8}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (8), obtêm-se

$$\lambda(B) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B \cap H_j) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)^{\complement}\right)$$

Da proposição (1.3.1), vem que

$$\begin{aligned}
\lambda(B) &\geq \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(B \cap H_j)\right) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)^{\complement}\right) \\
&= \lambda\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\right)^{\complement}\right) \\
&= \lambda\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^{\complement}\right) \geq \lambda(B)
\end{aligned}$$

Ficamos com

$$\lambda(B) = \lambda\left(B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \lambda\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^{\complement}\right)$$

Portanto, $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, assim $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma Sigma-álgebla de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Consideremos A_k uma sequêcia em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, tal que $A_{k_1} \cap A_{k_2} = \varnothing$ para $k_1 \neq k_2$. Aplicando a igualdade (7) ao conjunto $B = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, obtemos

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(A_j) + \lambda\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda(A_j)$$

Fazendo $k \to \infty$ nessa última desigualdade, ficamos com

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \tag{9}$$

O item (iii) da proposição (1.3.1), garante que

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \tag{10}$$

De (9) e (10), concluímos que

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \tag{11}$$

Considerando (11) e o item (i) da proposição (1.3.1), segue-se que $\lambda : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ é uma medida.

■

A Sigma-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é chamada Sigma-álgebra de Lebesgue (em $\mathbb{R}^n$). O operador $\lambda : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ é chamado de Medida de Lebesgue (em $\mathbb{R}^n$).

1.4 Espaços de Banach

Definição 1.4.1 *Um Espaço Linear, ou Vetorial, é uma estrutura* $(\mathbb{W}, +, \cdot)$ *formada por um conjunto* $\mathbb{W}$*, uma operação* $+$ *de adição de elementos de* $\mathbb{W}$ *e uma operação* $\cdot$ *de multiplicação de elementos de* $\mathbb{W}$ *por escalares de um corpo* K*, satisfazendo as propriedades:*

A1 *Para quaisquer que sejam* $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{W}$*:* $w_1 + (w_2 + w_3) = (w_1 + w_2) + w_3$*;*

A2 *Existe* $0 \in \mathbb{W}$ *tal que para todo* $w \in \mathbb{W}$*:* $w + 0 = w$*;*

A3 *Para cada* $w \in \mathbb{W}$*, existe* $-w \in \mathbb{W}$ *tal que* $w + (-w) = 0$*;*

A4 *Quaisquer que sejam* $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$*, segue que* $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$*;*

M1 *Para todo escalar* $k \in K$ *e quaisquer* $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$*:* $k \cdot (w_1 + w_2) = k \cdot w_1 + k \cdot w_2$*;*

M2 *Para quaisquer* $k_1, k_2 \in K$ *e* $w \in \mathbb{W}$*:* $(k_1 + k_2) \cdot w = k_1 \cdot w + k_2 \cdot w$*;*

M3 *Para quaisquer* $k_1, k_2 \in K$ *e* $w \in \mathbb{W}$*:* $(k_1 k_2) \cdot w = k_1(k_2 \cdot w)$*;*

M4 *Seja 1 a unidade de* K*, para qualquer* $w \in \mathbb{W}$ *tem-se que* $1 \cdot w = w$*.*

Podemos representar um Espaço Linear $(\mathbb{W}, +, \cdot)$ simplesmente por $\mathbb{W}$. O sinal $\cdot$ da operação de multiplicação por escalar pode ser omitido, de forma que $k \cdot w = kw$. Daqui em diante, adotaremos o corpo K como sendo o conjunto dos números reais, ou seja, $K = \mathbb{R}$.

Definição 1.4.2 *Seja* $\mathbb{W}$ *um Espaço Linear e* $\mathbb{V}$ *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{W}$*. Dizemos que* $\mathbb{V}$ *é um subespaço Linear, quando* $\mathbb{V}$ *satisfaz as* 8 *propriedades da definição* (1.4.1)*. Prova-se que para que* $\mathbb{V}$ *seja um subespaço Linear é suficiente que sejam satisfeitas*

(i) *Se* $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, *então* $(v_1 + v_2) \in \mathbb{V}$*;*

(ii) *Se* $v \in \mathbb{V}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então* $\alpha v \in \mathbb{V}$.

Podemos resumir (i) *e* (ii) *na única condição:*

$$Se\ v_1, v_2 \in \mathbb{V}\ e\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ então\ (\alpha v_1 + \beta v_2) \in \mathbb{V}.$$

Como um subespaço Linear também é um espaço Linear, se queremos provar que $\mathbb{V}$ é um espaço Linear, basta provar que $\mathbb{V}$ satisfaz as condições de um subespaço Linear.

Definição 1.4.3 *Se* $\mathbb{V}$ *é um espaço linear, então uma função de valor real* N *em* $\mathbb{V}$ *é dita ser uma norma para* $\mathbb{V}$ *no caso de satisfazer*

(i) $N(v) \geq 0$ *para todo* $v \in \mathbb{V}$*;*

(ii) $N(v) = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$*;*

(iii) $N(\alpha v) = |\alpha|\, N(v)$ *para todo* $v \in \mathbb{V}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $N(v_1 + v_2) \leq N(v_1) + N(v_2)$ *para todo* $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.

Quando $\mathbb{V}$ possui uma norma, dizemos que $\mathbb{V}$ é um Espaço Normado.

Definição 1.4.4 *Uma sequência* v_n *em um espaço normado* $\mathbb{V}$*, é convergente para* v *em* $\mathbb{V}$*, se para cada* $\varepsilon > 0$*, existir um* $n_\circ(\varepsilon)$ *tal que*

$$N(v - v_n) < \varepsilon \ \ sempre\ que\ \ n \geq n_\circ(\varepsilon)$$

onde N *é uma norma para* $\mathbb{V}$.

Definição 1.4.5 *Uma sequência* v_n *em um espaço normado* $\mathbb{V}$*, é uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{V}$*, se para cada* $\varepsilon > 0$*, existir um* $n_\circ(\varepsilon)$ *tal que*

$$N(v_m - v_n) < \varepsilon \ \ sempre\ que\ \ m, n \geq n_\circ(\varepsilon)$$

onde N *é uma norma para* $\mathbb{V}$.

Lema 1.4.1 *Seja* $\mathbb{V}$ *um espaço normado. Toda sequência convergente em* $\mathbb{V}$ *é uma sequência de Cauchy.*

Prova. Seja $v_n \to v$ em $\mathbb{V}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\circ(\varepsilon/2)$, tal que

$$N(v - v_n) < \varepsilon/2 \ \ e \ \ N(v - v_m) < \varepsilon/2 \ \ para \ \ m,\, n \geq n_\circ(\varepsilon/2) \tag{12}$$

Usando a definição (1.4.3), segue que

$$N(v_m - v_n) = N(v_m - v + v - v_n) \leq N(v - v_m) + N(v - v_n) \tag{13}$$

De (12) e (13), segue que

$$N(v_m - v_n) < \varepsilon \text{ para } m, n \geq n_\circ(\varepsilon/2)$$

■

Definição 1.4.6 (Espaço de Banach) *Um espaço normado* $\mathbb{V}$ *é um Espaço Completo quando toda sequência de Cauchy em* $\mathbb{V}$ *é convergente para algum* v *em* $\mathbb{V}$*. Um Espaço Completo é também chamado um Espaço de Banach.*

1.5 Funcionais Lineares

Definição 1.5.1 *Consideremos dois conjuntos* U *e* V*. Definimos um operador* T *de* U *para* V*, sendo uma regra para transformar um elemento* $u \in U$ *em um elemento* $v \in V$*. Denotamos*

$$T : U \to V; \quad T(u) = v$$

Definição 1.5.2 *Um Operador* $T : U \to V$*, é chamado um Operador Linear quando* U *e* V *são Espaços Lineares e são satisfeitas*

(i) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ *para todo* $u_1, u_2 \in U$*;*

(ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ *para todo* $u \in U$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Podemos resumir (i) *e* (ii) *em*

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2) \text{ para } u_1, u_2 \in U \text{ e } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Doravante, denotaremos a norma de um espaço normado $\mathbb{V}$ por $\| \cdot \|_{\mathbb{V}}$ ou simplesmente $\| \cdot \|$ quando não houver risco de ambiguidade.

Definição 1.5.3 *Sejam* U *e* V *espaços normados. Dizemos que um Operador* $T : U \to V$ *é contínuo em* $u_\circ$*, se para cada* $\varepsilon > 0$ *é possível encontrar* $\delta(u_\circ, \varepsilon)$ *ou* $\delta(\varepsilon)$ *de forma que*

$$\| T(u) - T(u_\circ) \|_V < \varepsilon \text{ sempre que } \| u - u_\circ \|_U < \delta$$

Se T *é contínuo em todo* $u_\circ \in U$*, dizemos que* T *é um Operador Contínuo.*

Definição 1.5.4 *Seja* $T : U \to V$ *um Operador Linear. Dizemos que* T *é limitado se existe* $k > 0$*, tal que*

$$\| T(u) \|_V \leq k \| u \|_U \text{ para todo } u \in U.$$

Teorema 1.5.1 *Sejam* U *e* V *espaços normados. Um operador linear* $T : U \to V$ *é contínuo se, e somente se, é limitado.*

Prova. Seja $T : U \to V$ um operador linear limitado. Dado $u_\circ \in U$, existe $k > 0$ tal que

$$\| T(u) - T(u_\circ) \|_V = \| T(u - u_\circ) \|_V \leq k \| u - u_\circ \|_U$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon / k$ obtemos

$$\| T(u) - T(u_\circ) \|_V < \varepsilon \text{ sempre que } \| u - u_\circ \|_U < \delta$$

Como $u_\circ$ é arbitrário, segue que T é contínuo.

Agora, supondo que $T : U \to V$ é um operador linear contínuo. Observemos que $T(0) = T(u - u) = T(u) - T(u) = 0$. Tomando $u_\circ = 0$ e $\varepsilon = 1$ na definição (1.5.3), existe $\delta > 0$ tal que

$$\| T(u) \|_V < 1 \text{ sempre que } \| u \|_U < \delta$$

Em particular, dado $u \in U$, tomamos $z = \dfrac{\delta u}{2\| u \|_U}$, então $\| z \|_U = \dfrac{\delta}{2} < \delta$. Portanto,

$$\| T(z) \|_V = \frac{\delta}{2\| u \|_U} \| T(u) \|_V < 1.$$

Segue que $\| T(u) \|_V < 2\delta^{-1} \| u \|_U \ \forall\, u \in U$, sendo assim, T é limitado. ■

Teorema 1.5.2 *Um operador $T : U \to V$ é contínuo em $u \in U$, se e somente se, para toda sequência (u_n) em U com $\lim u_n = u$, tivermos $\lim T(u_n) = T(u)$.*

Prova. Suponha que T é contínuo em $u_\circ \in U$ e que u_n é uma sequência em U com $\lim u_n = u_\circ$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$\| T(u) - T(u_\circ) \|_V < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad \| u - u_\circ \|_U < \delta \tag{14}$$

Também existe $n_\circ \in \mathbb{N}$, tal que

$$\| u_n - u_\circ \|_U < \delta \quad \text{sempre que} \quad n \geq n_\circ \tag{15}$$

De (14) e (15), temos que

$$\| T(u_n) - T(u_\circ) \|_V < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n \geq n_\circ \tag{16}$$

De (16), segue que $\lim T(u_n) = T(u_\circ)$.

Reciprocamente, seja $\lim T(u_n) = T(u_\circ)$ para toda sequência u_n em U com $\lim u_n = u_\circ$. Supondo que T não é contínuo em $u_\circ$, existe $\varepsilon > 0$ de forma que: para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $u_n \in U$, de forma que

$$\| u_n - u_\circ \|_U < 1/n, \quad \text{mas} \quad \| T(u_n) - T(u_\circ) \|_V \geq \varepsilon \tag{17}$$

De (17), existe uma sequência u_n em U com $\lim u_n = u_\circ$, mas $\lim T(u_n) \neq T(u_\circ)$, o que é uma contradição. Portanto, T é contínuo em $u_\circ$.

■

Lema 1.5.1 *Seja $L(U,V)$ o conjunto dos operadores limitados com domínio em U e imagem em V. Se T e S pertencem a $L(U,V)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha T + \beta S$ defido por*

$$(\alpha T + \beta S)(u) = \alpha T(u) + \beta S(u) \quad \textit{para} \quad u \in U$$

também pertence a $L(U,V)$.

Prova. Seja $u \in U$, exitem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$|\alpha| \| T(u) \|_V \leq k_1 |\alpha| \| u \|_U$$
$$|\beta| \| S(u) \|_V \leq k_2 |\beta| \| u \|_U$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \| (\alpha T + \beta S)(u) \|_V &\leq |\alpha| \| T(u) \|_V + |\beta| \| S(u) \|_V \\ &\leq k_1 |\alpha| \| u \|_U + k_2 |\beta| \| u \|_U \\ &= (k_1 |\alpha| + k_2 |\beta|) \| u \|_U \end{aligned}$$

Fazendo $k = |\alpha| k_1 + |\beta| k_2$, concluímos que $\alpha T + \beta S \in L(U,V)$. ■

Teorema 1.5.3 *$L(U,V)$ é um espaço Linear Normado sobre a norma*

$$\| T \|_L = \sup \left\{ \frac{\| T(u) \|_V}{\| u \|_U}; \ u \neq 0 \right\} \quad \textit{para} \quad T \in L(U,V).$$

Prova. Seja $T, S \in L(U,V)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pelo lema (1.5.1), sabemos que $\alpha T + \beta S$ pertence a $L(U,V)$, portanto $L(U,V)$ é um Espaço Linear. Mostremos agora que $\| \cdot \|_L$ satisfaz as propriedades de uma norma sobre $L(U,V)$.

(i) Obviamete $\| T \|_L \geq 0$, pois $\dfrac{\| T(u) \|_V}{\| u \|_U} \geq 0 \ \ \forall\, u \neq 0$.

(ii) Se $T(u) = 0 \ \ \forall\, u \in U$, então $\dfrac{\| T(u) \|_V}{\| u \|_U} = 0 \ \ \forall\, u \neq 0$. Assim, $\| T \|_L = 0$.

Se $\| T \|_L = 0$, então $0 \leq \dfrac{\| T(u) \|_V}{\| u \|_U} \leq \| T \|_L = 0 \ \ \forall\, u \neq 0$. Segue que

$$\| T(u) \|_V = 0 \ \ \forall\, u \neq 0,$$

daí $T(u) = 0 \ \forall\, u \in U$. Lembremos que $T(0) = T(u-u) = T(u) - T(u) = 0$.

(iii) $\| \alpha T \|_L = \sup_{u\neq 0} \dfrac{\| \alpha T(u) \|_V}{\| u \|_U} = |\alpha| \sup_{u\neq 0} \dfrac{\| T(u) \|_V}{\| u \|_U} = |\alpha| \| T \|_V$.

(iv)

$$
\begin{aligned}
\| T + S \|_L &= \sup_{u\neq 0} \frac{\| T(u) + S(u) \|_V}{\| u \|_U} \\
&\leq \sup_{u\neq 0} \left(\frac{\| T(u) \|_V}{\| u \|_U} + \frac{\| S(u) \|_V}{\| u \|_U} \right) \\
&= \sup_{u\neq 0} \frac{\| T(u) \|_V}{\| u \|_U} + \sup_{u\neq 0} \frac{\| S(u) \|_V}{\| u \|_U} \\
&= \| T \|_L + \| S \|_L.
\end{aligned}
$$

■

Definição 1.5.5 *Seja U um espaço normado. Chamamos de Funcional Linear em U, qualquer operador linear $T : U \to \mathbb{R}$ que transforma elementos de U em números reais. O espaço de todos os funcionais lineares contínuos $L(U, \mathbb{R})$ é denotado por U'.*

1.6 Espaços de Hilbert

Definição 1.6.1 *Seja U um espaço linear. Dizemos que um operador $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \to \mathbb{R}$ é um produto interno sobre U, quando para quaisquer $u_1, u_2, u_3 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:*

(i) $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_1 \rangle$;

(ii) $\langle u_1 + u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle + \langle u_2, u_3 \rangle$;

(iii) $\langle \alpha u_1, u_2 \rangle = \alpha \langle u_1, u_2 \rangle$;

(iv) $\langle u_1, u_1 \rangle \geq 0$ *e* $\langle u_1, u_1 \rangle = 0$ *se, e somente se,* $u_1 = 0$.

Dizemos que $\langle u_1, u_2 \rangle$ é o produto interno de u_1 com u_2.

Embora a norma seja um conceito primitivo que independe do produto interno, o teorema seguinte diz que quando temos um produto interno disponível, podemos definir uma norma através deste.

Teorema 1.6.1 *Seja U um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Podemos definir uma norma em U por*

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \textit{para} \quad u \in U \tag{18}$$

A norma definida em (18) é denominada Norma Canônica de U.

Prova. Mostremos que $\langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$ satisfaz as propriedades de uma norma em U.

(i) $\|u\| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad \forall \quad u \in U.$

(ii) $\|u\| = \langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}} = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

(iii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. $\|\alpha u\| = \langle \alpha u, \alpha u\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha^2}\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|u\| \quad \forall \ u \in U.$

(iv) Seja $u_1, u_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle u_1 - \alpha u_2, u_1 - \alpha u_2\rangle = \langle u_1, u_1\rangle - 2\alpha\langle u_1, u_2\rangle + \alpha^2\langle u_2, u_2\rangle \geq 0 \tag{19}$$

Fazendo $\alpha = \dfrac{\langle u_1, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}$; $u_2 \neq 0$ em (19), ficamos com

$$\langle u_1, u_1\rangle - 2\frac{\langle u_1, u_2\rangle^2}{\langle u_2, u_2\rangle} + \frac{\langle u_1, u_2\rangle^2}{\langle u_2, u_2\rangle} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle u_1, u_1\rangle\langle u_2, u_2\rangle \geq \langle u_1, u_2\rangle^2 \tag{20}$$

De (20), obtemos

$$\langle u_1, u_2\rangle \leq \|u_1\|\|u_2\| \quad \text{para} \quad u_2 \neq 0 \tag{21}$$

Agora, observemos que

$$\|u_1 + u_2\|^2 = \langle u_1, u_1\rangle + 2\langle u_1, u_2\rangle + \langle u_2, u_2\rangle = \|u_1\|^2 + 2\langle u_1, u_2\rangle + \|u_2\|^2 \tag{22}$$

De (21) e (22), ficamos com

$$\|u_1 + u_2\|^2 \leq \|u_1\|^2 + 2\|u_1\|\|u_2\| + \|u_2\|^2 = (\|u_1\| + \|u_2\|)^2 \tag{23}$$

De (23), segue que

$$\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\| \quad \text{para} \quad u_2 \neq 0$$

O caso $u_2 = 0$ é trivial. ■

Definição 1.6.2 *Chama-se espaço de Hilbert, um espaço com produto interno que também é um espaço de Banach sobre sua norma canônica.*

2 Espaços de Lebesgue (L_p)

No presente capítulo vamos trabalhar o conceito e alguns dos resultados mais importantes de um interessante espaço na análise funcional, os Espaços L_p. Pretendemos, com isso, construir um caminho para o desenvolvimento dos principais conceitos deste trabalho.

2.1 Integral de Lebesgue

Aqui definiremos um conceito de integral que, como veremos, é mais abrangente que aquele que temos na integral de Riemann, normalmente estudada nos cursos de graduação.

Definição 2.1.1 *Seja $E \subset X$, definimos a função característica χ_E de E por*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1\,, & se\ x \in E \\ 0\,, & se\ x \notin E \end{cases}$$

Definição 2.1.2 *Uma função de valor real φ é simples, se tiver um número finito de valores. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os valores distintos de uma função simples $\varphi : X \to \mathbb{R}$ e $E_j = \{x \in X;\ \ \varphi(x) = a_j\}$, mostra-se que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são disjuntos; $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ e*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{24}$$

onde χ_{E_j} é a função característica do conjunto E_j. A expressão (24) é chamada a representação padrão de uma Função Simples.

Definição 2.1.3 *Se φ é uma Função Simples em $M^+(X, \mathbb{X})$ com representação padrão (24), definimos a integral de φ em relação a uma medida μ, como o número real estendido*

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(E_j) \tag{25}$$

Na expressão (25) empregamos a convenção de que $0 \cdot (\infty) = 0$.

Definição 2.1.4 *Se f pertence a $M^+(X, \mathbb{X})$, definimos a integral de f, em relação a medida μ, como sendo o número real estendido*

$$\int f \, d\mu = \sup \int \varphi \, d\mu \tag{26}$$

O supremo em (26) é estendido sobre todas as funções simples φ satisfazendo

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Se $f \in M^+(X, \mathbb{X})$ e $E \in \mathbb{X}$, mostra-se que $f\chi_E \in M^+(X, \mathbb{X})$ e definimos a integral de f sobre E em relação a μ como sendo o número real estendido

$$\int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu \tag{27}$$

onde χ_E é a função característica de E.

Definição 2.1.5 *Definimos a parte positiva f^+ e a parte negativa f^- de uma função $f \in M(X, \mathbb{X})$ por*

$$f^+(x) = \max(0, f(x)) \qquad f^-(x) = \max(0, -f(x))$$

Mostra-se que f^+ e f^- pertencem a $M^+(X, \mathbb{X})$.

Definição 2.1.6 (Espaço L) *Denotamos por $L = L(X, \mathbb{X}, \mu)$ o espaço de todas as funções mensuráveis de valor real definidas em X que satisfazem*

$$\int f^+ \, d\mu < \infty \quad e \quad \int f^- \, d\mu < \infty \tag{28}$$

em (28) *a integral é aquela dada na definição* (2.1.4).

Finalmente estamos aptos a compreender a definição da Integral de Lebesgue conforme o enunciado a seguir.

Definição 2.1.7 (Integral de Lebesgue) *Seja $f \in L(X, \mathbb{X}, \mu)$ definimos a integral de Lebesgue de f em relação a μ por*

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \tag{29}$$

Vejamos alguns resultados que serão importantes para lidarmos com os espaços L_p.

Lema 2.1.1 *Se $f \in M^+(X, \mathbb{X})$, então existe uma sequência (φ_n) em $M^+(X, \mathbb{X})$, tal que:*

(a) *Cada φ_n é uma função simples;*

(b) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ *para cada $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$;*

(c) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ *para cada $x \in X$.*

Prova. Apêndice **A**.

Teorema 2.1.1 (Teorema da Convergência Monótona) *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X,\mathbb{X})$ que converge para f, então*

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$$

Prova. Referência [1], p. 31.

Teorema 2.1.2 *Seja $f \in L(X,\mathbb{X},\mu)$. Se $Z \subset X$ é um conjunto de medida nula, então*

$$\int_Z f\, d\mu = 0$$

Prova. Da definição (2.1.4), temos

$$\int_Z f^+\, d\mu = \int f^+\chi_Z\, d\mu = \sup \int \varphi\, d\mu\,; \quad 0 \leq \varphi \leq f^+\chi_Z$$

Seja φ uma função simples tal que $0 \leq \varphi \leq f^+\chi_Z$. Como

$$f^+\chi_Z(x) = \begin{cases} f^+(x)\,, & se\ x \in Z \\ 0\,, & se\ x \in X \setminus Z \end{cases}$$

concluímos que $\varphi = 0$ em $X \setminus Z$, sendo assim $\varphi = 0$ q.t.p.

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ os valores distintos de φ, considerando $a_1 = 0$ e $a_j \neq 0$ para $j = 2, 3, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in X;\ \varphi(x) = 0\} \\ E_j &= \{x \in X;\ \varphi(x) = a_j\} \quad \text{para} \quad j = 2, 3, \ldots, n \end{aligned}$$

Como $\varphi = 0$ q.t.p, temos que $\mu(E_j) = 0$ para $j = 2, 3, \ldots, n$. Ficamos com

$$\int \varphi\, d\mu = 0\mu(E_1) + \sum_{j=2}^{n} a_j \mu(E_j) = 0 \tag{30}$$

De (30) vem que

$$\int_Z f^+\, d\mu = 0$$

De forma análoga,

$$\int_Z f^-\, d\mu = 0$$

Segue da definição (2.1.7) que

$$\int_Z f\,d\mu = \int_Z f^+\,d\mu - \int_Z f^-\,d\mu = 0$$

■

Teorema 2.1.3 *Sejam $f, g \in L(X, \mathbb{X}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$. São validas as seguintes propriedades de integração à Lebesgue*

(i) $\displaystyle\int cf\,d\mu = c\int f\,d\mu.$

(ii) $\displaystyle\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$

(iii) *Seja $E = E_1 \cup E_2$, onde E_1, E_2 são conjuntos disjuntos em $\mathbb{X}$, então*

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu$$

(iv) *Se $f \leq g$ q.t.p, então $\displaystyle\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.*

(v) *Seja $f \in M^+(X, \mathbb{X})$. Então $f = 0$ q.t.p se , e somente se, $\displaystyle\int f\,d\mu = 0$.*

Prova. Apêndice **B**.

Teorema 2.1.4 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Neste caso,*

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$$

Prova. Se f é integrável, então

$$\int f^+\,d\mu < \infty\,; \qquad \int f^-\,d\mu < \infty \tag{31}$$

Observamos que $|f| = f^+ + f^-$. De (31) e do item **(ii)** do teorema (2.1.3), segue que

$$\int |f|\,d\mu = \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu < \infty. \tag{32}$$

Portanto, $|f|$ é integrável.

Análogamente, se $|f|$ é integrável, então

$$\int |f|\,d\mu = \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu < \infty,$$

consequentemente

$$\int f^+ \, d\mu < \infty \; ; \qquad \int f^- \, d\mu < \infty.$$

Portanto, f é integrável.

Usando a definição de integral de Lebesgue e a desigualdade triangular, obtemos

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu$$

■

Lema 2.1.2 (Lema de Fatou) *Se f_n é uma sequência de funções em $M^+(X, \mathbb{X})$, então*

$$\int (\liminf f_n) \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$$

Prova. Referência [1], p. 33.

Teorema 2.1.5 (Teorema da convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge* q.t.p *para uma função mensurável de valor real f. Se existe uma função integrável g, tal que $|f_n| \leq g \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

Prova. Referência [1], p. 44.

O próximo teorema é um resultado muito conhecido quando falamos em integral de Riemann, mas também é valido para a integral de Lebesgue.

Teorema 2.1.6 (Teorema de Fubini) *Consideremos dois espaços de medida $(X, \mathbb{X}, \mu)$ e $(Y, \mathbb{Y}, \eta)$. Se $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ é uma função integrável em relação a $\mu \times \eta$, então*

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d(\mu \times \eta) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\eta \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, d\mu \right) d\eta$$

Prova. Referência [4], p. 53.

Teorema 2.1.7 *A integral de Riemann é um caso particular da integral de Lebesgue.*

Prova. Referência [8], p. 131.

Do teorema (2.1.7), inferimos que todos os resultados de integração validos para integral de Riemann também são aplicáveis a integral de Lebesgue.

Exemplo 2.1.1 *Seja* $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ *a função de Dirichlet*

$$u(x) = \begin{cases} 0\,, & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1\,, & se\ x \in \mathbb{Q} \end{cases} \tag{33}$$

u não é integrável à Riemann em $(0,1)$*, mas é integrável à Lebesgue em* $(0,1)$*.*

Prova. Referência [7], p. 2.

Do teorema (2.1.7) e do exemplo (2.1.1), vemos que toda função Riemann integrável é Lebesgue integrável, mas nem toda função Lebesgue integrável será Riemann integrável. Assim, observamos que a integral de Lebesgue é mais interessante no sentido de que é capaz de integrar um espaço maior de funções.

2.2 Completeza dos Espaços L_p.

Tendo em vista todo o cohecimento preliminar colocado acima, estamos aptos a compreender a definição e algumas propriedades dos espaços L_p. O conceito de integral empregado aqui é aquele definido para a integral de Lebesgue. Ao final desta seção mostraremos uma importante propriedade dos espaços L_p, a Completeza.

Definição 2.2.1 *Duas funções são ditas equivalentes quando são iguais* q.t.p. *A classe de equivalência de uma função* f*, denotada por* $[f]$*, é constituída por todas as funções equivalentes a* f*.*

Definição 2.2.2 (Espaço L_p) *Se* $1 \leq p < \infty$*, o espaço* $L_p = L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ *consiste em todas as classes de equivalência de funções de valor real mensuráveis* f *para as quais* $|f|^p$ *tem uma integral de Lebesgue finita em relação a* μ *sobre* X*.*

Quando conhecemos a Sigma-álgebra $\mathbb{X}$ e a Medida μ com as quais estamos lidando, podemos usar a notação $L_p = L_p(X)$.

Pelo item **(iv)** do teorema (2.1.3), todas as funções de uma classe de equivalência tem a mesma integral, por isso representaremos um memblo $[f]$ de L_p apenas por f, sendo f um membro da classe de equivalência $[f]$.

Teorema 2.2.1 *O espaço* L_p *é um espaço linear normado sobre a norma* $\| \cdot \|_p$ *dada por*

$$\| \ f \ \|_p = \left[\int |f|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}} ; \ \ f \in L_p$$

Prova. Seja $f, g \in L_p$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Do iten (i) do teorema (2.1.3) segue que

$$\int |\alpha\, f|^p \, d\mu = |\alpha|^p \int |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Tembém temos que

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2\max\{|f|,|g|\})^p = 2^p\,(\max\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p\,(|f|^p + |g|^p)$$

e, usando os itens (i), (ii) e (iv) do teorema (2.1.3), ficamos com

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq 2^p \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \right) < \infty.$$

Portanto, αf e $f+g$ pertencem a L_p, sendo assim, L_p é um espaço linear.

Agora, vamos provar que $\| \cdot \|_p$ satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da definição (1.4.3).

(i) Temos que $|f|^p \geq 0 \ \ \forall\, x \in X$, usando os itens (iv) e (v) do teorema (2.1.3), segue que

$$\| \, f \, \|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

(ii) Se $f = 0$ q.t.p, usando o item (v) do teorema (2.1.3), segue que

$$\| \, f \, \|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Agora, se $\| \, f \, \|_p = 0$, então $\displaystyle\int |f|^p \, d\mu = 0$. Do item (v) do teorema (2.1.3), vem que $|f|^p = 0$ q.t.p, consequentemente $f = 0$ q.t.p.

(iii) Seja $c \in \mathbb{R}$. Usando o item (i) do teorema (2.1.3), segue que

$$\| \, cf \, \|_p = \left(\int |cf|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = (|c|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \| \, f \, \|_p$$

O problema de provar a propriedade (iv) da definição (1.4.3) é superado com a Desigualdade de Minkowski no teorema (2.2.4).

■

Teorema 2.2.2 (Desigualdade de Holder) *Sejam* $1 < p, q < \infty$*, tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L_p$ *e* $g \in L_q$*, então* $fg \in L_1$ *e* $\| \, fg \, \|_1 \leq \| \, f \, \|_p \| \, g \, \|_q$.

Prova. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$; $0 < \alpha < 1$ e φ uma função definida para $t \geq 0$ por

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha.$$

Observamos que $\varphi\prime(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha - 1}$ e, como $\alpha - 1 < 0$, se verifica que

(i) $0 < t < 1 \implies t^{\alpha - 1} > 1 \implies \varphi\prime(t) < 0$

(ii) $t > 1 \implies t^{\alpha - 1} < 1 \implies \varphi\prime(t) > 0$

Decorre de (i) e (ii) que $\varphi(1)$ é o valor mínimo de φ. Segue que $\varphi(t) \geq \varphi(1)$, daí

$$t^{\alpha} \leq \alpha t + (1 - \alpha); \qquad t \geq 0. \tag{34}$$

Sejam a, b não-negativos, tomando $t = \dfrac{a}{b}$; $b \neq 0$ e multiplicando (34) por b obtemos

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha) b \tag{35}$$

Agora, sejam $p, q > 1$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $\alpha = \dfrac{1}{p}$, a desigualdade (35) nos dá

$$a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \tag{36}$$

Se A, B são números reais não-negativos, tomando $a = A^p$ e $b = B^q$ na desigualdade (36), obtemos

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \tag{37}$$

Supondo $\| \ f \ \|_p \neq 0$ e $\| \ g \ \|_q \neq 0$, tomamos $A = \dfrac{|f|}{\| \ f \ \|_p}$ e $B = \dfrac{|g|}{\| \ g \ \|_q}$ na desigualdade (37) e ficamos com

$$\frac{|fg|}{\| \ f \ \|_p \| \ g \ \|_q} \leq \frac{|f|^p}{p\| \ f \ \|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\| \ g \ \|_q^q} \tag{38}$$

Usando os itens (i), (ii) e (iv) do teorema (2.1.3), a integração de (38) nos dá

$$\frac{\| \ fg \ \|_1}{\| \ f \ \|_p \| \ g \ \|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{39}$$

De (39), estraímos a desigualdade de Holder.

Se fosse $\| \ f \ \|_p = 0$ ou $\| \ g \ \|_q = 0$, teriamos $f = 0$ ou $g = 0$, daí a desigualdade de Holder também seria válida.

■

Outra versão da desigualdade de Holder, em um contexto mais amplo, está enunciada no teorema seguinte.

Teorema 2.2.3 *Suponha que $p_i \geq 1$; $i = 1, \ldots, m$ são tais que*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$$

Se $f_i \in L_{p_i}$ para $i = 1, \ldots, m$, então temos que $\prod_{i=1}^{m} f_i \in L_1$ e ainda

$$\int \left| \prod_{i=1}^{m} f_i \right| d\mu \leq \prod_{i=1}^{m} \left(\int |f_i|^{p_i} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p_i}}$$

Prova. Referência [10], p. 42.

Teorema 2.2.4 (Desigualdade de Minkowski) *Se f, g pertencem a L_p; $1 \leq p < \infty$, então $f + g$ pertence a L_p e*

$$\| \, f + g \, \|_p \leq \| \, f \, \|_p + \| \, g \, \|_p \tag{40}$$

Prova. Seja $f, g \in L_p$, pelo teorema (2.2.1) $f + g \in L_p$. Usando a desigualdade tringular, temos

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1} \tag{41}$$

Como $f + g \in L_p$, segue que $(f + g)^p \in L_1$. Tomemos $1 \leq q < \infty$ de forma que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, observando que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies 1 + \frac{p}{q} = p \implies p - 1 = \frac{p}{q} \, ,$$

ficamos com $(f + g)^{p-1} \in L_q$. Pela desigualdade de Holder

$$\begin{aligned} \int |f||f + g|^{p-1} \, d\mu &= \| \, f(f + g)^{\frac{p}{q}} \, \|_1 \leq \| \, f \, \|_p \| \, (f + g)^{\frac{p}{q}} \, \|_q \\ &= \| \, f \, \|_p \left[\left(\int |f + g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{q}} = \| \, f \, \|_p \, (\| \, f + g \, \|_p)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$\int |f||f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \| \, f \, \|_p \, (\| \, f + g \, \|_p)^{\frac{p}{q}} \tag{42}$$

De forma analoga a (42), obtemos

$$\int |g||f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \| \, g \, \|_p \, (\| \, f + g \, \|_p)^{\frac{p}{q}} \tag{43}$$

Integrando a desigualdade em (41) e usando as desigualdades (42) e (43), ficamos com

$$\begin{aligned} \| f+g \|_p^p &= \int |f+g|^p \, d\mu \leq \| f \|_p (\| f+g \|_p)^{\frac{p}{q}} + \| g \|_p (\| f+g \|_p)^{\frac{p}{q}} \\ &= (\| f \|_p + \| g \|_p)(\| f+g \|_p)^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

daí obtemos

$$\| f+g \|_p^p \leq (\| f \|_p + \| g \|_p)(\| f+g \|_p)^{\frac{p}{q}} \tag{44}$$

Se $A = \| f+g \|_p = 0$ a desigualdade (40) é trivial. Para $A \neq 0$, podemos dividir a desigualdade (44) por $A^{\frac{p}{q}}$, como $p - \dfrac{p}{q} = 1$, segue que

$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

■

Teorema 2.2.5 *Se* $1 \leq p < \infty$*, então o espaço* L_p *é um Espaço Completo sobre a norma* $\| \cdot \|_p$.

Prova. Seja (f_n) uma sequência de cauchy relativa a norma $\| \cdot \|_p$. Dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon)$, tal que

$$m, n \geq \delta(\varepsilon) \implies \int |f_m - f_n|^p \, d\mu = \| f_m - f_n \|_p^p < \varepsilon^p \tag{45}$$

Para cada $i \geq 1$, existe $\delta(1/2^i)$, de modo que

$$m, n \geq \delta(1/2^i) \implies \| f_m - f_n \|_p < \frac{1}{2^i}$$

Tomando n_i como uma sequência definida por

$$\begin{aligned} n_1 &= \inf\{n \in \mathbb{N};\ n \geq \delta(1/2)\} \\ n_i &= \inf\{n \in \mathbb{N};\ n > \max(n_{i-1}, \delta(1/2^i))\} \quad \text{para} \quad i = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Vemos que n_i é uma sequência crescente que satisfaz

$$\| f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \|_p < \frac{1}{2^i} \tag{46}$$

Definindo $g_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ e $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$, temos $g = \displaystyle\lim_{k \to \infty} g_k$.

Sendo L_p um espaço linear e $g_k \leq g_{k+1}$, segue que g_k é uma sequência monótona crescente de funções em L_p. Como $g_k \geq 0$ e $g_k^p \in L_1$, concluímos que g_k^p é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X,\mathbb{X})$. Pelo teorema da convergência monótona (2.1.1) e da desigualdade (46), temos que

$$\begin{aligned}\int |g|^p \, d\mu &= \lim_{k\to\infty} \int |g_k|^p \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \| \, g_k \, \|_p^p \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \| \, f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \, \|_p \right)^p < \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right)^p = 1\end{aligned}$$

Segue que $g \in L_p$, ou seja, a série telescópica $\sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \right)$ converge absolutamente em L_p. Assim, podemos definir uma função f em L_p por

$$f = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \right).$$

Agora, observemos que

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \right) = f_{n_k} \tag{47}$$

De (47), segue que $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$. Lembremos que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f \implies \lim_{k\to\infty} \inf f_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \sup f_{n_k} = f$$

.

Seja $n \in \mathbb{N}$, da linearidade de L_p, segue que $|f_n - f_{n_k}|$ é uma sequência de funções em L_p, por isso, $|f_n - f_{n_k}|^p$ é uma sequência de funções em L_1. Assim, $|f_n - f_{n_k}|^p$ é uma sequência em $M^+(X,\mathbb{X})$. Aplicando o Lema de Fatou e usando a informação em (45), obtemos

$$\int |f_n - f|^p \, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int |f_n - f_{n_k}|^p \, d\mu < \varepsilon^p, \text{ para } n \geq \delta(\varepsilon) \tag{48}$$

De (48), segue que

$$\| \, f_n - f \, \|_p < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq \delta(\varepsilon).$$

Concluímos que $f_n \to f$ em L_p.

∎

3 O Espaço $C_0^\infty(\Omega)$ e as Distribuições

Daqui em diante representaremos por Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e por Γ sua fronteira. No que diz respeito a integração em Ω, será fixada a Medida de Lebesgue referenciada por dx. Usaremos a notação $\lambda(E)$ para nos referirmos a medida de Lebesgue de um conjunto E em $\mathbb{R}^n$.

3.1 Espaço das funções Testes $C_0^\infty(\Omega)$

Nesta seção mostraremos algumas definições e resultados importantes de um espaço que será de fundamental importância no estudo das distribuições.

Como teremos que lidar com derivadas parciais de diversas ordens, a notação convencional pode se tornar muito inadequada, assim vamos definir uma notação mais adequada para derivada parcial conforme é enunciado na definição seguinte.

Definição 3.1.1 *Seja f uma função de valor real em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, de forma que os α_i são números inteiros não-negativos. Definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ e*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Portanto, $D^\alpha f$ denota uma derivada parcial, de ondem $|\alpha|$, de f.

Exemplo 3.1.1 *Se f é uma função de valor real em $\mathbb{R}^3$ e $\alpha = (1, 0, 3)$, então $|\alpha| = 4$ e, portanto, $D^\alpha f$ é uma derivada parcial de quarta ordem definida por*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial z^3}$$

Definição 3.1.2 *Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(\Theta_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\Theta_i \subset \Omega$ tais que $f = 0$ q.t.p em Θ_i. Consideremos o subconjunto aberto $\Theta = \bigcup_{i \in I} \Theta_i$ de Ω, então $f = 0$ q.t.p em Θ. Definimos o suporte de f, como sendo o subconjunto fechado $\Theta^{\complement} = \Omega \setminus \Theta$. Denotamos*

$$\operatorname{supp} f = \Omega \setminus \Theta$$

A seguir, observamos que a definição de suporte tem um enunciado um pouco diferente quando lidamos com funções contínuas.

Definição 3.1.3 *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $K \subset \Omega$ é o conjunto de pontos onde $f \neq 0$ e $\overline{K}$ o fecho de K, então chamamos $\overline{K}$ de suporte de f e denotamos*

$$\operatorname{supp} f = \overline{K}$$

Quando o suporte de uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é um conjunto fechado e limitado de Ω, dizemos que f é uma função com suporte compacto.

Definição 3.1.4 *Definimos $C_0^\infty(\Omega)$ sendo o espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis que tem suporte compacto em Ω.*

Como toda função derivável é contínua, as funções em $C_0^\infty(\Omega)$ são contínuas, por isso o suporte dessas funções é dado pela definição (3.1.3). Considerando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, sendo $\varphi \neq 0$ apenas em um conjunto compacto, segue que φ é limitada em Ω.

Observação 3.1.1 *Mostra-se que $C_0^\infty(\Omega)$ é um Espaço Linear Normado sobre a norma $\| \cdot \|_\infty$ dada por*

$$\| \varphi \|_\infty = \sup |\varphi(x)| \quad \textit{para} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Teorema 3.1.1 *Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $D^\alpha \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ para qualquer α.*

Prova. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sendo $D^\alpha\varphi$ uma derivada parcial de φ, decorre que $D^\alpha\varphi$ é infinitamente diferenciável.

Seja $x_\circ \in \Omega$, tal que $x_\circ \notin \operatorname{supp}\varphi$. Existe $\varepsilon > 0$, de forma que $B(x_\circ, \varepsilon) \cap \operatorname{supp}\varphi = \varnothing$. Segue que

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in B(x_\circ, \varepsilon) \tag{49}$$

Consideremos $x \in B(x_\circ, \varepsilon/2)$. Sejam $h \in \mathbb{R}$; $|h| < \varepsilon/2$ e $i = (1, 0, 0, \dots, 0)$, temos que

$$\|x_\circ - (x + hi)\| \leq \|x_\circ - x\| + |h| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{50}$$

De (50), temos que $x + hi \in B(x_\circ, \varepsilon)$. Ficamos com

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x + hi) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \tag{51}$$

De (51), segue que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x) = 0 \ \ \forall\, x \in B(x_\circ, \varepsilon/2)$. Portanto, $x_\circ \notin \operatorname{supp} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}$. De forma análoga, concluímos que $x_\circ \notin \operatorname{supp} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ para cada $j = 2, 3, \dots, n$. Assim,

$$(\operatorname{supp}\varphi)^{\complement} \subset \left(\operatorname{supp} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^{\complement} \tag{52}$$

De (52), vem que

$$\operatorname{supp} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \subset \operatorname{supp}\varphi \tag{53}$$

De (53), concluímos que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ tem suporte compacto, sendo assim, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j} \in C_0^\infty(\Omega)$.

Repetindo o mesmo raciocínio $|\alpha|$ vezes, vem que $D^\alpha\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. ■

A definição de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ que será enunciada a seguir é explorada com mais detalhes na referência [10].

Definição 3.1.5 *Diz-se que uma sequência φ_ν de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

(a) *Os suportes de todas as funções testes φ_ν, da sequência dada, estão contidos num compacto fixo K.*

(b) *Para cada α, a sequencia $D^\alpha\varphi_\nu$ converge para zero uniformemente em K.*

Dizemos que a sequência φ_ν em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando a sequência $\varphi_\nu - \varphi$ converge para zero no sentido dado acima.

Pela definição (3.1.5), quando $\varphi_\nu \to \varphi$ em $C_0^\infty(\Omega)$, temos $D^\alpha\varphi_\nu \to D^\alpha\varphi$ em $C_0^\infty(\Omega)$.

Teorema 3.1.2 *Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $D^\alpha\varphi \in L_p(\Omega)\,;1 \leq p < \infty$ para qualquer α.*

Prova. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então pelo teorema (3.1.1) $D^\alpha\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Assim $D^\alpha\varphi$ é limitada em Ω. Portanto, para cada α, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|D^\alpha\varphi|^p \leq k^p$. Segue que

$$\int_\Omega |D^\alpha\varphi|^p\,dx = \int_{\operatorname{supp} D^\alpha\varphi} |D^\alpha\varphi|^p\,dx \leq k^p\lambda(\operatorname{supp} D^\alpha\varphi) < \infty$$

Portanto, $D^\alpha\varphi \in L_p(\Omega)\,;1 \leq p < \infty$. ■

Exemplo 3.1.2 *Seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$P(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1-\|x\|^2}\right), & se\ \|x\| < 1 \\ 0\,, & se\ \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

sendo $\|x\|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$.

Observamos sem dificuldade que P é infinitamente diferenciável e

$$\operatorname{supp} P = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$$

é um conjunto compacto. Assim, $P \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.1.1 *Seja $k = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\,dx$, sendo P a função definida no exemplo (3.1.2). Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ considere a função $P_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$P_\nu(x) = \left(\frac{\nu^n}{k}\right)P(\nu x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

para cada ν, P_ν é uma função teste no $\mathbb{R}^n$ com as seguintes propriedades

(a) $0 \leq P_\nu(x) \leq \dfrac{\nu^n}{ke}$;

(b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P_\nu(x)\,dx = \int_{\|x\|\leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(x)\,dx = 1$;

(c) supp $P_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1/\nu\}$.

Prova. Tendo em vista que a função exponencial e^{-t}; $t \geq 1$ é decrescente, considerando $t = \dfrac{1}{1-\|\nu x\|^2}$ com $\|\nu x\| < 1$, percebemos que a função

$$P(\nu x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1-\|\nu x\|^2}\right), & se\ \|\nu x\| < 1 \\ 0\,, & se\ \|\nu x\| \geq 1 \end{cases}$$

atinge o máximo quando $t = 1$, ou seja, quando $\|\nu x\| = 0$. Assim,

$$0 \leq P(\nu x) \leq \frac{1}{e} \tag{54}$$

Multiplicando (54) por ν^n/k, obtemos

$$0 \leq P_\nu(x) \leq \frac{\nu^n}{ke}$$

Observando que $P_\nu(x) = 0$ para $\|x\| > 1/\nu$, ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_\nu(x)\,dx = \int_{\|x\|\leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(x)\,dx$$

Fazendo $u = \nu x = (\nu x_1, \nu x_2, \ldots, \nu x_n)$, temos que $du = \nu^n dx$. Assim ficamos com

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_\nu(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^n} P(u)\,du = \frac{1}{k}\cdot k = 1$$

Pela definição de P é fácil percebermos a informação em (c). ■

Definição 3.1.6 *Uma sequência P_ν de funções teste no $\mathbb{R}^n$ com as propriedades* (a), (b) *e* (c) *da proposição* (3.1.1) *é denominada sequência regularizante.*

Definição 3.1.7 *Sejam f, g funções de valor real definidas em $\mathbb{R}^n$. Definimos a convolução $f * g$ das funções f e g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy$$

O próximo teorema é um resultado clássico no estudo de convoluções e pode ser encontrado na referência [5] p. 4.

Teorema 3.1.3 (Desigualdade de Young) *Consideremos* $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. *Sejam* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ *e* r *o número real verificando*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0.$$

Então $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\| f * g \|_r \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

Além disso,

$$\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$$

Proposição 3.1.2 *Seja* $f \in L_p(\mathbb{R}^n); 1 \leq p < \infty$. *Então o operador translação*

$$\tau_y : \mathbb{R}^n \to L_p(\mathbb{R}^n)$$

definido por

$$\tau_y(f) = f(x - y) \quad \textit{para} \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

é contínuo.

Prova. Refêrencia [5], p. 6.

Outro resultando conhecido no tratamento das convoluções é que: quando f possui derivada de ordem $|\alpha|$, temos que $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$. A prova deste resultado será omitida, pois exige uma demasiada gama de conhecimentos em análise no $\mathbb{R}^n$ que foge ao escopo deste trabalho.

Definição 3.1.8 *Seja* $f \in L_p(\Omega); 1 \leq p < \infty$ *e* P_ν *uma função tal como aquela definida na proposição* (3.1.1). *Definimos* $f_\nu = P_\nu * f$, *ou seja,*

$$f_\nu = \int_{\mathbb{R}^n} P_\nu(x - y) f(y)\, dy$$

f_ν *é chamada de regularização de* f.

Teorema 3.1.4 *Seja* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$; $1 \leq p < \infty$. *Se* f_ν *é a regularização de* f, *então*

$$\| f_\nu - f \|_p \to 0 \quad \textit{quando} \quad \nu \to \infty,$$

ou seja, $f_\nu \to f$ *em* $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Prova.

Caso 1: $p = 1$.

Usando o item (b) da proposição (3.1.1), a definição (3.1.7) e o teorema (2.1.4), temos

$$\begin{aligned}
|f_\nu - f| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P_\nu(x-y) f(y)\, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} P_\nu(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P_\nu(y) f(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) P_\nu(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} P_\nu(y) \left(f(x-y) - f(x) \right)\, dy \right| \\
&\leq \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) |f(x-y) - f(x)|\, dy \qquad (55)
\end{aligned}$$

Integrando esta última desigualdade e usando o teorema de Fubini, ficamos com

$$\begin{aligned}
\| f_\nu - f \|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_\nu - f|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) |f(x-y) - f(x)|\, dy\, dx \\
&= \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\, dx\, dy \\
&= \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) \| f(x-y) - f(x) \|_1\, dy \qquad (56)
\end{aligned}$$

Da proposição (3.1.2), o operador translação $\tau_y(f) = f(x-y)$ é contínuo em $y = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e $\nu_\circ \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\|y\| \leq \frac{1}{\nu} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \| f(x-y) - f(x) \|_1 < \varepsilon \qquad (57)$$

sempre que $\nu \geq \nu_\circ$.

De (56) e (57) segue que

$$\| f_\nu - f \|_1 < \varepsilon \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y)\, dy = \varepsilon \qquad (58)$$

sempre que $\nu \geq \nu_\circ$.

De (58), segue que $f_\nu \to f$ em $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Caso 2: $1 < p < \infty$.

Seja $K_\nu = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|y\| \leq 1/\nu\}$. Observemos que

$$\int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} |f(x)|^p\, dy = |f(x)|^p \lambda(K_\nu) < \infty \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Prova-se também que

$$f(y) \in L_p(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad f(x-y) \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

portanto, $f(x-y) \in L_p(K_\nu)$. Pela linearidade dos espaços L_p, ficamos com

$$f(x-y) - f(x) \in L_p(K_\nu).$$

Consideremos $1 \leq q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Do item (a) da proposição (3.1.1), temos

$$\int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y)|f(x-y) - f(x)|^p \, dy \leq \frac{\nu^n}{ke} \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} |f(x-y) - f(x)|^p \, dy < \infty \tag{59}$$

De (59), vem que $P_\nu(y)^{\frac{1}{p}}|f(x-y) - f(x)| \in L_p(K_\nu)$. Como $P_\nu(y) \in L_1(K_\nu)$, segue que $P_\nu(y)^{\frac{1}{q}} \in L_q(K_\nu)$.

De (55), usando a desigualdade de Holder e o item (b) da proposição (3.1.1), temos

$$\begin{aligned} |f_\nu - f|^p &\leq \left(\int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y)^{\frac{1}{q}} P_\nu(y)^{\frac{1}{p}} |f(x-y) - f(x)| \, dy \right)^p \\ &\leq \left[\left(\int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) |f(x-y) - f(x)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\ &= \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) |f(x-y) - f(x)|^p \, dy \end{aligned} \tag{60}$$

Integrando (60) em relação a x e usando o teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\nu - f|^p \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) |f(x-y) - f(x)|^p \, dy \, dx \\ &= \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \, dy \\ &= \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) \| \, f(x-y) - f(x) \, \|_p^p \, dy \end{aligned} \tag{61}$$

Da proposição (3.1.2), o operador translação $\tau_y(f) = f(x-y)$ é contínuo em $y = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e $\nu_\circ \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\|y\| \leq \frac{1}{\nu} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \| \, f(x-y) - f(x) \, \|_p < \varepsilon \tag{62}$$

sempre que $\nu \geq \nu_\circ$.

De (61), (62) e usando o item item (b) da proposição (3.1.1), ficamos com

$$\| \, f_\nu - f \, \|_p < \left(\varepsilon^p \int_{\|y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(y) \, dy \right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon \tag{63}$$

sempre que $\nu \geq \nu_\circ$.

De (63), segue que $f_\nu \to f$ em $L_p(\mathbb{R}^n)$.

$\blacksquare$

Seja $f \in L_p(\Omega)$, considerando $\overline{f}$ a extenção de f por zero em $\mathbb{R}^n$. O teorema (3.1.4) diz que $\overline{f}_\nu \to \overline{f}$ em $L_p(\mathbb{R}^n)$. Sendo $\overline{f}_\nu = f_\nu$ em Ω, inferimos que $f_\nu \to f$ em $L_p(\Omega)$.

Teorema 3.1.5 *Para um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pode-se construir uma sequência de conjuntos compactos (K_j) de forma que*

$$K_j \subset K_{j+1} \ \ e \ \ \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

Prova. Consideremos K_j definido por

$$K_j = \{x \in \Omega;\ \mathrm{dist}(x, \Gamma) \geq 1/j\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq j\}$$

onde Γ é a fronteira de Ω.

(i) Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto aderente de $W_j = \{x \in \Omega;\ \mathrm{dist}(x, \Gamma) \geq 1/j\}$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe algum $x_\circ \in W_j$, tal que $\|x_\circ - a\| < \varepsilon$.

Como $\mathrm{dist}(x_\circ, \Gamma) = \inf \|x_f - x_\circ\|\,;\ x_f \in \Gamma$. Temos que $\|x_f - x_\circ\| \geq 1/j \ \ \forall\, x_f \in \Gamma$. Assim, para $x_f \in \Gamma$ obtemos

$$\|x_f - a\| = \|x_f - x_\circ + x_\circ - a\| \geq \|x_f - x_\circ\| - \|x_\circ - a\| > \frac{1}{j} - \varepsilon \tag{64}$$

Como $\mathrm{dist}(a, \Gamma) = \inf \|x_f - a\|\,;\ x_f \in \Gamma$, segue de (64) que

$$\mathrm{dist}(a, \Gamma) > \frac{1}{j} - \varepsilon.$$

Sendo ε arbitrariamente próximo de zero, ficamos com $\mathrm{dist}(a, \Gamma) \geq \dfrac{1}{j}$.

Se fosse $a \notin \Omega$, teríamos que $\mathrm{dist}(a, \Omega) \geq 1/j$. Assim a bola aberta $B(a, 1/2j)$ não possuiria nenhum ponto de Ω, dessa forma a não poderia ser ponto aderente de Ω, tampouco de W_j o que é absurdo.

Segue que $a \in W_j$, portanto W_j é um conjunto fechado.

Notemos que $M_j = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq j\}$ é o fecho da bola aberta $B(0, j)$, daí M_j é um conjunto fechado.

Como W_j e M_j são fechados, $K_j = W_j \cap M_j$ é um conjunto fechado. Observando que $\|x\| \leq j \ \ \forall\, x \in K_j$, concluímos que K_j é compacto para cada $j = 1, 2, \ldots$.

(ii) Seja $x \in K_j$, temos que

$$\operatorname{dist}(x,\Gamma) \geq \frac{1}{j} > \frac{1}{j+1} \quad \text{e} \quad \|x\| \leq j < j+1$$

Segue que $x \in K_{j+1}$, daí $K_j \subset K_{j+1}$.

(iii) Observemos que

$$\{x \ \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x,\Gamma) \geq 1/j\} \to \Omega, \quad \text{quando} \quad j \to \infty$$
$$\{x \ \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq j\} \to \mathbb{R}^n, \quad \text{quando} \quad j \to \infty$$

Ficamos com $K_j \to \Omega$, quando $j \to \infty$. De (ii), segue que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \lim K_j = \Omega$$

$\blacksquare$

Teorema 3.1.6 *O espaço das funções testes $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L_p(\Omega)$; $1 \leq p < \infty$.*

Prova. Denotemos por $L_0^p(\Omega)$ o espaço das funções em $L_p(\Omega)$ com suporte compacto. Do teorema (3.1.2), temos que

$$C_0^\infty(\Omega) \subset L_0^p(\Omega) \subset L_p(\Omega)$$

Sejam $f \in L_p(\Omega)$, (K_j) a sequência de subconjuntos compactos de Ω do teorema (3.1.5) e χ_{K_j} a função característica de K_j, para cada $j = 1, 2, \ldots$. Consideremos a função $f_j = f\chi_{K_j}$, segue-se que $f_j \in L_p(\Omega)$ para cada j e

$$|f - f_j|^p = |f\chi_{\Omega \setminus K_j}|^p \leq |f|^p$$

Pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{j\to\infty} \| \ f - f_j \ \|_{p,\Omega}^p = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f - f_j|^p \, dx = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} |f - f_j|^p \, dx = 0$$

Portanto, $\| \ f - f_j \ \|_{p,\Omega} \to 0$, ou seja, $f_j \to f$ em $L_p(\Omega)$.

Temos que $\operatorname{supp} f_j \subset K_j$, daí f_j tem suporte compacto para cada j, sendo assim, $L_0^p(\Omega)$ é denso em $L_p(\Omega)$.

Agora, seja $g \in L_0^p(\Omega)$ e g_ν a regularização de g. Pela desigualdade de Young,

$$\operatorname{supp} g_\nu \subset \operatorname{supp} g + \operatorname{supp} P_\nu,$$

daí g_ν tem suporte compacto para cada $\nu = 1, 2, \ldots$. Sendo $D^\alpha g_\nu = D^\alpha P_\nu * g$, segue que $g_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$ para cada ν. Pelo teorema (3.1.4), $g_\nu \to g$ em $L_0^p(\Omega)$, daí $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L_0^p(\Omega)$.

Sejam $f \in L_p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Em vista da densidade de $L_0^p(\Omega)$ em $L_p(\Omega)$, existe uma sequência f_j em $L_0^p(\Omega)$ de forma que

$$\| f - f_j \|_{p,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para} \quad j \geq j_0$$

Devido a densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $L_0^p(\Omega)$, para cada $j = 1, 2, \ldots$ existe uma sequência $f_{j,\nu}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ de forma que

$$\| f_j - f_{j,\nu} \|_{p,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para} \quad \nu \geq \nu_0$$

Para $j, \nu \geq \max(j_0, \nu_0)$, temos que

$$\begin{aligned}
\| f - f_{j,\nu} \|_{p,\Omega} &= \| f - f_j + f_j - f_{j,\nu} \|_{p,\Omega} \\
&\leq \| f - f_j \|_{p,\Omega} + \| f_j - f_{j,\nu} \|_{p,\Omega} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Portanto, existe uma sequência φ_n de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ de forma que $\varphi_n \to f$ em $L_p(\Omega)$. Segue que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L_p(\Omega)$.

■

3.2 Distribuições

Definição 3.2.1 *Definimos uma Distribuição sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sendo um funcional linear contínuo em $C_0^\infty(\Omega)$, ou seja, uma distribuição é um operador linear contínuo de $C_0^\infty(\Omega)$ para $\mathbb{R}$. Denotamos o espaço de todas as distribuições sobre Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Exemplo 3.2.1 *Seja $x_\circ \in \Omega$. Definamos um operador $\delta_{x_\circ} : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$\delta_{x_\circ}(\varphi) = \varphi(x_\circ) \text{ para } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

É fácil verificar que $\delta_{x_\circ}$ é uma distribuição sobre Ω.

Com efeito, sejam $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$, temos

(i) $\delta_{x_\circ}(c\,\varphi) = c\,\varphi(x_\circ) = c\,\delta_{x_\circ}(\varphi)$.

(ii) $\delta_{x_\circ}(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(x_\circ) = \varphi(x_\circ) + \psi(x_\circ) = \delta_{x_\circ}(\varphi) + \delta_{x_\circ}(\psi)$.

De (i) *e* (ii), *segue que* $\delta_{x_\circ}$ *é um operador linear.*

Agora, observemos que

$$|\delta_{x_\circ}(\varphi) - \delta_{x_\circ}(\psi)| = |(\varphi - \psi)(x_\circ)| \leq \sup |\varphi - \psi| = \| \varphi - \psi \|_\infty \tag{65}$$

Dado $\varepsilon > 0$. *Tomando* $\delta = \varepsilon$, *de* (65), *temos que*

$$\| \varphi - \psi \|_\infty < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\delta_{x_\circ}(\varphi) - \delta_{x_\circ}(\psi)| < \varepsilon \tag{66}$$

De (66), *segue que* $\delta_{x_\circ}$ *é contínuo. Portanto,* $\delta_{x_\circ}$ *é um funcional linear contínuo em* $C_0^\infty(\Omega)$.

A distribuição $\delta_{x_\circ}$ *é chamada delta de Dirac. Quando* $x_\circ = 0$, *denotamos* $\delta_{x_\circ} = \delta_0$.

Definição 3.2.2 *Se* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *for uma função mensurável e para qualquer compacto* $K \subset \Omega$

$$\int_K |f|^p \, dx < \infty,$$

dizemos que $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. *Quando* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *dizemos que* f *é localmente integrável em* Ω.

Observação 3.2.1 *Obviamente,* $L_p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$, *pois*

$$K \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad \int_K |f|^p \, dx \leq \int_\Omega |f|^p \, dx.$$

Teorema 3.2.1 *Se* $1 \leq p < \infty$, *então* $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Prova. Seja $1 < p < \infty$. Tomemos um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ e $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Definamos

$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & se\ x \in K \\ 0\,, & se\ x \in \Omega \setminus K \end{cases}$$

Temos que $g \in L_q(K)$ para qualque q satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Observamos que $f \in L_p(K)$, pois $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Pela desigualdade de Holder, segue que

$$\begin{aligned} \int_K |f| \, dx &= \| fg \|_{1,K} \leq \| f \|_{p,K} \| g \|_{q,K} = \| f \|_{p,K} \left(\int_K 1 \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \| f \|_{p,K} (\lambda(K))^{\frac{1}{q}} < \infty \end{aligned}$$

Portanto, f é integrável em todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, ou seja, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

∎

Proposição 3.2.1 *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, podemos definir uma distribuição T_f por*

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx; \quad para \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Prova. Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ é o suporte de φ, então

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_K f\varphi \, dx \right| \leq \int_K |f\varphi| \, dx \leq \| \varphi \|_\infty \int_K |f| \, dx \tag{67}$$

Como f é integrável em qualquer subconjunto compacto de Ω, segue que T_f está bem definida em $C_0^\infty(\Omega)$.

Agora, sejam $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} T_f(c_1\varphi + c_2\psi) &= \int_\Omega f \cdot (c_1\varphi + c_2\psi) \, dx = c_1 \int_\Omega f\varphi \, dx + c_2 \int_\Omega f\psi \, dx \\ &= c_1 T_f(\varphi) + c_2 T_f(\psi) \end{aligned}$$

portanto, T_f é um Operador Linear.

Seja φ_ν uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ convergindo para φ em $C_0^\infty(\Omega)$. Pela definição (3.1.5), existe um subconjunto compacto $K_\circ \subset \Omega$ que contém os suportes de todas as funções teste da sequência $\varphi_\nu - \varphi$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi_\nu) - T_f(\varphi)| &= \left| \int_{K_\circ} f \cdot (\varphi_\nu - \varphi) \, dx \right| \leq \int_{K_\circ} |f||\varphi_\nu - \varphi| \, dx \\ &\leq \| \varphi_\nu - \varphi \|_\infty \int_{K_\circ} |f| \, dx \end{aligned} \tag{68}$$

Passando o limite com $\nu \to \infty$ em (68), temos que $|T_f(\varphi_\nu) - T_f(\varphi)| \to 0$, isto é, $T_f(\varphi_\nu) \to T_f(\varphi)$.

Pelo teorema (1.5.2), segue que T_f é contínuo.

■

Teorema 3.2.2 *Sejam K_1, K_2 dois subconjuntos disjuntos em $\mathbb{R}^n$, sendo K_1 compacto e K_2 fechado. Então existe uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\varphi(x) = 1 \ em \ K_1; \quad \varphi(x) = 0 \ em \ K_2 \quad e \quad 0 \leq \varphi \leq 1.$$

Prova. Seja $\varepsilon = \dfrac{\text{dist}\,(K_1, K_2)}{4}$. Consideremos

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ \text{dist}\,(x, K_1) \geq 2\varepsilon\}\,; \qquad L_2 = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ \text{dist}\,(x, K_1) \leq \varepsilon\}\,; \\ L_3 &= \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ \varepsilon < \text{dist}\,(x, K_1) < 2\varepsilon\} \end{aligned}$$

e definamos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{\text{dist}\,(x, L_1)}{\text{dist}\,(x, L_1) + \text{dist}\,(x, L_2)} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Segue-se que

$$f = 1 \text{ em } L_2\ ; \quad f = 0 \text{ em } L_1 \quad \text{e} \quad 0 < f < 1 \text{ em } L_3$$

Se $x \in L_3$, então $\varepsilon < \text{dist}\,(x, K_1) < 2\varepsilon$. Como

$$\text{dist}\,(x, K_1) = \inf_{x_1 \in K_1} \|x - x_1\|,$$

existe $x_\circ \in K_1$ de forma que $\|x - x_\circ\| < 2\varepsilon$. Sendo K_1 limitado, existe $k \in \mathbb{R}$ de forma que $\|x_\circ\| \leq k\ \ \forall\, x_\circ \in K_1$. Segue que

$$\|x\| \leq \|x - x_\circ\| + \|x_\circ\| < k + 2\varepsilon\ \ \forall\, x \in L_3$$

De forma análoga, vem que

$$\|x\| \leq \|x - x_\circ\| + \|x_\circ\| < k + 2\varepsilon\ \ \forall\, x \in L_2$$

Assim, $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \subset \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ \|x\| \leq k + 2\varepsilon\}$. Segue que, $\text{supp}\, f = \overline{L_2} \cup \overline{L_3}$ é um conjunto compacto.

Seja $\nu \in \mathbb{N}$, de forma que $\varepsilon\nu \geq 1$, consideremos $\varphi = P_\nu * f$ a regularização de f. Como $\dfrac{1}{\nu} \leq \varepsilon$, temos que

$$\varphi(x) = \int_{\|x-y\| \leq \varepsilon} P_\nu(x - y) f(y)\, dy$$

Como $D^\alpha \varphi = D^\alpha P_\nu * f$, pela definição de P_ν, a função φ é infinitamente diferenciável. Pela desigualdade de Young (Teorema 3.1.3), $\text{supp}\,\varphi \subset \text{supp}\, P_\nu + \text{supp}\, f$, assim $\text{supp}\,\varphi$ é compacto. Segue que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Supondo $\|x - y\| \leq \varepsilon$, temos

(i) Para $x \in K_1$.

Como $\text{dist}\,(y, K_1) \leq \|x - y\|\ \ \forall\, x \in K_1$, ficamos com $\text{dist}\,(y, K_1) \leq \varepsilon$, daí $y \in L_2$.

Portanto,

$$\varphi(x) = \int_{\|x-y\| \leq \varepsilon} P_\nu(x - y) f(y)\, dy = \int_{\|x-y\| \leq \frac{1}{\nu}} P_\nu(x - y)\, dy = 1$$

(ii) Para $x \in K_2$.

Como $\text{dist}\,(y, K_2) \leq \|x - y\|\ \ \forall\, x \in K_2$, temos que $\text{dist}\,(y, K_2) \leq \varepsilon$. Como

$$\varepsilon = \frac{\text{dist}\,(K_1, K_2)}{4}\,,$$

ficamos com $\text{dist}\,(y, K_1) \geq 3\varepsilon$, daí $y \in L_1$.

Portanto,

$$\varphi(x) = \int_{\|x-y\| \leq \varepsilon} P_\nu(x-y) f(y)\, dy = 0$$

(iii) Como $0 \leq f \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$0 \leq P_\nu(x-y) f(y) \leq P_\nu(x-y)\,,$$

integrando esta última desigualdade em $\mathbb{R}^n$, ficamos com

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Percebemos que φ satisfaz as condições desejadas pelo teorema.

∎

Definição 3.2.3 *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. A distribuição T_f, definida na proposição* (3.2.1)*, é chamada uma distribuição regular.*

Lema 3.2.1 (Lema de Du Bois Raymond) *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_f = 0$ se, e somente se, $f = 0$* q.t.p.

Prova. Seja $f = 0$ q.t.p. Como $|f||\varphi| = 0$ q.t.p, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, segue do teorema (2.1.4) e do iten (v) do teorema (2.1.3) que

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_\Omega |f||\varphi|\, dx = 0$$

Portanto, $T_f = 0$.

Agora, supondo que

$$T_f = \int_\Omega f\varphi\, dx = 0\ \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Consideremos um subconjunto aberto limitado $\Theta \subset \Omega$. Do teorema (3.1.6), sabemos que $C_0^\infty(\Theta)$ é denso em $L_1(\Theta)$. Como $f \in L_1(\Theta)$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\psi \in C_0^\infty(\Theta)$ tal que

$$\int_\Theta |f - \psi|\, dx = \|\ f - \psi\ \|_{1,\Theta} < \varepsilon \tag{69}$$

Obeservamos que dado $\varphi \in C_0^\infty(\Theta)$, sendo $\overline{\varphi}$ a extensão de φ por zero em Ω, temos que $\overline{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$ e

$$\int_\Theta f\varphi\,dx = \int_\Omega f\overline{\varphi}\,dx = 0 \tag{70}$$

De (69) e (70), resulta

$$\left|\int_\Theta \psi\varphi\,dx\right| = \left|\int_\Theta \psi\varphi - f\varphi\,dx\right| \leq \int_\Theta |\varphi||\psi - f|\,dx < \varepsilon\|\ \varphi\ \|_\infty \ \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Theta) \tag{71}$$

Consideremos os conjuntos

$$K_1 = \{x \in \Theta;\ \psi(x) \geq \varepsilon\} \quad \text{e} \quad K_2 = \{x \in \Theta;\ \psi(x) \leq -\varepsilon\},$$

Observemos que $K_1 = \psi^{-1}([\varepsilon,\infty))$ e $K_2 = \psi^{-1}((-\infty,-\varepsilon])$. Como $[\varepsilon,\infty)$ e $(-\infty,-\varepsilon]$ são fechados e ψ é contínua, K_1 e K_2 são fechados. Também temos que $K_1 \cup K_2 \subset \operatorname{supp}\psi$, assim K_1 e K_2 são subconjuntos compactos disjuntos de Θ.

Do teorema (3.2.2), existem φ_1, φ_2 em $C_0^\infty(\Theta)$ tais que

$$\begin{gathered}\varphi_1(x) = 1 \text{ em } K_1;\quad \varphi_1(x) = 0 \text{ em } K_2 \quad \text{e} \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 1\\ \varphi_2(x) = 0 \text{ em } K_1;\quad \varphi_2(x) = 1 \text{ em } K_2 \quad \text{e} \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 1\end{gathered}$$

Tomando $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$, obtém-se

$$\varphi_3(x) = 1 \text{ em } K_1 \quad \varphi_3(x) = -1 \text{ em } K_2 \quad \text{e} \quad -1 \leq \varphi_3 \leq 1$$

Notemos que

$$\int_\Theta \psi\varphi_3\,dx = \int_{\Theta\setminus K} \psi\varphi_3\,dx + \int_K \psi\varphi_3\,dx \quad \text{onde} \quad K = K_1 \cup K_2 \tag{72}$$

Observando-se que

$$|\psi| < \varepsilon \ \text{ em } \ \Theta \setminus K \tag{73}$$

e considerando (72) e a desigualdade (71), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_K \psi\varphi_3\,dx\right| &\leq \left|\int_\Theta \psi\varphi_3\,dx\right| + \left|\int_{\Theta\setminus K} \psi\varphi_3\,dx\right|\\ &< \varepsilon\|\ \varphi_3\ \|_\infty + \int_{\Theta\setminus K} |\psi||\varphi_3|\,dx\\ &< \varepsilon + \varepsilon\int_{\Theta\setminus K} |\varphi_3|\,dx\\ &< \varepsilon + \varepsilon\lambda(\Theta \setminus K)\\ &< \varepsilon + \varepsilon\lambda(\Theta)\end{aligned} \tag{74}$$

De (74), ficamos com

$$\left|\int_K \psi\varphi_3\,dx\right| < \varepsilon + \varepsilon\lambda(\Theta) \tag{75}$$

Lembremos que

$$\psi \geq \varepsilon \text{ em } K_1; \quad \psi \leq -\varepsilon \text{ em } K_2$$
$$\varphi_3 = 1 \text{ em } K_1; \quad \varphi_3 = -1 \text{ em } K_2$$

portanto,

$$\psi\varphi_3 = \psi \text{ em } K_1; \quad \psi\varphi_3 = -\psi \text{ em } K_2$$

Assim, segue que $\psi\varphi_3 \geq \varepsilon$ em K, portanto

$$|\psi\varphi_3| = \psi\varphi_3 \ \text{ em } \ K \tag{76}$$

Notemos que $|\varphi_3| = 1$ em K. Considerando (76) e (75), verificamos que

$$\int_K |\psi|\, dx = \int_K |\psi\varphi_3|\, dx = \left| \int_K \psi\varphi_3\, dx \right| < \varepsilon + \varepsilon\lambda(\Theta) \tag{77}$$

Pela desigualdade triangular $|f| \leq |f - \psi| + |\psi|$. Dessa última desigualdade e considerando (69), (73) e (77), ficamos com

$$\int_\Theta |f|\, dx \leq \int_\Theta |f - \psi|\, dx + \int_{\Theta\setminus K} |\psi|\, dx + \int_K |\psi|\, dx < 2\varepsilon + 2\varepsilon\lambda(\Theta)$$

Fazendo ε tender a zero, obtem-se que $f = 0$ q.t.p em Θ. Sendo Θ arbitrário, resulta que $f = 0$ q.t.p em qualquer subconjunto aberto limitado $\Theta \subset \Omega$.

Consideremos $\Theta_\nu = \{x \in \Omega;\ \|x\| < \nu\} = \Omega \cap B(0, \nu)$. Temos que Θ_ν é aberto e limitado para cada $\nu = 1, 2, \ldots$. Assim, $f = 0$ q.t.p em Θ_ν para cada ν. Segue que

$$f = 0 \text{ q.t.p em } \Omega = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Theta_\nu$$

■

Observação 3.2.2 *Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pelo Lema de Du Bois Raymond, $T_f = T_g$ se, e somente se, $f = g$ q.t.p. Por isso, dizemos que T_f é gerada pela classe de equivalência $[f]$ de f. Quando não há risco de ambiguidade, podemos nos referir a distribuição T_f pela mesma notação usada para a função f, isto é, denotamos $T_f(\varphi) = f(\varphi)$.*

Exemplo 3.2.2 *Sejam $x_\circ \in \Omega$ e $\delta_{x_\circ} : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ a distribuição definida no exemplo (3.2.1).*

Mostra-se que, $\delta_{x_\circ}$ não é uma distribuição regular.

De fato, supondo que existe $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, tal que

$$\delta_{x_\circ}(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx = \varphi(x_\circ) \quad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *definamos*

$$\psi(x) = \|x - x_\circ\|^2 \varphi(x)$$

onde $\|x - x_\circ\|^2 = (x_1 - x_{\circ_1})^2 + (x_2 - x_{\circ_2})^2 + \cdots + (x_n - x_{\circ_n})^2$.

Observemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 2(x_j - x_{\circ_j})\varphi + \|x - x_\circ\|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

Se continuarmos a derivar ψ, *observamos que* ψ *é infinitamente diferenciável. Como* $\|x - x_\circ\| = 0$ *apenas em* $x = x_\circ$, *temos que* $\operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp}\varphi$. *Assim,* $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Pela hipótese, temos

$$\int_\Omega f(x)\|x - x_\circ\|^2 \varphi(x)\, dx = \|x - x_\circ\|^2 \varphi(x)\Bigg|_{x = x_\circ} = 0 \ \ \forall \ \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Seja $K \subset \Omega$ *um subconjunto compacto, existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $\|x\| \leq k \ \ \forall\, x \in K$. *Assim,* $\|x - x_\circ\| \leq k + \|x_\circ\| \ \ \forall\, x \in K$. *Ficamos com*

$$\int_K \|x - x_\circ\|^2 f(x)\, dx \leq (k + \|x_\circ\|)^2 \int_K f(x)\, dx < \infty$$

Portanto, $\|x - x_\circ\|^2 f(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Pelo Lema de Du Bois Raymond, tem-se $\|x - x_\circ\|^2 f(x) = 0$ q.t.p, *como* $\|x - x_\circ\| = 0$ *somento em* $x = x_\circ$, *segue que* $f = 0$ q.t.p, *sendo assim,* $\delta_{x_\circ} = 0$.

Redefinindo a função P *no exemplo* (3.1.2), *supondo* $\|x_\circ\| > 0$, *temos uma função em* $C_0^\infty(\Omega)$ *dada por*

$$P_\circ(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-2\|x_\circ\|^2}{2\|x_\circ\|^2 - \|x\|^2}\right), & se\ \|x\| < \sqrt{2}\,\|x_\circ\| \\ 0 & , se\ \|x\| \geq \sqrt{2}\,\|x_\circ\| \end{cases}$$

onde $P_\circ(x_\circ) \neq 0$. *Se fosse* $\|x_\circ\| = 0$, *teriamos* $P(x_\circ) \neq 0$.

Portanto, a conclusão de que $\delta_{x_\circ}(\varphi) = \varphi(x_\circ) = 0 \ \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *é um absurdo. Logo, não existe* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *de forma que* $\delta_{x_\circ} = T_f$.

3.3 Derivada Fraca

Embora a distribuição delta de Dirac $\delta_{x_\circ}$, abordada no exemplo (3.2.2), não seja uma distribuíção regular, existe um objeto matemático também denotado por $\delta_{x_\circ}$ que gera essa distribuição. Esse objeto, chamado de função delta de Dirac, é definido como zero em $\mathbb{R}^n \setminus \{x_\circ\}$ e "∞ em $x_\circ$", ou seja,

$$\delta_{x_\circ}(x) = \begin{cases} 0\,, & se\ x \neq x_\circ \\ \infty\,, & se\ x = x_\circ \end{cases} \tag{76}$$

A função $\delta_{x_\circ}$ tem as seguintes propriedades

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_{x_\circ}\, dx = 1 \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{x_\circ} f\, dx = f(x_\circ) \ \text{ para toda } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ contínua em } x_\circ.$$

Somos incapazes de construir uma função no sentido comum com as propriedades observadas em $\delta_{x_\circ}$, mas esse objeto é muitas vezes tratado como função, por uma questão de conveniência na resolução de alguns problemas, como por exemplo na solução de Equações Diferenciais.

Nessa seção vamos trabalhar um conceito de derivada em um sentido mais amplo, de forma que algumas funções que não são deriváveis no sentido comum encontram uma representação para a sua chamada derivada fraca. Nesse contexto, como veremos, encontramos comumente a função delta de Dirac $\delta_{x_\circ}$.

Proposição 3.3.1 *Se T é uma distribuição sobre Ω, o opedor $D^\alpha T$ definido por*

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \quad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

também é uma distribuição.

Prova. Vamos mostrar que $D^\alpha T$ é um operador linear contínuo em $C_0^\infty(\Omega)$.

Sejam $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$, temos que

(i) $D^\alpha T(c\,\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(c\, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} c\, T(D^\alpha \varphi) = c\, D^\alpha T(\varphi)$;

(ii) $D^\alpha T(\varphi + \psi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi + D^\alpha \psi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) + (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \psi) =$
$= D^\alpha T(\varphi) + D^\alpha T(\psi)$.

De (i) e (ii) segue que $D^\alpha T$ é linear.

Seja φ_ν uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ convergindo para φ, segue que

$$\lim D^\alpha T(\varphi_\nu) = (-1)^{|\alpha|} \lim T(D^\alpha \varphi_\nu) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) = D^\alpha T(\varphi)$$

Do teorema (1.5.2) vem que $D^\alpha T$ é contínuo. Portanto, $D^\alpha T$ é uma distribuição.

■

Definição 3.3.1 (Derivada de Distribuições) *Seja T uma distribuição sobre Ω. A derivada de ordem $|\alpha|$ de T é a distribuição $D^\alpha T$ definida por*

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \quad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Segue-se da definição (3.3.1) que toda distribuição T é infinitamente diferenciável.

Exemplo 3.3.1 *Consideremos a distribuição $\delta_{x_\circ}$. A distribuição $D^\alpha \delta_{x_\circ}$ é dada por*

$$D^\alpha \delta_{x_\circ}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(x_\circ) \quad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Teorema 3.3.1 *O Operador Diferencial $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é um operador linear contínuo.*

Prova. Seja T_ν uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ com $\lim T_\nu = T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Assim, temos que

$$\lim T_\nu(\varphi) = T(\varphi) \ \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Segue que

$$\lim D^\alpha T_\nu(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \lim T_\nu(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) = D^\alpha T(\varphi)$$

Ficamos com $\lim D^\alpha T_\nu = D^\alpha T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Do teorema (1.5.2), vem que o Operador Dieferencial $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é contínuo.

■

Teorema 3.3.2 (Teorema de Green) *Seja $f \in C^m(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, pode-se mostrar que*

$$\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(D^\alpha \varphi) \, dx \quad para \quad |\alpha| \leq m \tag{77}$$

O Teorema de Green pode ser apresentado em outras versões dependendo da referência bibliográfica consultada, pois o enunciado clássico encontra variações dependendo do espaço de funções com o qual estamos trabalhando, o enunciado acima esta demonstrado na referência [9].

Agora, veremos que para o caso de uma distribuição regular a definição (3.3.1) ganha um enunciado específico.

Definição 3.3.2 *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e T_f a distribuição regular gerada por f. Definimos*

$$D^\alpha T_f = \int_\Omega (D^\alpha f)\varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(D^\alpha \varphi) \, dx \quad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

onde $D^\alpha f$ é a função que gera a distribuição $D^\alpha T_f$.

Em geral $D^\alpha f$ não é necessariamente a derivada de f no sentido convencional, mas quando $f \in C^m(\overline{\Omega})$, a identidade em (77) nos diz que $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$ para $|\alpha| \leq m$, isto é, $D^\alpha T_f$ é a distribuição gerada por $D^\alpha f$ para $|\alpha| \leq m$, sendo $D^\alpha f$ a derivada de f no sentido convencional.

Definição 3.3.3 (Derivada Fraca) *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $D^\alpha f$ a função que gera a distribuição $D^\alpha T_f$, dizemos que $D^\alpha f$ é a derivada de f no sentido das distribuições. Quando $D^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$, dizemos que $D^\alpha f$ é a derivada fraca de f.*

Pela definição (3.3.2) e a identidade (77), quando $f \in C^m(\overline{\Omega})$ a derivada fraca de f coincide com a derivada convencional. Vejamos alguns exemplos simples que nos ajudarão a elucidar a noção do que é a derivada no sentido das distribuições.

Exemplo 3.3.2 *Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função degrau definida por*

$$H(x) = \begin{cases} 1\,, & se\ x > 0 \\ 1/2\,, & se\ x = 0 \\ 0\,, & se\ x < 0 \end{cases}$$

É fácil ver que $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, temos que

$$\frac{dT_H}{dx}(\varphi) = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = -\lim_{t\to\infty}[\varphi(t) - \varphi(0)]$$

Como φ tem suporte compacto, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$. Segue que

$$\frac{dT_H}{dx}(\varphi) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

Portanto, a derivada de H no sentidos das distribuições é a função delta de Dirac em zero, isto é, $H'(x) = \delta_0(x)$. Percebemos que H não tem derivada fraca, pois $\delta_0(\varphi)$ não é uma distribuição regular.

Exemplo 3.3.3 *Seja $f(x) = |x|$ definida em $(-1,1)$, observamos que f não é derivável na origem. No entanto, como $f \in L^1_{loc}(-1,1)$, para $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$ temos*

$$\frac{dT_f}{dx}(\varphi) = -\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^0 x\,\varphi'(x)\,dx - \int_0^1 x\,\varphi'(x)\,dx \tag{78}$$

Como φ tem suporte compacto em $(-1,1)$, temos que $\varphi(1) = \varphi(-1) = 0$. Fazendo

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Longrightarrow \quad du = dx \\ dv = \varphi'(x)\,dx \quad &\Longrightarrow \quad v = \varphi(x) \end{aligned}$$

A integração por partes em (78) nos dá

$$\frac{dT_f}{dx}(\varphi) = -\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)\,dx$$

Definindo

$$g(x) = \begin{cases} -1\,, & se \quad -1 \leq x < 0 \\ 1\,, & se \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ficamos com

$$\frac{dT_f}{dx}(\varphi) = \int_{-1}^{1} g\varphi\,dx$$

Portanto, a derivada de $f(x)$ no sentido das distribuições é dada por $f'(x) = g(x)$. Como $g \in L^1_{loc}(-1,1)$, dizemos que $g(x)$ é uma derivada fraca de $f(x)$. Da observação (3.2.2)*, se $h = g$* q.t.p, *h também é uma derivada fraca de f.*

Proposição 3.3.2 *Seja D^α o operador diferencial no sentido das distribuições. Se $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$, então*

(i) *$D^\alpha(f+g) = D^\alpha f + D^\alpha g$;*

(ii) *$D^\alpha(cf) = c\,D^\alpha f$.*

Prova.

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

(i)

$$\begin{aligned} D^\alpha T_{f+g} &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (f+g)D^\alpha\varphi\,dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^\alpha\varphi\,dx + (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega gD^\alpha\varphi\,dx \\ &= D^\alpha T_f + D^\alpha T_g \end{aligned}$$

Segue, da definição (3.3.3), que $D^\alpha(f+g) = D^\alpha f + D^\alpha g$.

(ii)

$$D^\alpha T_{cf} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega cfD^\alpha\varphi\,dx = c(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^\alpha\varphi\,dx = c\,D^\alpha T_f$$

Da definição (3.3.3), segue que $D^\alpha(cf) = c\,D^\alpha f$.

■

4 Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Este é o capítulo principal deste trabalho, pois tudo que viemos estudando até aqui servirá como pré-requisito para a compreensão da definição e propridades dos Espaços de Sobolev.

4.1 Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Do teorema (3.2.1), inferimos que toda função em $L_p(\Omega)$ é uma função em $L^1_{loc}(\Omega)$. Sendo assim, toda função em $L_p(\Omega)$ gera uma distribuição regular, esse fato nos possibilita dar base para a definição seguinte.

Definição 4.1.1 (Espaços de Sobolev) *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de todas as funções $f \in L_p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$, sendo $D^\alpha f$ a derivada de f no sentido das distribuições.*

Proposição 4.1.1 *Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços lineares normados sobre a norma*

$$\| f \|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad para \;\; f \in W^{m,p}(\Omega)$$

Prova. Apêndice **C**.

Teorema 4.1.1 *Seja f_ν uma sequência de funções em $L_p(\Omega)$; $1 \leq p < \infty$ tal que*

$$f_\nu \to f \quad em \quad L_p(\Omega).$$

Então resulta que

$$T_{f_\nu} \to T_f \quad em \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

Prova. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Se $p = 1$, tem-se

$$|T_f - T_{f_\nu}| = \left| \int_\Omega (f_\nu - f)\varphi \, dx \right| \leq \| \varphi \|_\infty \int_\Omega |f_\nu - f| \, dx \tag{79}$$

Se $1 < p < \infty$, tomamos $q > 1$, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, da desigualdade de Holder, obtemos

$$|T_f - T_{f_\nu}| \leq \| f_\nu - f \|_{p,\Omega} \| \varphi \|_{q,\Omega} \tag{80}$$

Passando o limite com $\nu \to \infty$ nas desigualdades (79) e (80), segue que $|T_f - T_{f_\nu}| \to 0$, isto é,

$$T_{f_\nu} \to T_f \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

■

Teorema 4.1.2 *Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach.*

Prova. Seja f_ν uma sequência de Cauchy em $W^{m,p}(\Omega)$. Observemos que

$$\| D^\alpha f \|_p \leq \| f \|_{m,p} \quad \text{para todo} \quad f \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad |\alpha| \leq m. \tag{81}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu_\circ \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\| D^\alpha f_{\nu_1} - D^\alpha f_{\nu_2} \|_p = \| D^\alpha (f_{\nu_1} - f_{\nu_2}) \|_p \leq \| f_{\nu_1} - f_{\nu_2} \|_{m,p} < \varepsilon \tag{82}$$

sempre que $\nu_1, \nu_2 \geq \nu_\circ$.

Segue de (82) que $D^\alpha f_\nu$ é uma sequêcia de Cauchy no espaço $L_p(\Omega)$. Como $L_p(\Omega)$ é um espaço de Banach, existe $f_\alpha \in L_p(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha f_\nu \to f_\alpha \quad \text{em} \quad L_p(\Omega) \tag{83}$$

Em particular, quando $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, fazemos $f_\alpha = f_\circ$, assim

$$f_\nu \to f_\circ \quad \text{em} \quad L_p(\Omega) \tag{84}$$

Pelo teorema (4.1.1), temos

$$T_{D^\alpha f_\nu} \to T_{f_\alpha} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{85}$$

$$T_{f_\nu} \to T_{f_\circ} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{86}$$

Pelo teorema (3.3.1), o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é contínuo, segue dos teoremas (1.5.2) e (4.1.1) que

$$\lim T_{D^\alpha f_\nu} = \lim D^\alpha (T_{f_\nu}) = D^\alpha (T_{f_\circ}) = T_{D^\alpha f_\circ},$$

ou seja,

$$T_{D^\alpha f_\nu} \to T_{D^\alpha f_\circ} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{87}$$

De (85) e (87), vem que $T_{f_\alpha} = T_{D^\alpha f_\circ}$. Portanto, $f_\alpha = D^\alpha f_\circ$, assim

$$D^\alpha f_\circ \in L_p(\Omega) \quad \text{para} \quad |\alpha| \leq m \tag{88}$$

Segue de (84) e (88) que

$$f_\nu \to f_\circ \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\Omega)$$

■

4.2 Os espaços $H^m(\Omega)$

Definição 4.2.1 *Consideremos os Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. O espaço $H^m(\Omega)$ é chamado de espaço de Sobolev de ordem m.*

Proposição 4.2.1 *$H^m(\Omega)$ é um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m}$ definido por*

$$\langle f, g \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha f \cdot D^\alpha g)\, dx \quad \textit{para} \quad f, g \in H^m(\Omega)$$

Prova.

Se $f, g \in H^m(\Omega)$, então $D^\alpha f, D^\alpha g \in L_2(\Omega)$ para $|\alpha| \leq m$. Pela desigualdade de Holder $D^\alpha f \cdot D^\alpha g \in L_1(\Omega)$ para $|\alpha| \leq m$, segue que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m}$ esta bem definido em $H^m(\Omega)$.

Agora, Vamos mostrar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m}$ satisfaz as propriedades de um produto interno (Definição 1.6.1) em $H^m(\Omega)$.

Sejam $f, g, h \in H^m(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$. Temos

(i) $\langle f, g \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha f \cdot D^\alpha g)\, dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha g \cdot D^\alpha f)\, dx = \langle g, f \rangle_{H^m}$

(ii)
$$\begin{aligned}\langle f + g, h \rangle_{H^m} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha (f+g) \cdot D^\alpha h)\, dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha f \cdot D^\alpha h + D^\alpha g \cdot D^\alpha h)\, dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha f \cdot D^\alpha h)\, dx + \int_\Omega (D^\alpha g \cdot D^\alpha h)\, dx = \langle f, h \rangle_{H^m} + \langle g, h \rangle_{H^m}.\end{aligned}$$

(iii) $\langle cf, g \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (c\, D^\alpha f \cdot D^\alpha h)\, dx = c \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha f \cdot D^\alpha h)\, dx = c\langle f, g \rangle_{H^m}.$

(iv) $\langle f, f \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha f)^2\, dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha f \|_{2,\Omega}^2$, como $\| D^\alpha f \|_{2,\Omega} \geq 0$ para cada α, tal que $|\alpha| \leq m$, segue que $\langle f, f \rangle_{H^m} \geq 0$.

Se $f = 0$, então $D^\alpha f = 0$ para cada α, tal que $|\alpha| \leq m$, portanto $\langle f, f \rangle_{H^m} = 0$.

Agora, seja $\langle f, f \rangle_{H^m} = \| f \|_{m,2}^2 = 0$. Sabendo que $\| \cdot \|_{m,2}$ é uma norma em $H^m(\Omega)$, segue que $f = 0$.

■

Como $H^m(\Omega)$ é um espaço de Banach sobre a norma canônica

$$\| f \|_{H^m} = \| f \|_{m,2} = \langle f, f \rangle_{H^m}^{\frac{1}{2}} \quad \text{para} \quad f \in H^m(\Omega)$$

Segue que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Essa é uma característica do espaço $H^m(\Omega)$ que o torna diferente dos outros espaços $W^{m,p}(\Omega)$, tais que $p \neq 2$.

Considerações Finais

Cada um dos assuntos mencionados acima, exigiu um rigoroso estudo de conteúdos que eram pré-requisito. A metodologia empregada foi à pesquisa bibliográfica, onde o professor orientador me forneceu algumas referências bibliográficas, sempre que julguei insuficiente o que foi fornecido, também procurei usar outras referências tendo em vista a perfeita elucidação da proposta de estudo. Todos os tópicos abordados no processo de pesquisa foram discutidos em seminários apresentados ao professor orientador, tais apresentações ocorreram com frequência de duas vezes por semana com uma média de duração em torno de duas horas. Assim, o processo de coleta de dados ocorreu sobre um ambiente de discussão entre aluno e professor.

Foi muito interessante perceber que espaços tão complexos como os espaços de Sobolev ainda conseguem conservar a propriedade de completeza. Mais interessante ainda foi constatar que ainda se consegue extrair um espaço de Hilbert entre esses espaços.

Um próximo passo dessa pesquisa seria estudar o valor das funções em $H^m(\Omega)$ na fronteira de Ω e daí analisar o Teorema do Traço, um resultado importantíssimo para a solução de problemas de valor de Contorno no estudo de Equações Diferenciais Parciais. Poderíamos mostrar que, embora $C_0^\infty(\Omega)$ seja denso em $L_p(\Omega) = H^0(\Omega)$ nem sempre é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H^m(\Omega)$ para $m \neq 0$, justificando o estudo das propriedades do espaço $H_0^m(\Omega)$ que representa o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. Num estágio mais avançado de estudo, poderíamos ver a aplicação desses conceitos na solução de Problemas de Valor de Contorno Elíptico.

Referências Bibliográficas

[1] BATLE, R. G. *The elements of integration.* 1 ed. New York: Jonh Wiley & Sons, 1966.

[2] BLOOT, R. *Teoria Básica de EDP e Métodos para Tratar Equações Diferenciais Elípticas Quasilineares.* Curitiba: Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2008.

[3] BIEZUNER, R. J. *Notas de Aula: Medida e Integração.* Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2012.

[4] GUERRA, M. *Análise Matemática III: Teoria da Medida e Integral de Lebesgue.* Lisboa: Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG), 2006.

[5] MEDEIROS, L. A. MIRANDA, M.M. *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática – UFRJ, 2000.

[6] MACHADO, A. *Medida e Integração.* Lisboa: Universidade de Lisboa, 2011.

[7] NUNES, A. A. F.; CAVALCANTE, M. M. *Integral de Lebesgue.* In: XIX ENCONTRO ANUAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2010.

[8] PISKE, A. *Integração: Riemann e Lebesgue, um estudo comparativo*. Joinville: Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), 2013.

[9] REDDY, B. D. *Functional Analysis and Boundary-value Problems: an Introductory Treatment.* 1 ed. New York: Longman Scientific & Technical.

[10] RIVERA, J.E.M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* 1 ed. Petrópolis: LNCC, 2004.

[11] Weinholtz, A. B. *Integral de Riemann e de Lebesgue em* $\mathbb{R}^n$. 4 ed. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2006.

Apêndices

A Prova do Lema (2.1.1)

Lema 2.1.1 *Se* $f \in M^+(X, \mathbb{X})$, *então existe uma sequência* (φ_n) *em* $M^+(X, \mathbb{X})$, *tal que:*

(a) *Cada* φ_n *é uma função simples;*

(b) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ *para cada* $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$*;*

(c) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ *para cada* $x \in X$.

Prova. Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n}, & se \quad \dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n} \\ \\ n, & se \quad f(x) \geq n \end{cases} \tag{89}$$

onde $k = 0, 1, \ldots, (n\,2^n - 1)$.

Temos que

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad k \leq 2^n f(x) < k+1 \tag{90}$$

De (90), segue que $2^n f(x) = k + \varepsilon$; $0 \leq \varepsilon < 1$, daí k é a parte inteira de $2^n f(x)$, denotaremos $k = [|2^n f(x)|]$. Portanto,

$$\varphi_n(x) = \frac{[|2^n f(x)|]}{2^n}; \quad \text{para} \quad \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \tag{91}$$

Vamos mostrar que (89), satisfaz (a), (b) e (c).

(a) Fazendo

$$E_k = \left\{ x \in X; \ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \ \text{para} \ k = 0, 1, \ldots, (n\,2^n - 1).$$

$$E_k = \{ x \in X; \ f(x) \geq n \}, \ \text{para} \ k = n\,2^n.$$

Observamos que os conjuntos E_k; $k = 0, 1, \ldots, n\,2^n$ são disjuntos, pertencem a Sigma-álgebra $\mathbb{X}$, e tem união igual a X. Como

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n\,2^n} \left(\frac{k}{2^n} \right) \chi_{E_k}, \tag{92}$$

dá definição (2.1.2), concluímos que φ_n é simples e tem representação padrão (92) para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) Dado $x \in X$, temos:

(i) Se $f(x) \geq n+1$, então $f(x) > n$, o que implica

$$\varphi_n(x) = n < n+1 = \varphi_{n+1}(x) \implies \varphi_n(x) < \varphi_{n+1}(x)$$

(ii) Se $n \leq f(x) < n+1$, então

$$\varphi_n(x) = n \quad \text{e} \quad \varphi_{n+1}(x) = \frac{[|2^{n+1}f(x)|]}{2^{n+1}}$$

Como $n\,2^{n+1} \leq 2^{n+1}f(x) < (n+1)2^{n+1}$, segue que $[|2^{n+1}f(x)|] \geq n\,2^{n+1}$.

Portanto, $\varphi_{n+1}(x) \geq n = \varphi_n(x)$.

(iii) Se $f(x) < n$, então $f(x) < n+1$. Daí

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}\,; \quad 0 \leq k \leq n\,2^n - 1 \quad \text{e} \quad \varphi_{n+1}(x) = \frac{[|2^{n+1}f(x)|]}{2^{n+1}}$$

Lembremos que

$$f(x) < n \implies \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}; \quad 0 \leq k \leq n\,2^n - 1. \tag{93}$$

Calculando o ponto médio entre $\dfrac{k}{2^n}$ e $\dfrac{k+1}{2^n}$, obtemos $\dfrac{2k+1}{2^{n+1}}$.

Observando que

- Se $\dfrac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}$, então $2k \leq 2^{n+1}f(x) < 2k+1$.

  Portanto, $\varphi_{n+1}(x) = \dfrac{2k}{2^{n+1}} = \dfrac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$.

- Se $\dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \dfrac{2k+2}{2^{n+1}}$, então $2k+1 \leq 2^{n+1}f(x) < 2k+2$.

  Portanto, $\varphi_{n+1}(x) = \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} = \dfrac{2k}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+1}} = \varphi_n(x) + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

comcluímos que $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$.

De (i), (ii) e (iii), segue que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \;\; \forall \;\; x \in X$.

(c) Dado $x \in X$, temos:

(i) Se $f(x) = \infty$, então $\varphi_n(x) = n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Daí, $\lim \varphi_n(x) = \infty = f(x)$.

(ii) Se $f(x) < \infty$, então $\exists \;\; n_0 \in \mathbb{N};\; n > n_0 \Longrightarrow n > f(x)$. Assim, para $n > n_0$ e algum $0 \leq k \leq n\,2^n - 1$, segue que

$$k \leq 2^n f(x) < k + 1 \tag{94}$$

e, portanto,

$$2^n\, \varphi_n(x) = k \tag{95}$$

De (94) e (95), ficamos com

$$2^n\, \varphi_n(x) \leq 2^n f(x) < 2^n\, \varphi_n(x) + 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_n(x) \leq f(x) < \varphi_n(x) + \frac{1}{2^n} \tag{96}$$

Como a desigualdade (96) vale para valores arbitrariamente altos de n, passamos o limite e obtemos

$$\lim \varphi_n(x) \leq f(x) < \lim \varphi_n(x) \tag{97}$$

Portanto, $\lim \varphi_n(x) = f(x)$.

De (i) e (ii), segue que

$$\lim \varphi_n(x) = f(x) \text{ para cada } x \in X.$$

■

B Prova do Teorema (2.1.3)

Teorema 2.1.3 *Sejam $f, g \in L(X, \mathbb{X}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$. São validas as seguintes propriedades de integração à Lebesgue*

(i) $\displaystyle\int cf\, d\mu = c \int f\, d\mu.$

(ii) $\displaystyle\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$

(iii) *Seja $E = E_1 \cup E_2$, onde E_1, E_2 são conjuntos disjuntos em $\mathbb{X}$, então*

$$\int_E f\, d\mu = \int_{E_1} f\, d\mu + \int_{E_2} f\, d\mu$$

(iv) *Se $f \leq g$* q.t.p, *então* $\displaystyle\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu.$

(v) *Seja $f \in M^+(X, \mathbb{X})$. Então $f = 0$* q.t.p *se , e somente se,* $\displaystyle\int f\, d\mu = 0.$

Prova.

$(*)$ Sejam φ e ψ funções simples em $M^+(X, \mathbb{X})$ e $\alpha \geq 0$.

Pela definição (2.1.2), temos

$$\alpha\,\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha\, a_j\, \chi_{E_j}$$

Assim, da definição (2.1.3), segue que

$$\int \alpha\,\varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha\, a_j\, \mu(E_j) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(E_j) = \alpha \int \varphi\, d\mu \tag{98}$$

Da definição (2.1.2), φ e ψ tem representação padrão

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \chi_{E_j}; \qquad \psi = \sum_{i=1}^{m} b_i\, \chi_{F_i}$$

Então $\varphi + \psi$ tem uma representação

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_j + b_i)\, \chi_{E_j \cap F_i} \tag{99}$$

Vemos que (99) é uma combinação linear de funções características dos conjuntos disjuntos $E_j \cap F_i$, mas não é necessáriamente a representação padrão da função simples $\varphi + \psi$, uma vez que os valores $a_j + b_i$ podem não ser distintos.

Consideremos c_h ; $h = 1, \ldots, k$ os valores distintos do conjunto

$$\{a_j + b_i;\ j = 1, \cdots, n,\ \ i = 1, \cdots, m\}$$

Seja G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_i$ tais que $a_j + b_i = c_h$. Segue que a representação padrão de $\varphi + \psi$ é dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{k} c_h\, \chi_{G_h}, \tag{100}$$

onde $x \in G_h \implies \varphi(x) + \psi(x) = a_j + b_i = c_h$.

Também temos que

$$\mu(G_h) = \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_i), \tag{101}$$

onde a soma se estende a todos os j, i que satisfazem $E_j \cap F_i \subset G_h$.

De (100) e (101) vem que

$$\begin{aligned}\int (\varphi+\psi)\,d\mu &= \sum_{h=1}^{k} c_h\,\mu(G_h) = \sum_{h=1}^{k} c_h \sum_{(h)} \mu(E_j\cap F_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(a_j+b_i)\,\mu(E_j\cap F_i)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_j\,\mu(E_j\cap F_i) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_i\,\mu(E_j\cap F_i)\end{aligned}$$

Como $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = \bigcup_{i=1}^{m} F_i = X$, temos que $E_j = \bigcup_{i=1}^{m} E_j \cap F_i$ e $F_i = \bigcup_{j=1}^{n} F_i \cap E_j$, daí

$$\mu(E_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(E_j\cap F_i); \quad \mu(F_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j\cap F_i) \tag{102}$$

De (102), segue que

$$\int (\varphi+\psi)\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\mu(E_j) + \sum_{i=1}^{m} b_i\,\mu(F_i) = \int \varphi\,d\mu + \int \psi\,d\mu \tag{103}$$

($**$) Sejam $f_\circ$, $g_\circ$ pertencentes a $M^+(X,\mathbb{X})$ e $\alpha \geq 0$.

Pelo Lema (2.1.1), existem sequências monótonas crescentes de funções simples φ_n e ψ_n convergindo, respectivamente, para $f_\circ$ e $g_\circ$. Então, $\alpha\,\varphi_n$ é uma sequência monótona crescente que converge para $\alpha\,f_\circ$. Usando (98) e o Teorema da Convergência Monótona (2.1.1), obtemos

$$\int \alpha\, f_\circ\,d\mu = \lim \int \alpha\,\varphi_n\,d\mu = \alpha\,\lim \int \varphi_n\,d\mu = \alpha \int f_\circ\,d\mu \tag{104}$$

Temos também que $(\varphi_n+\psi_n)$ é uma sequência monótona crescente convergindo para $f_\circ + g_\circ$. Segue de (103) e do Teorema da Convergência Monótona (2.1.1) que

$$\int (f_\circ+g_\circ)\,d\mu = \lim \int (\varphi_n+\psi_n)\,d\mu = \int f_\circ\,d\mu + \int g_\circ\,d\mu \tag{105}$$

(i) Seja $c \in \mathbb{R}$.

Se $c \geq 0$, então

$$(c\,f)^+ = c\,f^+; \quad (c\,f)^- = c\,f^- \tag{106}$$

Usando (106) e (104), temos

$$\int c\,f\,d\mu = c\int f^+\,d\mu \,-\, c\int f^-\,d\mu = c\int f\,d\mu$$

Se $c < 0$, então

$$(c\,f)^+ = \max(0, c\,f) = -c\,f^-; \qquad (c\,f)^- = \max(0, -c\,f) = -c\,f^+, \tag{107}$$

Usando (107) e (104), temos

$$\int c\, f\, d\mu = \int -c\, f^-\, d\mu \;-\; \int -c\, f^+\, d\mu = c \int f\, d\mu$$

(ii) Observando que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad g = g^+ - g^-,$$

temos que $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Também temos que $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^-$, dessa forma ficamos com

$$(f^+ + g^+) - (f^- + g^-) = (f+g)^+ - (f+g)^- \tag{108}$$

De (108) vem que $(f^+ + g^+) + (f+g)^- = (f+g)^+ + (f^- + g^-)$. Dessa última igualdade e usando (105) ficamos com

$$\int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu + \int (f+g)^-\, d\mu = \int (f+g)^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu + \int g^-\, d\mu \tag{109}$$

De (109) segue que

$$\begin{aligned} \int (f+g)\, d\mu &= \int (f+g)^+\, d\mu - \int (f+g)^-\, d\mu \\ &= \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \end{aligned}$$

(iii) Pela definição de integral de Lebesgue e usando o item **(ii)**, temos

$$\begin{aligned} \int_E f\, d\mu &= \int f\, \chi_E\, d\mu = \int f\, (\chi_{E_1} + \chi_{E_2})\, d\mu \\ &= \int f\, \chi_{E_1}\, d\mu + \int f\, \chi_{E_2}\, d\mu \\ &= \int_{E_1} f\, d\mu + \int_{E_2} f\, d\mu \end{aligned}$$

(iv) Se $f_1, g_1 \in M^+(X, \mathbb{X})$ e $f_1 \leq g_1$, temos que

$$\int f_1\, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi_1\, d\mu;\; 0 \leq \varphi_1 \leq f_1 \right\},$$

$$\int g_1\, d\mu = \sup \left\{ \int \psi_1\, d\mu;\; 0 \leq \psi_1 \leq g_1 \right\},$$

onde φ_1 e ψ_1 são funções simples em X.

Observamos que

$$\varphi \in \left\{ \int \varphi_1 \, d\mu; \ 0 \leq \varphi_1 \leq f_1 \right\} \implies \varphi \in \left\{ \int \psi_1 \, d\mu; \ 0 \leq \psi_1 \leq g_1 \right\}$$

Portanto,

$$\left\{ \int \varphi_1 \, d\mu; \ 0 \leq \varphi_1 \leq f_1 \right\} \subset \left\{ \int \psi_1 \, d\mu; \ 0 \leq \psi_1 \leq g_1 \right\} \tag{110}$$

De (110), segue que

$$\sup \left\{ \int \varphi_1 \, d\mu; \ 0 \leq \varphi_1 \leq f_1 \right\} \leq \sup \left\{ \int \psi_1 \, d\mu; \ 0 \leq \psi_1 \leq g_1 \right\},$$

ou seja,

$$\int f_1 \, d\mu \leq \int g_1 \, d\mu \tag{111}$$

Seja $Z = \{x \in X; \ f(x) > g(x)\}$, segue que $\mu(Z) = 0$. Assim, usando o item **(iii)** e o teorema (2.1.2), temos

$$\int f \, d\mu = \int_{X \setminus Z} f \, d\mu + \int_Z f \, d\mu = \int_{X \setminus Z} f \, d\mu \tag{112}$$

De forma análoga a (112), temos

$$\int g \, d\mu = \int_{X \setminus Z} g \, d\mu \tag{113}$$

Como $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$, temos que

$$f \leq g \implies f^+ + g^- \leq g^+ + f^- \quad \forall \ x \in X \setminus Z$$

Usando (111), temos

$$\int_{X \setminus Z} (f^+ + g^-) \, d\mu \leq \int_{X \setminus Z} (g^+ + f^-) \, d\mu \tag{114}$$

Aplicando o item **(ii)** em (114), obtemos

$$\int_{X \setminus Z} f^+ \, d\mu - \int_{X \setminus Z} f^- \, d\mu \leq \int_{X \setminus Z} g^+ \, d\mu - \int_{X \setminus Z} g^- \, d\mu$$

ou seja,

$$\int_{X \setminus Z} f \, d\mu \leq \int_{X \setminus Z} g \, d\mu \tag{115}$$

De (112), (113) e (115), vem que

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

(v) Seja $f = 0$ q.t.p. Tomando $Z = \{x \in X;\ \ f(x) > 0\}$, segue que $\mu(Z) = 0$ e $f = 0$ em $X \setminus Z$. Usando o item **(iii)**, o teorema (2.1.2) e a definição (2.1.3), obtemos

$$\int f\,d\mu = \int_{X\setminus Z} f\,d\mu + \int_Z f\,d\mu = 0 \cdot \mu(X \setminus Z) + 0 = 0$$

Agora, seja $\displaystyle\int f\,d\mu = 0$. Tomemos $E_n = \{x \in X;\ f(x) > 1/n\}$, daí $f \geq \left(\frac{1}{n}\right)\chi_{E_n}$. Do item **(iv)**, vem que

$$0 = \int f\,d\mu \geq \left(\frac{1}{n}\right)\mu(E_n) \geq 0.$$

Segue que $\mu(E_n) = 0$, daí o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > 0\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ tem medida nula, portanto $f = 0$ q.t.p.

■

C Prova da Proposição (4.1.1)

Proposição 4.1.1 *Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços lineares normados sobre a norma*

$$\parallel f \parallel_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{para}\ \ f \in W^{m,p}(\Omega)$$

Prova. Sejam $f, g \in W^{m,p}(\Omega)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Segue da proposição (3.3.2) que

$$c_1 f + c_2 g \in W^{m,p}(\Omega),$$

daí $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço lenear.

Vamos provar que $\parallel \cdot \parallel_{m,p}$ satisfaz as propriedades (definição 1.4.3) de uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

(i) Como $\displaystyle\int_\Omega |D^\alpha f|^p\,dx \geq 0$ para cada α, tal que $|\alpha| \leq m$, segue que

$$\parallel f \parallel_{m,p} \geq 0 \quad \forall\ \ f \in W^{m,p}(\Omega)$$

.

(ii) Se $f = 0$ q.t.p, é fácil ver que $D^\alpha f = 0$ q.t.p para cada α, portanto $\parallel f \parallel_{m,p} = 0$.

Agora, se $\parallel f \parallel_{m,p} = 0$, então

$$\int_\Omega |D^\alpha f|^p\,dx = 0 \quad \forall\ \ |\alpha| \leq m \tag{116}$$

Em particular para $|\alpha| = 0$, segue de (116) que $\displaystyle\int_\Omega |f|^p \, dx = 0$, assim $f = 0$ q.t.p.

(iii) Seja $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$\| \, cf \, \|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |c|^p |D^\alpha f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \| \, f \, \|_{m,p}$$

(iv) Da expressão (35) na prova do teorema (2.2.2), temos

$$a^\beta b^{1-\beta} \leq \beta a + (1-\beta) b \tag{117}$$

onde $a, b \geq 0$ e $0 < \beta < 1$.

Sejam $1 < p, q < \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e x_k, y_k sequências de números reais. Provaremos que

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{118}$$

Vamos considerar

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} |y_k|^q > 0,$$

pois se algum desses termos for nulo, é fácil perceber que ocorrera a igualdade em (118).

Assim, para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, façamos

$$a_k = \frac{|x_k|^p}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{|y_k|^q}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q}$$

Fazendo $a = a_k$, $b = b_k$ e $\beta = \dfrac{1}{p}$ em (117), obtemos

$$\frac{|x_k|}{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_k|}{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q} \tag{119}$$

Como (119) vale para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, passamos a somatória com k variando de 0 a n na desigualdade (119) e obtemos

$$\frac{1}{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \cdot \sum_{k=0}^{n} |x_k||y_k| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{120}$$

Multiplicando a desigualdade em (120) por $\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, concluímos a prova da desigualdade em (118).

Agora vamos provar também que

$$\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{121}$$

onde x_k, y_k são sequências de números reais e $p \geq 1$.

Quando $\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p = 0$, a desigualdade (121) é trivial. O caso $p = 1$ segue da desigualdade triangular. Por isso, vamos considerar o caso $\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p > 0$ e $1 < p < \infty$. Assim, usando a desigualdade triangular em $|x_k + y_k|$, ficamos com

$$|x_k+y_k|^p = |x_k+y_k||x_k+y_k|^{p-1} \leq |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + |y_k||x_k+y_k|^{p-1} \tag{122}$$

Passando a somatória, com k variando de 1 até n, em (122) segue que

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p \leq \sum_{k=0}^{n}|x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=0}^{n}|y_k||x_k+y_k|^{p-1} \tag{123}$$

Tomando $q > 1$, de forma que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, aplicando a desigualdade (118) em (123), obtemos

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \tag{124}$$

Como $1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, multiplicando (124) por $\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{-\frac{1}{q}}$, obtemos a desiguldade em (121).

Usando a desiguldade de Minkowski (teorema 2.2.4) e a desigualdade (121), segue que

$$\begin{aligned}
\| f+g \|_{m,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_{\Omega}|D^{\alpha}f + D^{\alpha}g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\| D^{\alpha}f + D^{\alpha}g \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq m}(\| D^{\alpha}f \|_p + \| D^{\alpha}g \|_p)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\| D^{\alpha}f \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\| D^{\alpha}g \|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \| f \|_{m,p} + \| g \|_{m,p}
\end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova da propriedade (iv), o que garante que $\|\cdot\|_{m,p}$ é uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$

$\blacksquare$

Uma curiosidade interessante que vale a pena mensionar, é que as desigualdades (118) e (121) também são chamadas, respectivamente, de desigualdade de Holder e desigualdade de Minkowski.