



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANDERSON VASCONCELOS DE BARROS

O MODELO LOTKA - VOLTERRA

MACAPÁ

2018

ANDERSON VASCONCELOS DE BARROS

O MODELO LOTKA - VOLTERRA

Monografia apresentada à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso como exigência para aprovação e posterior obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Professor Doutor Guzmán Eulálio Isla Chamilco

MACAPÁ

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborado por Mara Patrícia Corrêa Garcia CRB2/1248

515.35

B277m

Barros, Anderson Vasconcelos de

O modelo Lotka-Volterra / Anderson Vasconcelos de Barros ;
orientador, Guzmán Eulálio Isla Chamico. - Macapá, 2018.

52 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Fundação
Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de
Licenciatura em Matemática.

1. Modelo predador-presa. 2. Equações diferenciais ordinárias.
3. Sistema autônomo. 4. Estabilidade. I. Isla Chamico, Guzmán
Eulálio, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá.
III. Título.

ANDERSON VASCONCELOS DE BARROS

O MODELO LOTKA - VOLTERRA

A banca examinadora abaixo relacionada aprova a Monografia defendida à mesma, como parte da exigência para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, na área de concentração em Matemática Aplicada e linha de pesquisa em Equações Diferenciais.

Macapá, junho de 2018.



Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Orientador - Universidade Federal do Amapá.

Prof. Dr. Ranon de Souza Gomes
1º Membro – Universidade Federal do Amapá.



Prof. Ms. Rômulo Lima da Gama.
2º Membro – Universidade Federal do Amapá.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sua infinita bondade, compaixão e misericórdia.

Aos meus pais, pelo apoio, carinho e dedicação na minha criação, que me fizeram chegar até aqui.

Aos meus irmãos, por sempre estarem do meu lado e me escutarem nos momentos em que precisei conversar.

RESUMO

Esta monografia tem como objetivo apresentar e fazer um breve estudo sobre um modelo matemático que ficou conhecido como Modelo Predador - Presa. Todavia, para se compreender tal estudo, é necessário ter um conhecimento prévio sobre equações diferenciais ordinárias e estabilidade de um sistema autônomo, que serão destacados no decorrer do trabalho. Para a realização dessa pesquisa foi feito um estudo bibliográfico.

Palavras-chave: Modelo Predador - Presa. Equações Diferenciais Ordinárias. Sistema Autônomo. Estabilidade.

ABSTRACT

This monograph aims to present and make a brief study on a mathematical model known as the Predator - Prey Model. However, to understand such a study, it is necessary to have prior knowledge about ordinary differential equations and stability of an autonomous system, which will be highlighted in the course of the work. A bibliographic study was carried out to carry out this research.

Keywords: Predator - Prey Model. Ordinary Differential Equations. Autonomous System. Stability.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	7
1 MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAIS	8
1.1 Modelagem Matemática	8
1.1.1 O que é um Modelo Matemático?	9
1.1.2 Modelagem Matemática	9
1.2 Dinâmica Populacional e Modelos Matemáticos	9
1.3 Definições Prévias	10
1.3.1 Derivadas	10
1.3.2 Derivada de Ordem Superior	12
1.3.3 Derivadas Parciais	12
1.3.4 Equações Diferenciais	13
1.3.4.1 Equações Diferenciais Ordinárias	14
1.3.4.2 Equações Lineares e Equações Não Lineares	14
1.3.4.3 Equações Diferenciais Ordinárias Separáveis	15
1.3.4.4 Equações Autônomas	16
1.4 Modelos Populacionais	16
1.4.1 Modelo de Malthus	16
1.4.2 Modelo de Verhulst	20
2 ESTUDO QUALITATIVO DE SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE	23

2.1	Sistema de Equações Lineares Algébricas, Autovalores e Autovetores . . .	23
2.1.1	Sistemas Lineares	23
2.1.2	Autovalores e Autovetores	24
2.2	Sistemas Autônomos	25
2.3	Sistemas Localmente Lineares	35
2.3.1	Aproximações Lineares de Sistemas Não Lineares	36
3	O MODELO LOTKA - VOLTERRA	38
3.1	Espécies em Competição	38
3.2	O Modelo Predador - Presa	39
3.2.1	Análise Qualitativa da Equação	40
	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52

INTRODUÇÃO

Este trabalho é resultado de uma pesquisa bibliográfica e tem como principal objetivo apresentar o Modelo Lotka - Volterra. Como subsídio preliminar, será mostrado um sucinto embasamento teórico de equações diferenciais.

No primeiro capítulo mencionam-se os primeiros modelos matemáticos para prever a variação da população, o Modelo de Malthus (Crescimento Exponencial) e o Modelo de Verhulst (Logístico). Antes disso, porém, faz-se uma breve definição sobre a modelagem matemática, primordial para a obtenção de tal modelo; e definições sobre a taxa de variação e derivadas de uma função e equações diferenciais.

No segundo capítulo estuda-se a estabilidade (ou instabilidade) de um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias, lineares ou não lineares, e o comportamento das soluções em torno de um ponto específico, denominado ponto crítico.

No terceiro capítulo é que será falado, de fato, sobre o Modelo Predador - Presa. Será feita a sua construção matemática através das hipóteses mais simples pertinentes à dinâmica da população de duas espécies interagindo entre si. E por fim, será analisada a estabilidade do sistema de equações referentes ao modelo citado.

1 MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAIS

Desde os primórdios da humanidade, o ser humano teve que aprender a viver com os recursos naturais existentes no mundo. Consoante ao passar do tempo, o homem mostra-se cada vez mais engenhoso para a solução de seus problemas com o mundo que o cerca.

As origens das ideias centrais da Matemática são o resultado de um processo para entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual se dão a partir de elaborações sobre representação do real, a qual chamamos de modelagem matemática.

A modelagem matemática, hoje em dia, é uma importante ferramenta no processo de ensino-aprendizagem, pois é ideal para a implantação de novas ideias, em que uma abordagem sobre um desconhecido assunto da matemática é ilustrada através de uma situação problema.

1.1 Modelagem Matemática

Diferentes autores definem a modelagem matemática a sua maneira, mas com uma mesma essência: transformar problemas em equações matemáticas e buscar a solução de tais problemas. Neste capítulo, a modelagem matemática será abordada de acordo com a visão de Bassanezi.

1.1.1 O que é um Modelo Matemático?

Segundo (BASSANEZI, 2013), modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.

Modelo é a representação em escala reduzida, de objeto a ser reproduzido em dimensões normais. Ou seja, o modelo sempre idealiza certa realidade. É algo que simplifica o mundo real. Logo, analisando um evento numa escala pequena, retêm-se informações de tal evento em maior escala. Todavia, é importante ressaltar que a análise desse modelo deve ser feita de forma rigorosa, através de um estudo dos dados.

1.1.2 Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática seria o ato de obter tal modelo, ou seja, um processo que transforma uma situação da realidade em uma expressão matemática. Segundo o dicionário, a palavra modelagem significa dar forma ou contorno a algo por meio de um modelo. Nesta perspectiva, a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. Assim, o modelo matemático é o que dá forma à solução do problema enquanto que a Modelagem Matemática é o processo de obtenção dessa solução. Nesta proposta, a resolução de problemas através da utilização de modelos matemáticos remete ao desenvolvimento da Matemática e de suas aplicações.

Tais definições supracitadas sintetizam o que se entende por modelagem matemática. Através desta, muitas fórmulas e equações matemáticas foram deduzidas, como, por exemplo, as equações predador-presa, objeto desse estudo. Além disso, a modelagem matemática é uma importante ferramenta na formulação de problemas envolvendo equações diferenciais.

1.2 Dinâmica Populacional e Modelos Matemáticos

Nesta seção, será feita uma breve apresentação dos primeiros estudos de modelos populacionais, atribuídos a Malthus e Verhulst. Para tanto, é necessário conhecer alguns conceitos pertinente à dinâmica de uma população.

População: entende-se como um conjunto de indivíduos de uma mesma espécie que residem em determinado território.

Taxa de natalidade: é o número de indivíduos que nascem em uma população em determinado intervalo de tempo.

Taxa de mortalidade: é o número de indivíduos que morrem em uma população, em determinado intervalo de tempo.

Taxa de crescimento: é o número dado pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade de uma população, em determinado intervalo de tempo.

Por fim, entende-se como dinâmica populacional o estudo da variação na quantidade de indivíduos de uma determinada população em vários tempos e espaços.

Nesse âmbito, os primeiros testes sobre a formulação de modelos matemáticos para traçar a dinâmica de uma população surgiram através do economista e demógrafo britânico Thomas Robert Malthus (1766 - 1834), onde, em 1798, publicou a obra “An Essay on the Principle of Population” (Um Ensaio sobre o Princípio da População). Para Malthus, a taxa de crescimento da população era proporcional à população a cada instante, o que significava dizer que a população crescia exponencialmente. Porém, Malthus não considerou que logo a população alcançaria números extremamente grandes em curtos intervalos de tempo, ou seja, tal modelo não previa uma limitação para o crescimento da população.

Coube então ao matemático belga Pierre François Verhulst (1804 – 1849) complementar as enunciações propostas por Malthus. Em seu modelo, Verhulst incorporou uma limitação ao crescimento populacional, de tal forma que reduzisse a taxa de crescimento e impedisse o crescimento exponencial. Verhulst pressupôs que não havia possibilidade de uma população crescer de forma indefinida, conforme proposto por Malthus; ao contrário, existiam impedições da natureza que tenderiam a manter a população fixa após determinado intervalo de tempo. O modelo logístico (de Verhulst) é o mais apropriado para estimar o crescimento populacional.

1.3 Definições Prévias

Para se fazer a análise matemática dos modelos mencionados, é necessário entender antes algumas definições matemáticas preliminares. Nesta seção será feito um breve estudo sobre derivadas e equações diferenciais.

1.3.1 Derivadas

Suponha duas quantidades desconhecidas, x e y , e que y depende de x . Ou seja, tem-se uma função $y = f(x)$. Se x variar de x_1 para x_2 , a variação de x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Então, y deve variar de y_1 para y_2 , ou seja,

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Como $y = f(x)$, tem-se

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente entre as variações de y e x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é chamado **taxa média de variação** de y em relação a x , em (x_1, x_2) .

A **taxa instantânea de variação** em $x = x_1$, é dada por

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Definição 1

Seja I um intervalo aberto, e

$$\left\{ \begin{array}{l} f : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) \end{array} \right.$$

uma função. A derivada de f em x_0 , $x_0 \in I$, é

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

se o limite existir.

Ou de forma alternativa, podemos escrever

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Notações para derivada:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x_0)}{dx}, f'(x_0).$$

Exemplo: Calcule a derivada da função $f(x) = x^2$

Solução

Calculando o limite, tem-se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2x$$

Observa-se que o conceito de taxa de variação instantânea está intimamente ligado ao de derivada. O estudo de taxa de variação é bastante utilizado em diversas áreas, como, por exemplo, na Física, para se calcular a velocidade instantânea de um objeto em movimento; ou na Geografia para calcular a taxa de crescimento populacional de um país. Tanto a velocidade instantânea como a taxa de crescimento populacional são encontradas através do cálculo de derivadas num determinado ponto.

1.3.2 Derivada de Ordem Superior

Se uma função f é derivável, então f' também é uma função. Caso a função f' seja derivável, a derivada de f' , denotada por f'' , é chamada de derivada segunda de f . De um modo geral, a derivada n -ésima da função f , denotada por $f^{(n)}$, é a derivada da função $f^{(n-1)}$.

1.3.3 Derivadas Parciais

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Para y_0 fixo pode se considerar a função g de uma variável real dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

A derivada desta função no ponto $x = x_0$, caso exista, é dita **derivada parcial de f em relação a x , no ponto (x_0, y_0)** e denota-se por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Assim,

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De acordo com a definição de derivada, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Analogamente, define-se **derivada parcial de f em relação a y , no ponto (x_0, y_0)** , denotada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Portanto, para calcular a derivada parcial da função $z = f(x, y)$ em relação a uma das variáveis, fixa-se a outra, fazendo assim com que ela torne-se uma constante.

Exemplo 1: Seja $f(x, y) = \cos xy$. Determine as suas derivadas parciais.

Solução

Fixando y , ou seja, olhando y como uma constante, deriva-se em relação a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y \sin xy$$

De modo análogo, fixando x , deriva-se em relação a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin xy$$

1.3.4 Equações Diferenciais

Muitos problemas que ocorrem nas ciências naturais (Física, Química e Biologia), engenharia, ciências sociais, etc., envolvem a modelagem matemática, que resulta, muitas vezes, numa equação diferencial, ou seja, requerem obter uma função que satisfaça uma determinada equação que contém derivadas da “função-incógnita”.

Uma **equação diferencial** é uma equação que contém uma ou mais variáveis de-

pendentes e suas derivadas. Além disso, possui também pelo menos uma variável independente. Se a função desconhecida depende de uma única variável independente, então se tem uma **equação diferencial ordinária**; caso possua mais de uma variável independente, então a equação se chamará **equação diferencial parcial**.

Ordem: A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.

1.3.4.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Em geral, uma equação diferencial ordinária (EDO) assume a forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1)$$

onde $y = y(x)$ é a variável dependente, x é a variável independente e n é a ordem da equação.

Exemplo: A equação

$$m \frac{d^2 U(t)}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} = -g$$

é uma equação diferencial ordinária, em que $U(t)$ é a variável dependente, t é a variável independente, e $\frac{d^2 U(t)}{dt^2}$ é a derivada (de 2ª ordem).

Outra classificação importante de equações diferenciais depende do número de funções desconhecidas. Se existe uma única função a ser determinada, uma equação é o suficiente. Porém, se existem duas ou mais funções que devem ser encontradas, então precisa-se de um sistema de equações.

1.3.4.2 Equações Lineares e Equações Não Lineares

A equação diferencial

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é dita **linear** se F é uma função linear das variáveis $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

A equação diferencial ordinária linear geral é da forma

$$a_n(x) \cdot y^n(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{n-1}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x) \quad (2)$$

onde $a_i(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas, $i = (0, 1, 2, \dots, n)$. Caso a EDO não assuma a

forma (2) acima, ela é dita **não linear**.

Soluções.

Uma solução da EDO (1) no intervalo $\alpha < x < \beta$ é uma função ϕ , tal que $\phi', \phi'', \dots, \phi^n$ existem e satisfazem

$$\phi^n(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x))$$

para todo x em $\alpha < x < \beta$.

Por exemplo, as funções $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ são soluções da equação

$$y'' + y = 0,$$

pois satisfazem a equação diferencial dada.

Não existe um método universal para encontrar a solução de uma EDO em termos de funções elementares para uma função arbitrária f . Entretanto, existem alguns métodos aplicáveis a determinadas subclasses de uma EDO para encontrar sua solução. Será apresentado aqui um tipo de equação diferencial que será bastante útil no decorrer deste trabalho, as **equações separáveis**.

1.3.4.3 Equações Diferenciais Ordinárias Separáveis

Equações que podem assumir a forma geral

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0$$

são ditas Equações Diferenciais Ordinárias de Variáveis Separáveis, ou simplesmente equações separáveis.

Para equações deste tipo, existe uma regra prática de resolução. Veja através de um exemplo.

Exemplo: Encontrar a solução da EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{1+y}$$

para $y \neq -1$.

Resolução:

Primeiramente, faz-se a separação das variáveis. Logo, tem-se:

$$(1 + y)dy = (1 + x)dx$$

Agora, basta integrar em ambos os lados da igualdade, uma em relação à y e outra em relação a x :

$$\int (1 + y)dy = \int (1 + x)dx$$

Calculando as integrais, tem-se

$$\frac{y^2}{2} + y = \frac{x^2}{2} + x + k,$$

onde k é uma constante de integração positiva.

1.3.4.4 Equações Autônomas

Uma classe importante de equações diferenciais consiste naquelas em que a variável independente não aparece explicitamente. Tais equações são ditas autônomas.

Exemplo:

$$5t^2 \frac{dx}{dt} - e^{\lambda t} \frac{dx}{dt} = x \sin \omega t$$

1.4 Modelos Populacionais

Na seção anterior foram definidos conceitos necessários para o entendimento do comportamento, isto é, da taxa de variação, seja de crescimento ou declínio, de uma população. No entanto, será apresentado e construído agora o modelo que ficou conhecido por ser o pioneiro a tratar da dinâmica de uma população isolada, o Modelo de Malthus; e o Modelo de Verhulst, também chamado Modelo Logístico, que é uma adaptação do Modelo de Malthus.

1.4.1 Modelo de Malthus

O modelo malthusiano parte do princípio que a taxa segundo qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população do país nesse mesmo

instante. Partindo desse pressuposto, vamos construir matematicamente o Modelo de Malthus, também conhecido como Modelo de Crescimento Exponencial.

Seja N a variável que indica a quantidade de uma população. Então $N(t)$ é a função que permite calcular o número de indivíduos da população no instante t , $t > 0$. Tem-se ainda $N(0) = N_0$ indicando o ponto de partida para o estudo da população, ou seja, o número de indivíduos no instante em que se começou a fazer a análise.

Para o crescimento de uma população têm-se os seguintes fatores:

- (i) A população aumenta devido ao nascimento e diminui devido às mortes;
- (ii) A população aumenta quando novos indivíduos chegam (processo de imigração) e diminui quando indivíduos residentes partem (processo de emigração).

Consideremos as variáveis B , D , I e E , onde:

- B é o número de nascimentos
- D é o número de mortes
- I é o número de imigrantes
- E é o número de emigrantes.

Considere também o intervalo de tempo $(t, t + 1)$ e $\Delta N = N(t + 1) - N(t)$, onde ΔN é a variação da população. Então

$$\Delta N = (B - D) + (I - E)$$

Para uma população fechada, isto é, para $I = E = 0$, tem-se

$$N(t + 1) = N(t) + (B - D)$$

Para um tempo t pequeno, a função $N(t)$ é contínua. Então, a taxa de variação instantânea da população é dada por

$$\frac{dN}{dt} = B - D$$

Fazendo $B = bN$ e $D = dN$, onde b e d são, respectivamente, as taxas instantâneas de nascimento e mortalidade, tem-se

$$\frac{dN}{dt} = (b - d) N$$

Chamando $r = b - d$, segue a equação

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (I)$$

Se $r > 0$, então é chamada de **taxa de crescimento**. Caso $r < 0$, então r será chamado de **taxa de declínio**. Suponhamos que $r > 0$, de modo que a população está crescendo. Teremos o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (II)$$

Resolvendo este PVI usando separação de variáveis, tem-se:

$$\frac{dN}{N} = r dt$$

Integrando em ambos os lados

$$\int \frac{dN}{N} = \int r dt$$

o que implica em

$$\ln |N| = rt + k$$

Se $N > 0$,

$$N = e^{rt+k}$$

logo,

$$N = e^{rt} \cdot e^k$$

Fazendo $C = e^k$, segue que a solução geral da equação é

$$N(t) = Ce^{rt}$$

Sujeitando à condição inicial

$$N(0) = N_0$$

encontra-se $C = N_0$.

A solução do PVI é

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

Fazendo um breve resumo da análise da solução do PVI:

- Se $r > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$ ou seja, a população cresce de forma ilimitada;
- Se $r < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$, ou seja, a população sofre uma taxa de declínio;
- Se $r = 0$, então $\lim_{t \rightarrow 0} N(t) = N_0$, ou seja, a população se mantém constante.

Assim, o modelo que consiste no PVI (II), sob condições ideais, é razoavelmente preciso para muitas populações, pelo menos por períodos de tempo limitados. Entretanto, é claro que tais condições ideais não podem continuar indefinidamente; em algum momento um determinado fator natural, tal como limitação do espaço, suprimento de comida ou de outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e terminará com o crescimento exponencial ilimitado.

Para um tempo t muito grande, tem-se o modelo discreto:

$$\Delta N = r_d \cdot N$$

onde r_d é a taxa de crescimento populacional discreto.

Logo, chega-se a seguinte equação:

$$N(t+1) - N(t) = r_d \cdot N(t)$$

Reescrevendo a equação, tem-se

$$N(t+1) = (1 + r_d) \cdot N(t)$$

Chamando $\lambda = 1 + r_d$, encontramos a equação

$$N(t+1) = \lambda \cdot N(t)$$

Esta equação sujeita à condição inicial $N(0) = N_0$, tem como solução do modelo discreto

$$N(t) = \lambda^t \cdot N_0$$

1.4.2 Modelo de Verhulst

Para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento da população depende, de fato, da população, Verhulst modificou o Modelo de Malthus de tal forma que a população cresceria até um limite máximo suportado, tendendo a se estabilizar. Para isso, Verhulst, substituiu r na equação (I), por uma função $h(y)$, obtendo assim, a equação modificada

$$\frac{dN}{dt} = h(N) \cdot N \quad (III)$$

Agora queremos escolher $h(N)$, tal que $h(N) \cong r > 0$ quando N é pequeno. $h(N)$ diminui quando N aumenta e $h(N) < 0$ quando N é suficiente grande. A função mais simples que tem essas propriedades é, segundo Boyce

$$h(N) = r - \frac{aN}{r} \quad (IV)$$

onde a é uma constante positiva.

Substituindo (IV) em (III), obtemos

$$\frac{dN}{dt} = \left(r - \frac{aN}{r} \right) \cdot N$$

A equação acima é conhecida como equação logística.

Fazendo $K = \frac{r^2}{a}$, tem-se

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) \cdot N.$$

Reescrevendo a equação, chegamos em

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (V)$$

onde r é chamada de taxa de crescimento intrínseca, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador; e K é o nível de saturação ou **capacidade de sustentação ambiental**.

De (V), usando separação de variáveis, tem-se:

$$\frac{dN}{N \cdot \left(1 - \frac{N}{K} \right)} = r dt$$

Quebrando em frações parciais a expressão à esquerda da igualdade, obtém-se:

$$\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N}\right) dN = r dt$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N}\right) dN = \int r dt$$

o que implica em

$$\ln |N| - \ln |K - N| = rt + C_0$$

onde C_0 é uma constante arbitrária de integração a ser determinada pela condição inicial $N(0) = N_0$. Observa-se que, se $0 < N_0 < C_0$, então N permanece nesse intervalo para todo o tempo. Assim, podemos retirar do módulo o logaritmando, e usando as propriedades de logaritmo, chegamos em

$$\ln \left(\frac{N}{K - N}\right) = rt + C_0$$

Daí,

$$\frac{N}{K - N} = e^{rt+C_0}$$

Logo,

$$N(t) = (K - N(t)) e^{rt+C_0}$$

implicando em

$$N(t) = (K - N(t)) e^{rt} \cdot e^{C_0}$$

Fazendo $A = e^{C_0}$, segue

$$N(t) = K \cdot A e^{rt} - A \cdot N(t) \cdot e^{rt}$$

Portanto,

$$N(t) + A \cdot N(t) e^{rt} = A \cdot K e^{rt}$$

Explicitando $N(t)$, conclui-se que

$$N(t) = \frac{A \cdot K e^{rt}}{1 + A e^{rt}}$$

Dividindo o numerador e o denominador da equação anterior por Ae^{rt} , chega-se em

$$N(t) = \frac{K}{\frac{1}{A} \cdot e^{-rt} + 1} \quad (VI)$$

Submetendo (VI) à condição inicial $N(0) = N_0$, chega-se em

$$A = \frac{N_0}{K - N_0}$$

Logo, a solução geral de (VI) é

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)e^{-rt} + 1}$$

Se $N_0 > 0$ e $t \rightarrow \infty$ na equação acima, teremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$$

Assim, para cada $N_0 > 0$, a solução tende à capacidade de suporte. Depois de muito tempo a população está próxima do seu nível de saturação, independentemente do tamanho inicial da população.

2 ESTUDO QUALITATIVO DE SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE

Neste capítulo será feito um estudo qualitativo de sistemas autônomos de equações diferenciais ordinárias, que nos darão o embasamento teórico necessário para a apresentação, e posterior análise, do modelo Lotka – Volterra (Predador - Presa), no próximo capítulo.

2.1 Sistema de Equações Lineares Algébricas, Autovalores e Autovetores

Para resolver sistemas lineares de equações diferenciais precisamos, antes, definir alguns resultados importantes da álgebra linear.

2.1.1 Sistemas Lineares

Um conjunto de n equações algébricas lineares simultâneas em n variáveis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

pode ser escrito como

$$Ax = B \quad (2)$$

onde A é a matriz $n \times n$ e B um vetor. As componentes de x devem ser determinadas. Se $B = 0$ o sistema é dito **homogêneo**. Caso contrário, ele é dito **não homogêneo**.

Se a matriz dos coeficientes A for invertível, isto é, se $\det(A) \neq 0$, então o sistema

(2) terá uma única solução.

Definição 1 (Independência Linear)

Um conjunto de k vetores v_1, v_2, \dots, v_k é dito **linearmente independente** se existe um conjunto de números complexos, c_1, c_2, \dots, c_k , nem todos nulos, tais que

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0 \quad (3)$$

O único conjunto $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ que satisfaz (3) é $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Logo, diz-se que v_1, \dots, v_k são linearmente independentes.

2.1.2 Autovalores e Autovetores

A equação

$$Ax = y \quad (4)$$

pode ser vista como uma transformação linear que transforma um vetor dado x em um novo vetor y . Para encontrar tais vetores, toma-se $y = \lambda x$, onde λ é um escalar. Assim procuram-se soluções da equação

$$Ax = \lambda x \quad (5)$$

ou, de forma equivalente

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (6)$$

A última equação tem soluções não nulas se, e somente se, λ for escolhido de modo que

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (7)$$

Os valores de λ que satisfazem (7) são chamados **autovalores** da matriz A , e as soluções não nulas associadas àquele autovalor são chamados de **autovetores**.

A equação (7) é uma equação polinomial de grau n em λ , de modo que existem n autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dos quais alguns podem ser repetidos. Se um determinado autovalor aparece m vezes como raiz da equação (7), então ele é dito de **multiplicidade algébrica** m . Cada autovalor tem pelo menos um autovetor associado, e um autovalor de multiplicidade algébrica m pode ter q autovetores linearmente independentes, onde $1 \leq q \leq m$.

2.2 Sistemas Autônomos

O estudo qualitativo de um sistema autônomo consiste em analisar o comportamento da solução do sistema numa vizinhança do ponto de equilíbrio.

Definição 2

O sistema

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (8)$$

é dito **sistema autônomo**, pois a variável independente t não aparece explicitamente.

Exemplo 1: O sistema de EDO's lineares com coeficientes constantes

$$x' = Ax$$

- Em \mathbb{R} : $x' = ax, f(x) = ax$
- Em \mathbb{R}^2 : $\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$

Definição 3

O ponto $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ é dito ponto de equilíbrio ou ponto crítico do sistema autônomo (8) se $x' = (0, 0, \dots, 0)$, ou $x'_i = \frac{dx_i}{dt} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 2: A EDO

$$x' = -x - 2$$

tem como ponto de equilíbrio $x^* = -2$, pois

$$x' = 0 \Rightarrow -x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

.

Será feita uma breve análise da equação acima em torno de condições iniciais nas vizinhanças do ponto equilíbrio.

Primeiramente, encontrar-se-á a solução da EDO em questão. Colocando a equação na forma diferencial, tem-se:

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2$$

Fazendo a separação de variáveis, chega-se em

$$\frac{dx}{x+2} = -dt$$

integrando em ambos os lados

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int -dt$$

o que implica em

$$\ln|x+2| = -t + c$$

Logo,

$$x+2 = e^{-t+c}$$

Explicitando $x(t)$ segue

$$x(t) = e^{-t} \cdot e^c - 2$$

Fazendo $A = e^c$, encontramos a solução geral

$$x(t) = A \cdot e^{-t} - 2 \quad (9)$$

Submetendo (9) à condição inicial $x(0) = -2$, obtém-se

$$x(0) = A \cdot e^{-0} - 2 = -2$$

o que implica $A = 0$. Logo, a solução do PVI

$$\begin{cases} x' = -x - 2 \\ x(0) = -2 \end{cases}$$

será

$$x_1(t) = -2$$

Observe também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = -2$$

Do mesmo modo, para a condição inicial $x(0) = 0$, encontra-se $A = 2$, e a solução ficará

$$x_2(t) = 2 \cdot e^{-t} - 2$$

Note também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = -2$$

Para a condição inicial $x(0) = 2$, tem-se $A = 4$ e a solução será

$$x_3(t) = 4 \cdot e^{-t} - 2$$

Veja que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = -2$$

Para a condição inicial $x(0) = 1$, tem-se $A = 3$, de modo que a solução ficará

$$x_4(t) = 3 \cdot e^{-t} - 2$$

Observe novamente que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_4(t) = -2$$

Para a condição $x(0) = -4$, tem-se $A = -2$. A solução será

$$x_5(t) = -2e^{-t} - 2$$

e ainda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_5(t) = -2$$

Se $x(0) = -5$, então $A = -3$, e a solução geral será

$$x_6(t) = -3 \cdot e^{-t} - 2$$

Tem-se então que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_6(t) = -2$$

Para a condição inicial $x(0) = -6$, tem-se $A = -4$. Logo, a solução será

$$x_7(t) = -4 \cdot e^{-t} - 2$$

Veja mais uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_7(t) = -2$$

Observe como se comporta o gráfico das soluções dos PVI's acima

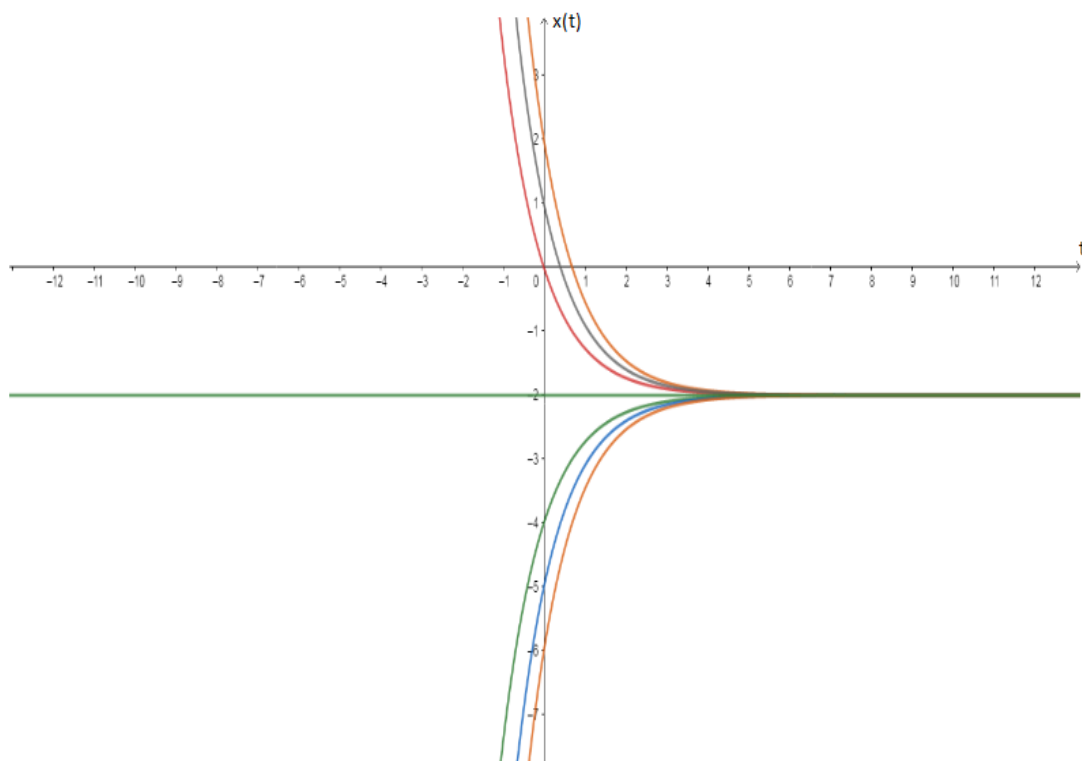


Figura 1: Trajetórias das soluções dos PVI's

Perceba que, à medida que o tempo aumenta, as soluções dos PVI's em torno do ponto $t = 0$ vão se aproximando da reta $x(t) = -2$. Ou seja, existe o que chama-se de **estabilidade**.

Um ponto de equilíbrio recebe as seguintes classificações: **estável**, **assintoticamente estável** e **instável**.

Em suma, um ponto de equilíbrio é:

- **estável** se, para qualquer condição inicial na sua vizinhança, a trajetória da solução correspondente permanecer próxima desse ponto;
- **assintoticamente estável**, se for estável e a trajetória se aproximar do ponto quando $t \rightarrow \infty$.
- **instável**, se não for estável.

Considere o caso bidimensional mais simples: um sistema linear homogêneo de segunda ordem com coeficientes constantes

$$x' = A \cdot x \quad (10)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (11)$$

A solução do sistema (11) é dada por

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2 \quad (12)$$

onde $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, c_1 e c_2 são constantes reais, λ_1 e λ_2 são autovalores da matriz A e v_1 e v_2 são autovetores associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente.

O único ponto de equilíbrio do sistema (11) é $x^* = (0, 0)$.

Em geral, supondo que A é invertível, ou seja, $\det(A) \neq 0$, o sistema de EDO linear homogêneo (11) tem por ponto de equilíbrio $x^* = (0, 0)$.

Consideremos os seguintes casos:

1º caso: Autovalores Reais e Distintos e de Mesmo Sinal

A solução geral da equação (11) é

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

onde λ_1 e λ_2 são ambos positivos ou negativos.

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

independentemente dos valores de c_1 e c_2 . Isso significa que à medida que o tempo aumenta, as soluções se aproximam do ponto crítico na origem. Então, tem-se **estabilidade**.

Observe que se $\lambda_1 < \lambda_2$, então $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, ou seja, a parcela $c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ mais rápido que o termo $c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$. Ou seja, se $t \rightarrow \infty$, então $x(t) \rightarrow c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$.

Esse tipo de ponto crítico é chamado de **nó atrator**.

Veja como se comporta num plano de fases tal ponto de equilíbrio:

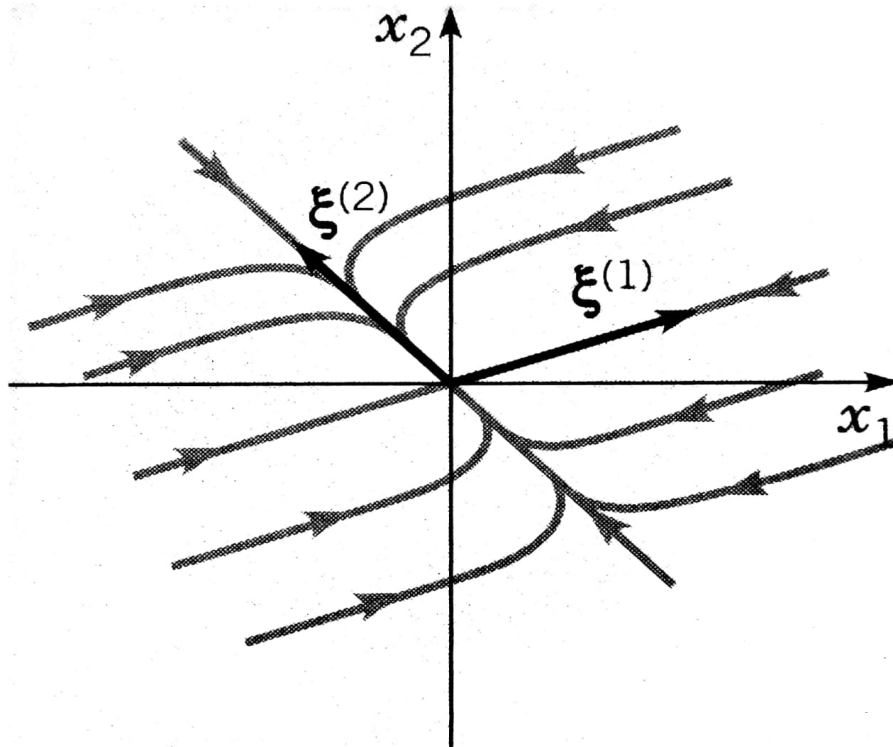


Figura 2: Nó atrator; $\xi^1 = v_1$, $\xi^2 = v_2$ são autovetores.
Fonte [2]

- $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$$

Nesse caso, para tempos elevados, as trajetórias têm o mesmo padrão que na Figura 2, porém afastam-se do ponto de equilíbrio em sentido contrário.

Esse ponto crítico é chamado também de **nó** ou **fonte**.

2º caso: Autovalores Reais com Sinais Opostos

A solução geral da equação (11) é

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

Neste caso, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Se $t \rightarrow +\infty$, então $x(t) \rightarrow c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2 \rightarrow +\infty$

Se $t \rightarrow -\infty$, então $x(t) \rightarrow c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 \rightarrow +\infty$.

Esse ponto de equilíbrio se chama **ponto de sela**.

Assim, quando o tempo aumenta, as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio na

direção do vetor v_1 . De modo análogo, se o tempo diminui, as trajetórias se afastam da origem seguindo a direção de v_2 .

Veja as trajetórias num plano de fase:

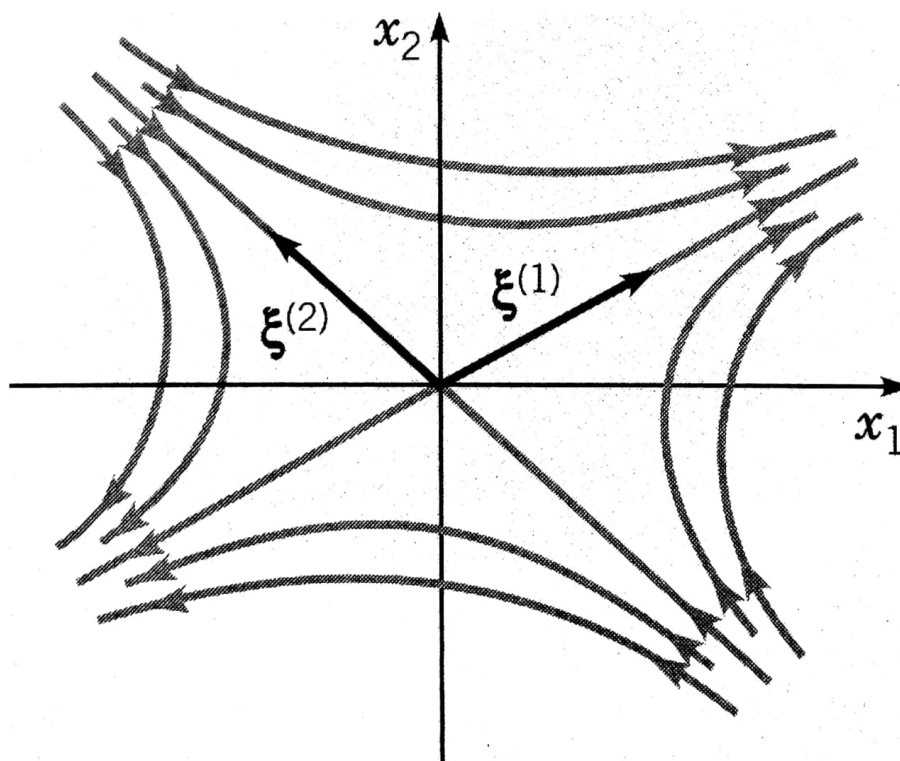


Figura 3: Ponto de Sela; $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ $\xi^1 = v_1, \xi^2 = v_2$
Fonte [2]

3º caso: Autovalores Reais e Iguais

Supondo agora $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, e considerando que os autovalores são negativos [se forem positivos, as trajetórias são semelhantes, mas o movimento é em sentido contrário]. Têm-se os seguintes subcasos:

1. **Dois autovetores independentes:** A solução geral do sistema (10) é

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

onde v_1 e v_2 são autovetores independentes.

- Se $\lambda < 0$:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow x(t) \rightarrow +\infty$$

As trajetórias se aproximam do ponto de equilíbrio à medida que o tempo aumenta. Esse ponto de equilíbrio recebe o nome de **nó próprio**.

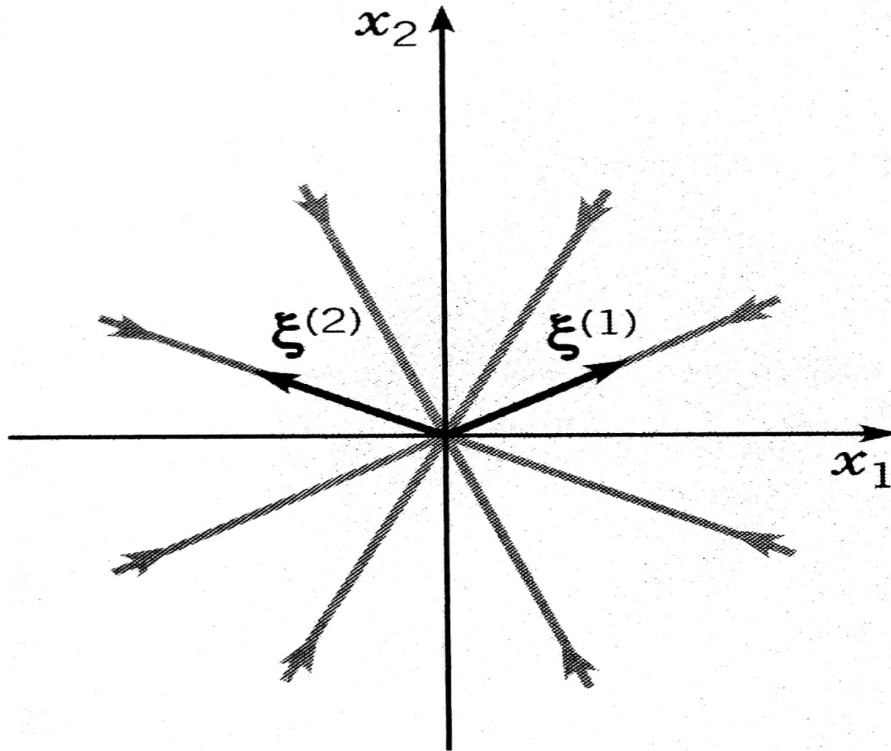


Figura 4: Nó Próprio. $\xi^1 = v_1$, $\xi^2 = v_2$
 Fonte: [2]

- Se $\lambda > 0$, as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio no sentido oposto.

2. **Um autovetor independente:** A solução geral do sistema (10) é

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot v + c_2 \cdot (t \cdot e^{\lambda t} \cdot v + u \cdot e^{\lambda t})$$

onde \mathbf{v} é o autovetor e \mathbf{u} é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Para t grande, o termo dominante na equação é $c_2 \cdot e^{\lambda t} \cdot v$.

Assim, se $\lambda < 0$, segue que

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow x(t) \rightarrow c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t} \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow x(t) \rightarrow +\infty$$

Portanto, para tempos elevados, as trajetórias tendem à origem, ou seja, aproximam-se do ponto de equilíbrio, na direção do vetor v . Se $\lambda > 0$, o sentido das trajetórias

seria oposto. Quando um autovalor duplo tem um único autovetor independente, o ponto crítico é chamado de **nó impróprio** ou **degenerado**.

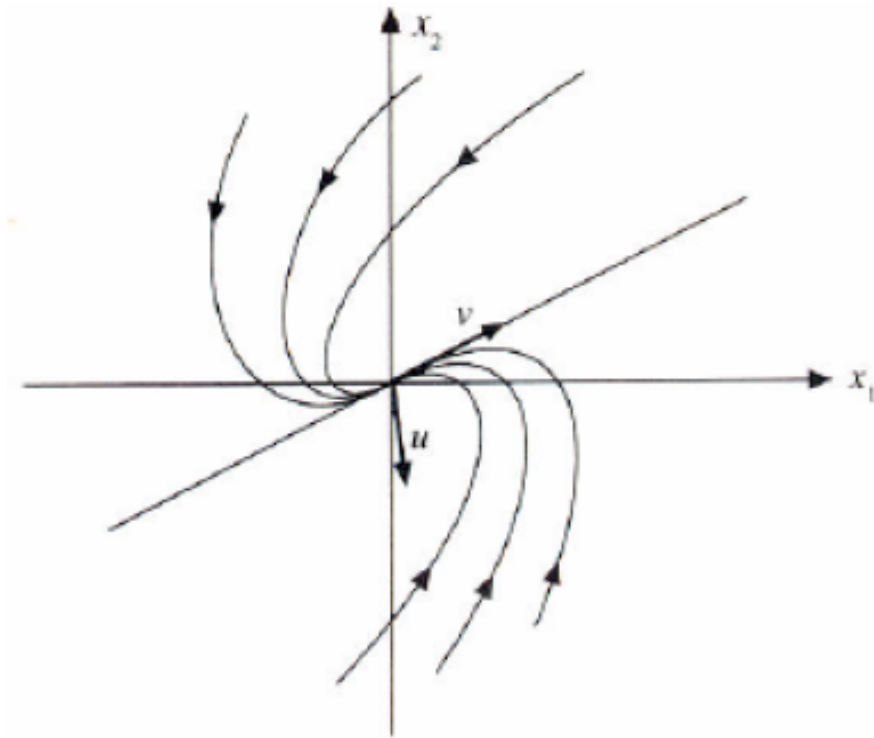


Figura 5: Nó Impróprio: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
Fonte: [5]

4º caso: Autovalores Complexos

Supondo agora que os autovalores têm a forma $\lambda = \alpha \pm i\beta$, onde α e β são reais, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$ e $v = (\alpha \pm i\beta)$. Neste caso, a solução geral de (10) é

$$x(t) = e^{\alpha t} \cdot [(c_1 \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot \sin(\beta t)) a + (-c_1 \cdot \sin(\beta t) + c_2 \cdot \cos(\beta t)) b]$$

Se $\alpha < 0$:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow x(t) \rightarrow +\infty$$

À medida que o t aumenta, as trajetórias aproximam-se cada vez mais do ponto de equilíbrio em forma de espiral. O ponto de equilíbrio é denominado **foco**.

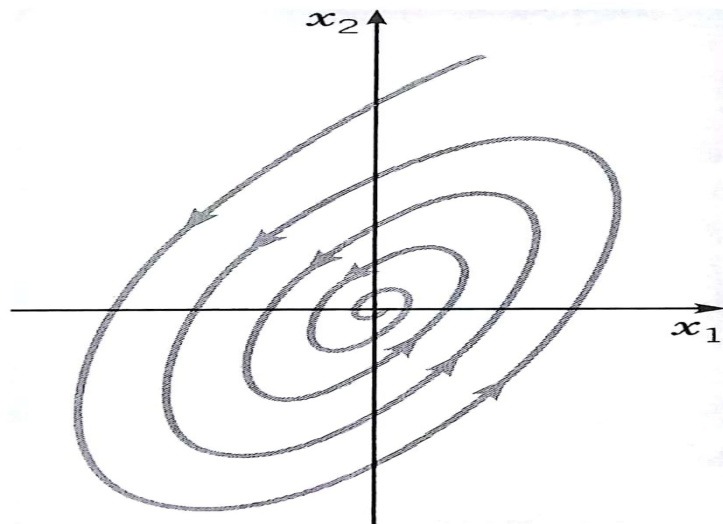


Figura 6: Ponto Espiral ou Foco; $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$
 Fonte: [2]

Para $\alpha > 0$, a trajetória teria sentido oposto.

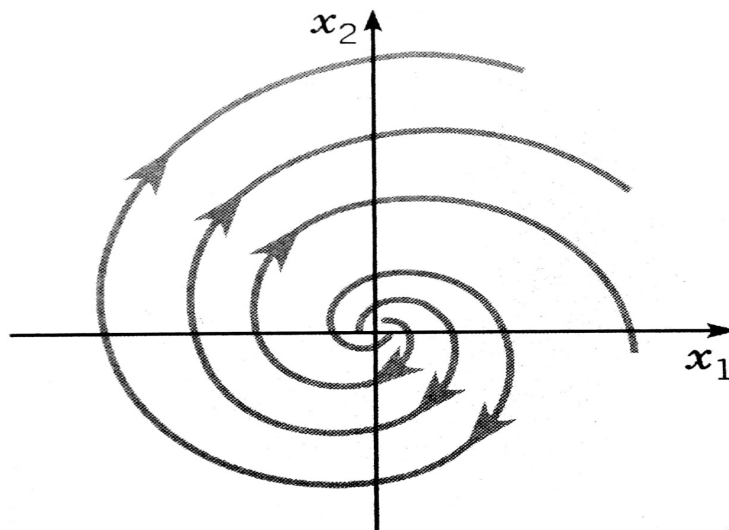


Figura 7: Ponto Espiral ou Foco; $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$
 Fonte: [2]

5º caso: Autovalores Imaginários Puros

Os autovalores tem a forma $\lambda = \pm i\beta$.

Nesse caso, a solução do sistema (10) se reduz a

$$x(t) = [(c_1 \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot \sin(\beta t)) a + (-c_1 \cdot \sin(\beta t) + c_2 \cdot \cos(\beta t)) b]$$

As trajetórias orbitam ao redor do ponto de equilíbrio, por isso, ele recebe o nome de *centro*.

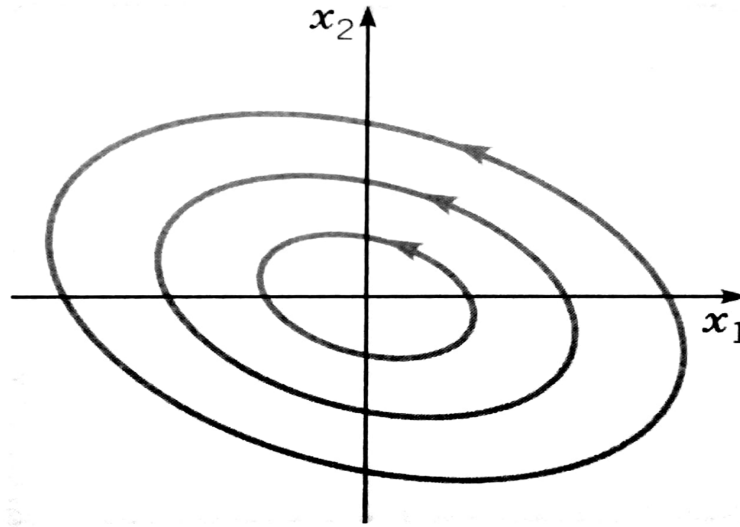


Figura 8: Centro; $\lambda = \pm i\beta$
Fonte: [2]

Em geral, quando os autovalores são imaginários puros é possível mostrar que as trajetórias são elipses centradas na origem.

2.3 Sistemas Localmente Lineares

Na subseção anterior, vimos as propriedades de estabilidade da solução de equilíbrio $x = (0, 0)$ do sistema linear bidimensional

$$x' = A \cdot x.$$

Em tal caso, foi suposto que $\det(A) \neq 0$, o que implicava na unicidade do ponto de equilíbrio $x = (0, 0)$. Assim, podemos enunciar o teorema a seguir.

Teorema: *O ponto crítico $x = (0, 0)$ do sistema linear $x' = A \cdot x$ é: **assintoticamente estável** se os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e negativos ou tem parte real negativa; **estável**, mas não assintoticamente estável se λ_1 e λ_2 são imaginários puros; **instável**, se λ_1 e λ_2 são reais e um deles é positivo, ou se ambos têm parte real positiva.*

2.3.1 Aproximações Lineares de Sistemas Não Lineares

Considere agora, um sistema autônomo bidimensional não linear

$$x' = f(x) \quad (13)$$

Será investigado o comportamento das trajetórias do sistema (13) perto de um ponto de equilíbrio x^* . Lembrando que perto de cada ponto crítico de um sistema não linear o padrão das trajetórias é parecido com o das trajetórias de um determinado sistema linear. Logo, perto de um ponto crítico pode-se aproximar o sistema não linear (13) por um sistema linear apropriado, cujas trajetórias sejam fáceis de descrever.

É conveniente escolher um ponto crítico como a origem. Isso não envolve perda de generalidade, pois se $x^* \neq 0$, é sempre possível fazer a substituição $u = x - x^*$ na equação (13). Então u satisfaz um sistema autônomo com um ponto crítico na origem.

Colocando o sistema não linear (13) na forma escalar, tem-se

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} \quad (14)$$

O sistema (14) vai ser localmente linear em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio (x_0, y_0) sempre que as funções F e G tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Será usada a expansão em série de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) para escrever $F(x, y)$ e $G(x, y)$ na forma

$$\begin{cases} F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \varphi_1(x, y) \\ G(x, y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + G_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

onde

$$\frac{\varphi_1(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow 0,$$

quando

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

e, de modo análogo para $\varphi_2(x, y)$.

Note que

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

e ainda

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x_0)}{dt},$$

e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y_0)}{dt}.$$

Assim, para analisar o que acontece nas proximidades do ponto de equilíbrio, tem-se o sistema equivalente

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Portanto, o sistema linear que aproxima o sistema não linear (14) perto de (x_0, y_0) é dado pela parte linear de (15):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

onde $u_1 = x - x_0$ e $u_2 = y - y_0$ (16).

A matriz

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}$$

que aparece como matriz de coeficientes na equação (16) é chamada de **matriz jacobiana** das funções F e G em relação à x e y . Precisamos supor que $\det(J) \neq 0$ em (x_0, y_0) , de modo que este ponto seja também um ponto de equilíbrio isolado do sistema linear (16).

Perceba que mesmo que o ponto crítico seja do mesmo tipo que o do sistema linear, as trajetórias do sistema localmente linear podem ter “aparência” bem diferente das do sistema linear correspondente, exceto muito próximo do ponto crítico.

3 O MODELO LOTKA - VOLTERRA

Neste capítulo será discutido o modelo de Lotka – Volterra, que ficou conhecido como Predador – Presa e foi utilizado para descrever a dinâmica de populações competindo. Todos os modelos apresentados até agora servem para descrever a dinâmica de populações isoladas, ou de populações e espécies que não interagem entre si.

O modelo Lotka – Volterra (predador – presa) foi desenvolvido por Alfred James Lotka e Vito Volterra de forma independente.

Alfred James Lotka (1880 – 1949), um biofísico naturalizado americano, nasceu onde é hoje a Ucrânia. Foi o autor, em 1924, do primeiro livro sobre biologia matemática, com o título *Elements of Mathematical Biology*.

Vito Volterra (1860 – 1940), um importante matemático italiano. É famoso por seu trabalho em equações integrais e análise funcional. Seu trabalho está resumido no artigo *Theory of functionals and of Integral and Integro-Differential Equations (1930)*.

3.1 Espécies em Competição

A ecologia classifica **competição** como uma relação desarmônica entre indivíduos de mesma espécie (intraespecíficas) e espécies diferentes (interespecíficas), onde ambas necessitam de um mesmo recurso ambiental limitado. Em ambos os casos, esse tipo de relação ajusta os mecanismos através de um processo de seleção, onde se preservam as espécies mais bem adaptadas ao meio em que vivem, extinguindo assim as espécies com baixo nível adaptativo. Dessa forma, o processo competitivo é um fator que regula a densidade populacional.

3.2 O Modelo Predador - Presa

Conforme foi mencionado, os modelos apresentados até agora descrevem a dinâmica de populações que não interagem entre si. Todavia, no contexto de dinâmica de populações considerar-se-ão duas situações: interação entre duas espécies competindo por um suprimento comum a ambas; e interação entre duas espécies que interagem, onde uma delas dispõe de alimento em abundância, a qual se chama presa, e a outra espécie, predadora, tem como suprimento se alimentar da população de presas.

Vamos agora construir tal modelo.

Considere as populações de presas e predadores, denotadas respectivamente, por $x(t)$ e $y(t)$, em um determinado instante t . Para modelar a interação entre as duas espécies, fazem-se as seguintes hipóteses (as mais simples possíveis):

- Na ausência do predador, ou seja, quando $\mathbf{y}(t)=\mathbf{0}$, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual. Assim, a variação do número presas é dada por

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \cdot x(t), \quad a > 0.$$

- Na ausência de presas, ou seja, quando $\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$, os predadores são extintos. Assim, a variação do número de predadores é da forma

$$\frac{dy(t)}{dt} = -c \cdot y(t), \quad c > 0$$

- O número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros promove o crescimento da população de predadores e inibe o crescimento da população de presas. Assim, a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma

$$\gamma \cdot x(t) \cdot y(t), \quad \gamma > 0,$$

enquanto a taxa do crescimento (neste caso, taxa de declínio) da população de presas é diminuída por um termo da forma

$$-\alpha \cdot x(t) \cdot y(t), \quad \alpha > 0$$

Como consequência dessas hipóteses, somos levados às equações

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x - \alpha \cdot x \cdot y = x \cdot (a - \alpha \cdot y), \quad x = x(t) \quad (1^*)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c \cdot y + \gamma \cdot x \cdot y = y \cdot (-c + \gamma \cdot x), \quad y = y(t) \quad (2*)$$

As constantes a , c , α e γ são positivas; a e c são as taxas de crescimento da população de presas e de morte da população de predadores, respectivamente; α e γ são medidas do efeito da interação entre as duas espécies.

As equações (1*) e (2*) são chamadas de equações Lotka - Volterra (predador - presa). Embora as equações sejam de certa forma, considerada simples, elas caracterizam uma classe ampla de problemas.

Observe que as equações (1*) e (2*) formam um sistema não linear. Porém, através do processo de linearização de sistemas localmente lineares, mostrado no capítulo precedente, é possível fazermos uma análise qualitativa do sistema, isto é, um estudo da estabilidade do sistema numa vizinhança dos pontos de equilíbrio.

3.2.1 Análise Qualitativa da Equação

Os pontos de equilíbrio da equação (1*) e (2*) são encontrados quando não há variação no número de presas e predadores, ou seja, quando

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x \cdot (a - \alpha \cdot y) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{a}{\alpha} \\ y \cdot (-c + \gamma \cdot x) = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{c}{\gamma} \end{aligned}$$

Portanto, têm-se dois pontos de equilíbrio:

$$x_1^* = (0, 0) \quad \text{e} \quad x_2^* = \left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha} \right)$$

Examinar-se-á agora as soluções do sistema linear correspondente perto de cada ponto crítico.

Numa vizinhança da origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Os autovalores podem ser encontrados calculando

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

o que implica

$$(a - \lambda) \cdot (-c - \lambda) = 0.$$

Logo, os autovalores são

$$\lambda_1 = a \quad e \quad \lambda_2 = -c.$$

Assim, os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são, respectivamente

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A solução geral de (1*) é da forma

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

Logo, obtém-se

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{at} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-ct} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, temos a solução geral:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{at} \\ c_2 \cdot e^{-ct} \end{pmatrix}$$

Como os autovalores têm sinais contrários, o ponto crítico $x_1^* = (0, 0)$ é um **ponto de sela** e, portanto, **instável**. Isto é, para qualquer condição inicial numa vizinhança da origem, as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio.

Para análise do ponto $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$, será feita a seguinte mudança de variável:

$$x = u + \frac{c}{\gamma} \Rightarrow u = x - \frac{c}{\gamma}$$

e

$$y = v + \frac{a}{\alpha} \Rightarrow v = y - \frac{a}{\alpha}$$

que nos permitirá encontrar um sistema linear correspondente a (1*) e (2*).

A matriz jacobiana é

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dx}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dy}{dt} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right) \end{pmatrix}$$

Tem-se então, que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (ax - \alpha xy) = a - \alpha y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (ax - \alpha xy) = -\alpha x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-cy + \gamma xy) = \gamma y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-cy + \gamma xy) = -c + \gamma x$$

o que resulta em

$$J = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \gamma y & -c + \gamma x \end{pmatrix}.$$

Calculando $J \left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha} \right)$:

$$J \left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha} \right) = \begin{pmatrix} a - \alpha \cdot \frac{a}{\alpha} & -\alpha \cdot \frac{c}{\gamma} \\ \gamma \cdot \frac{a}{\alpha} & -c + \gamma \cdot \frac{c}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$J \left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, obtém-se o sistema linear aproximado:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3^*)$$

Os autovalores são obtidos por

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + ac = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{ac} \cdot i$$

Os autovalores $\lambda_1 = \sqrt{ac} \cdot i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{ac} \cdot i$ são **imaginários puros**. Logo, o ponto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$ é **estável**, do tipo **Centro** para o sistema linearizado (3*), isto é, as trajetórias orbitam na vizinhança do ponto $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$.

Para verificar tais trajetórias, basta dividir a segunda equação pela primeira, que será obtido

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = -\frac{\left(\frac{\gamma a}{\alpha}\right) \cdot u}{\left(\frac{\alpha c}{\gamma}\right) \cdot v}$$

implicando em

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\gamma^2 \cdot a \cdot u}{\alpha^2 \cdot c \cdot v}$$

Para resolver a EDO acima, será utilizado o método de separação de variáveis. Logo,

$$\alpha^2 \cdot c \cdot v dv = -\gamma^2 \cdot a \cdot u du$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int \alpha^2 \cdot c \cdot v dv = \int -\gamma^2 \cdot a \cdot u du$$

Conseqüentemente, tem-se

$$\gamma^2 \cdot a \cdot u^2 + \alpha^2 \cdot c \cdot v^2 = K$$

que reescrita, assume a forma

$$\frac{u^2}{\frac{K}{\gamma^2 \cdot a}} + \frac{v^2}{\frac{K}{\alpha^2 \cdot c}} = 1$$

onde K é uma constante de integração não negativa.

Logo, as trajetórias do sistema não linear (3*) são elipses em torno do ponto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$, que é, conforme mencionado, do tipo centro.

Pode-se também analisar qualitativamente o sistema formado por (1*) e (2*) dividindo a segunda equação pela primeira, ou seja,

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y \cdot (-c + \gamma \cdot x)}{x \cdot (a - \alpha \cdot y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot (-c + \gamma \cdot x)}{x \cdot (a - \alpha \cdot y)} \quad (4*)$$

A equação acima também é separável, logo, tem-se

$$\left(\frac{a - \alpha \cdot y}{y}\right) dy = \left(\frac{-c + \gamma \cdot x}{x}\right) dx.$$

Simplificando a expressão, obtém-se

$$\left(\frac{a}{y} - \alpha\right) dy = \left(-\frac{c}{x} + \gamma\right) dx$$

Por fim, integrando em ambos os lados

$$\int \left(\frac{a}{y} - \alpha\right) dy = \int \left(-\frac{c}{x} + \gamma\right) dx.$$

Portanto, a solução de (4*) é

$$a \cdot \ln y - \alpha \cdot y + c \cdot \ln x - \gamma \cdot x = C$$

onde C é uma constante de integração. Apesar de a solução estar na forma implícita, é possível mostrar que o gráfico de (5*) é uma curva fechada, para C fixo em torno do

ponto de equilíbrio $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$. Logo, tal ponto de equilíbrio é também um centro para o sistema não linear (1*) e (2*).

Sabe-se que existem diversos fatores naturais, como por exemplo, a mudança climática, que podem alterar a variação da densidade populacional ao longo de um ciclo. Tais alterações podem ser modeladas matematicamente pelos parâmetros a , c , α e γ . Vejamos um exemplo.

Exemplo: Discuta a solução do sistema

$$(5*) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cdot (1 - 0,5y) \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot (-0,75 + 0,25x) \end{cases}$$

para x e y positivos.

Primeiramente, vamos encontrar os pontos críticos do sistema. Para isso, faz-se

$$x \cdot (1 - 0,5y) = 0$$

$$y \cdot (-0,75 + 0,25x) = 0.$$

Daí, tem-se que os pontos críticos são $x_1^* = (0, 0)$ e $x_2^* = (3, 2)$

Vamos analisar o comportamento das trajetórias de cada solução próximo a cada ponto crítico. Perto da origem, podemos desprezar os termos não lineares em (5*).

Assim, encontramos o sistema linear correspondente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6*)$$

Os autovalores podem ser encontrados por

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -0,75 - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

o que implica em

$$(1 - \lambda) \cdot (-0,75 - \lambda) = 0$$

Logo, tem-se

$$\lambda_1 = 1$$

e

$$\lambda_2 = -0,75$$

Os autovetores são

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-0,75t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou de forma equivalente

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t \\ c_2 \cdot e^{-0,75t} \end{pmatrix}$$

Portanto, a origem é um ponto de sela, pois os autovalores têm sinais contrários, logo, é instável. Observe a figura a seguir, que um par de trajetórias entra na origem através do eixo dos y . Todas as outras trajetórias se afastam de uma vizinhança da origem.

Para analisar o ponto de equilíbrio $(3, 2)$, será utilizada a matriz jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Nesse caso,

$$F(x, y) = x - 0,5xy$$

e

$$G(x, y) = -0,75y + 0,25xy$$

As derivadas parciais são

- $F_x = 1 - 0,5y$
- $F_y = -0,5x$
- $G_x = 0,25y$
- $G_y = -0,75 + 0,25x$

Logo, a matriz jacobiana é

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 0,5y & -0,5x \\ 0,25y & -0,75 + 0,25x \end{pmatrix}$$

Calculando agora $J(3, 2)$, obtemos o sistema linear

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (7^*)$$

onde $u = x - 3$ e $v = y - 2$

Os autovalores são encontrados calculando

$$\det \left[\begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1,5 \\ 0,5 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 0,75 = 0$$

$$\lambda^2 = -0,75$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-0,75}$$

Portanto, tem-se

$$\lambda_1 = \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = -\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Os autovetores associados a λ_1 e λ_2 são

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad w \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Como os autovalores são imaginários puros, o ponto de equilíbrio $(3, 2)$ é um centro do sistema linearizado (6^*) , logo, estável para este sistema. Porém, o comportamento do sistema aproximado, nesse caso, pode ser o mesmo, ou não, do sistema não linear, de modo que o ponto para o sistema não linear (6^*) não pode ser determinado.

De forma mais prática, pode-se dividir a segunda equação pela primeira em (7^*) . Assim, obtém-se

$$\frac{dv}{du} = \frac{0,5u}{-1,5v} = -\frac{u}{3v} \quad (8^*)$$

Usando separação de variáveis, tem-se

$$3v dv = -u du$$

Integrando em ambos os lados

$$\int 3v dv = \int -u du$$

Portanto, a solução geral de (8*) é

$$3v^2 + u^2 = K$$

ou, de forma alternativa

$$\frac{v^2}{\frac{K}{3}} + \frac{u^2}{K} = 1$$

onde K é uma constante arbitrária positiva de integração.

Novamente, vemos que as trajetórias do sistema linearizado (7*) são elipses centradas no ponto crítico, porém um tanto alongadas na direção horizontal.

Fazendo o mesmo processo na equação não linear inicial (1*), isto é, dividir a segunda equação pela primeira, segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot (-0,75 + 0,25x)}{x \cdot (1 - 0,5y)}$$

que também é uma equação separável, ou seja, assume a forma

$$\left(\frac{1 - 0,5y}{y} \right) dy = \left(\frac{-0,75 + 0,25x}{x} \right) dx$$

Integrando em ambos os lados, teremos como solução

$$0,75 \cdot \ln x + \ln y - 0,5y - 0,25x = C \quad (9*)$$

onde C é uma constante de integração.

Embora a equação (9*) não esteja implícita, é possível mostrar que o seu gráfico, para um determinado valor de C fixo, é uma curva fechada em torno do ponto de equilíbrio $(3,2)$. Logo, $x_2^* = (3,2)$ é também um centro para o sistema não linear (6*), o que significa dizer que as populações de predador e de presa exibem uma variação cíclica.

A figura 11 a seguir exhibe o comportamento das populações $x(t)$ de presas, e $y(t)$ de predadores, em função do tempo t .

Note que, inicialmente, para um pequeno número na população de predadores e pre-

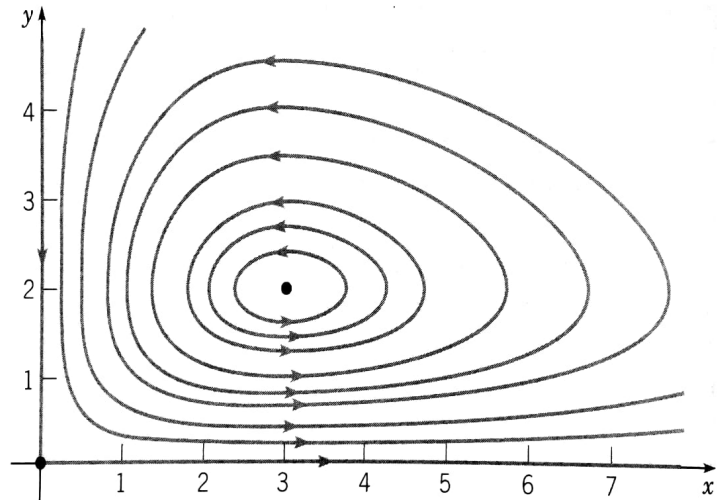


Figura 9: Representação no plano de fases da variação cíclica descrita pela equação (5*)
 Fonte: [2]

presas, a população de presas aumenta, devido à pequena quantidade de predadores. Posteriormente, com o aumento da população de presas, há um maior número de predações, o que acarreta no aumento de predadores e conseqüentemente, diminuição de presas, voltando assim ao seu estado original; e o ciclo se repetirá.

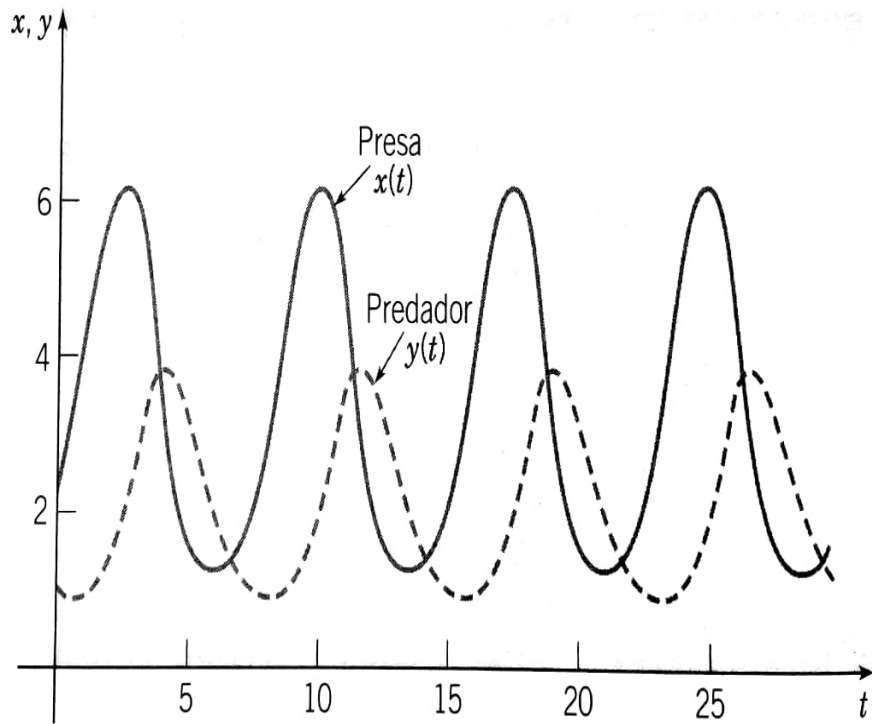


Figura 10: Variação das populações de predadores e presas, em função do tempo t .
Fonte: [2]

CONCLUSÃO

No presente trabalho foi mostrado e construído através da modelagem matemática, o modelo conhecido como Predador - Presa (Lotka - Volterra). É importante ressaltar que a construção deste modelo partiu das hipóteses mais simples, no que tange à dinâmica de população de duas espécies interagindo entre si, não levando em conta fatores naturais inibidores da variação da população de predadores e presas. Todavia, é necessário frisar que o entendimento destas equações, ainda que consideradas simples, nos dão uma gama de conhecimento para resolver problemas de fenômenos mais complicados.

É verdade que na natureza as relações entre espécies, predadoras ou não, são muito complexas. Logo, é perceptível que apenas duas simples equações não possam descrever tais relações. Mais ainda: modelar fenômenos dessa natureza pode ser algo difícilimo, e ainda que seja possível, as equações diferenciais resultantes raramente terão um método universal de resolução, como as Equações Separáveis, ou Equações de Bernoulli, por exemplo.

Portanto, almejando um texto didático e de fácil entendimento para os futuros leitores, menciona-se no decorrer do trabalho definições básicas que os auxiliem a compreender melhor o texto. Os gráficos inseridos também ajudam a entender o comportamento cíclico do sistema predador - presa. Vale também enfatizar que a Modelagem Matemática (citada no texto e utilizada para descrever o modelo em estudo) é de grande importância para problematizar diversas situações do cotidiano, além de ser uma excelente estratégia de ensino para alunos da educação básica.

Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, R.C., **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia** , (Contexto, São Paulo, 2010).
- [2] BOYCE, Willian E. DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9^a ed. Rio de Janeiro. LTC, 2011.
- [3] FALCÃO, D., MENOR, J., MARCOLINO, R. **Modelo Presa - Predador (Lotka - Volterra)**: Campinas - SP. Unicamp. 2015.
- [4] GUIDORIZZI, H. **Um Curso de Cálculo** Vol. 2. 5^a ed. Editora LTC.
- [5] PAULEK, I. **Dinâmica Populacional e o Modelo Predador - Presa**. Santa Catarina. UFSC. 2013. 71 páginas.
- [6] SOBRINHO, A. S. O. **Modelagem Matemática e Estabilidade de Sistemas Predador - Presa**.
- [7] STEWART, James. **Cálculo, Vol. 1**. Editora Ática, 2012.
- [8] <https://www.infoescola.com/relacoes-ecologicas/competicao/>. Acesso em 22/04/2018.