UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VALDEIR BATISTA DA SILVA
WEYDSON LIMA DE OLIVEIRA

# O TEOREMA DE TALES E APLICAÇÕES

MACAPÁ
2018

VALDEIR BATISTA DA SILVA
WEYDSON LIMA DE OLIVEIRA

# O TEOREMA DE TALES E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso como exigência para a obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Prof. Me. Steve Wanderson Calheiros de Araújo.

MACAPÁ
2018

VALDEIR BATISTA DA SILVA
WEYDSON LIMA DE OLIVEIRA

**O TEOREMA DE TALES E APLICAÇÕES**

A Banca examinadora abaixo relacionada aprova a Monografia defendida à mesma, como parte da exigência para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, na área de concentração em Educação Matemática e linha de pesquisa História da Matemática.

Macapá, 02 de julho de 2018

Prof. Me. Steve Wanderson Calheiros de Araújo
Orientador - Universidade Federal do Amapá

Prof. Me. João Socorro Pinheiro Ferreira
1º Membro – UNIFAP

Profª. Dra. Simone de Almeida Delphim Leal
2º Membro – UNIFAP

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborado por Mara Patrícia Corrêa Garcia CRB2/1248

516.2
S586t Silva, Valdeir Batista da

O Teorema de Tales e aplicações / Valdeir Batista da Silva, Weydson Lima de Oliveira ; orientador, Steve Wanderson Calheiros de Araújo. - Macapá, 2018.

41 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Geometria Euclidiana. 2. Teorema de Tales – Aplicações. I. Oliveira, Weydson Lima de. II. Araújo, Steve Wanderson Calheiros, orientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

# AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus pelo dom da vida e por ter proporcionado chegarmos até aqui. A nossas famílias por toda a dedicação e paciência contribuindo diretamente para que nós pudéssemos ter um caminho mais fácil e prazeroso durante esses anos. Agradecemos aos professores que sempre estiveram despostos a ajudar e contribuir para uma melhor aprendizagem em especial ao professor mestre Steve Araújo. E a todos que participaram da nossa caminhada.

*A geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços.*

*Immanuel Kant*

# RESUMO

Nesta monografia de conclusão de curso mostraremos de forma breve alguns conceitos da Geometria Euclidiana que são necessários para a demonstração do Teorema de Tales e posteriormente faremos algumas aplicações que dependem do teorema para seu desenvolvimento, iniciaremos com uma breve descrição histórica sobre Tales de Mileto, a partir daí daremos ênfase nos fundamentos da Geometria Euclidiana Plana e finalizaremos com a demonstração do Teorema de Tales e aplicações.

**Palavras-chave**: Geometria Euclidiana. Teorema de Tales. Aplicações.

# ABSTRACT

In this monograph of course conclusion we will briefly show some concepts of Euclidean geometry that are necessary for the demonstration of the Theorem of Tales and later we will make some applications that depend on the theorem for its development, we will start with a brief historical description on Thales of Miletus, from there we will emphasize the fundamentals of Flat Euclidean Geometry and conclude with the demonstration of the Theorem of Tales and Applications.

**Key-words**: Euclidean geometry. Theorem of Tales. Applications.

# LISTA DE FIGURAS

# SUMÁRIO

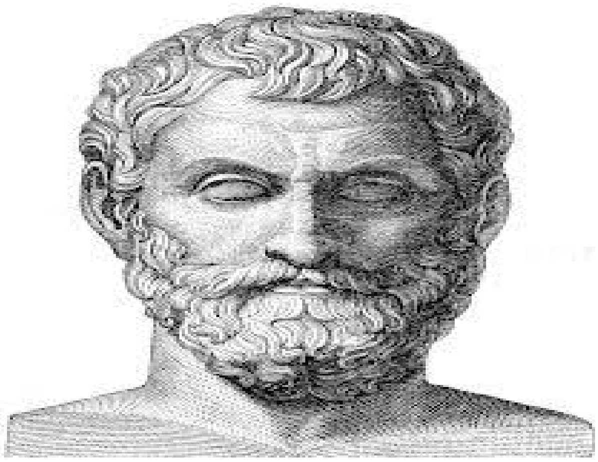
# 1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que a geometria possui um vasto campo de pesquisas e quando damos destaque a Geometria Euclidiana Plana temos um ambiente que é apoiado em axiomas, teoremas, definições, etc. Um teorema específico depende de uma sentença anterior, ou seja, cada conceito está interligado com os demais. Nesse contexto o presente trabalho tem como objetivo apresentar de forma sucinta a demonstração do teorema de Tales a partir das definições que o antecedem. Exibiremos a prova do teorema, tendo como objetivo despertar o interesse do leitor pelos métodos teóricos da geometria. No ensino médio é apresentado apenas os conceitos básicos da geometria euclidiana e quando o teorema de Tales é abordado possui caráter prático(não possui uma grande fundamentação) e de fácil resolução, nessas condições o aluno limita seu conhecimento apenas no teorema em si, não lhe é apresentado os conceitos que determinam sua existência. Desse modo este trabalho apresentará leitura de fácil entendimento tanto para alunos de graduação, quanto para os alunos do ensino médio.

O ponto de partida desta monografia será os fatos sobre a história de Tales de Mileto, desde de sua vida e obras e ainda acontecimentos peculiares que são considerados de sua autoria. Em um segundo momento mostraremos os fundamentos da geometria euclidiana, estas definições referentes a este tópico foram elaboradas de modo que cada colocação sirva de premissa para outra. E finalmente será apresentado o Teorema de Tales, juntamente com sua demonstração e aplicaremos a criação de Tales em alguns teoremas clássicos da geometria.

# BREVE DESCRIÇÃO HISTÓRICA SOBRE TALES DE MILETO

Figura 2.1: Tales de Mileto



Fonte: Wikipédia[1]

Tales de Mileto foi um importante pensador, filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo grego pré-socrático. Considerado o "Pai do Pensamento Científico" e da "Filosofia Ocidental".

## 2.1 Início na Grécia

Segundo Moraes ([8], 2011), no processo do desenvolvimento matemático os Gregos tiveram atribuições fundamentais, pois tiveram os primeiros contatos com o Oriente Médio e logo se interessaram pela beleza da geometria e sua utilidade. A civilização Grega teve origem em uma civilização misteriosa chamada *Minóica*[2] que dominava a escrita e a

[1] Disponível em https://www.gaptekupdate.info/7-tokoh-penemu-rumus-matematika/.

[2] A Civilização Minoica surgiu durante a Idade do Bronze Grega(período da civilização no qual ocorreu o desenvolvimento desta liga metálica, resultante da mistura de cobre com estanho) em Creta, a maior ilha do mar Egeu, e floresceu aproximadamente entre os século XXX e XV a.C.

leitura cerca de 1700 a.C. Grandes Matemáticos, incluindo Tales, surgiram por volta de 600 a.C. Tales de Mileto, Um dos *Sete Sábios da Grécia* o qual não era matemático profissional, mas por ser um rico comerciante teve ensejos impares de estudar e se dedicar aos conhecimentos da época por puro prazer, depois de ter passagens pelo Egito e a Babilônia, trouxe o conhecimento da Geometria do Oriente.

## 2.2 Vida e obras de Tales de Mileto

Tales de Mileto, provavelmente descendente de fenícios, nasceu em Mileto (Jônia), colônia grega, na Ásia Menor, onde atualmente é a Turquia. De acordo com Luna ([6], 2013), foi um filósofo que viveu por volta de 624-548 a.C. e entretanto, a respeito da vida e obras sabe-se muito pouco. Acredita-se ter sido ele o criador da geometria em que era possível ser demonstrada. Por isto, ele é saudado como o primeiro matemático a dar uma contribuição à organização da geometria. Através de seu conceito que "as verdades matemáticas devem ser demonstradas", Tales de Mileto conseguiu demonstrar vários teoremas, todos ramificados da geometria. A maioria das informações sobre as demonstrações e os passos que se seguiram por séculos da matemática grega devem-se, à tradição com que foram contados os relatos históricos, já que os trabalhos se perderam no tempo, apenas fragmentos de relatos e alusões são encontrados quase um milênio depois. Alguns resultados fundamentais da geometria foram atribuídos a Tales, resultados que para nós hoje parecem tão rudimentar, mas que num momento onde o homem não questionava-se o "porquê", foi de grande incentivo ao novo caminho em que a matemática estava percorrendo. E ainda segundo Moraes ([8], 2011), os resultados mais expressivos que Tales obteve foram:

- **a.** Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado;
- **b.** Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
- **c.** Ângulos opostos pelo vértice são iguais;
- **d.** Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais;
- **e.** Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

## 2.3 Sobre Tales de Mileto

Existem muitos fatos curiosos sobre Tales de Mileto. Indícios apontam que se dedicou também ao estudo da astronomia, aplicando todo conhecimento matemático adquirido com os egípcios. Um desses fatos curiosos que deixou Tales muito famoso desde a antiguidade até os dias atuais, é que ainda acredita-se que ele "previu" um eclipse solar, porém, este é um fato que não existem provas concretas que o comprovam. Outro dado histórico, segundo as fontes de Cornelli e Coelho ([2], 2007) dizem o seguinte:

> É verdade que Tales de Mileto, segundo o testemunho de Proclo, no Comentário ao primeiro livro dos elementos de Euclides, provavelmente retirado do sumário da mais antiga História da geometria de Eudemo, teria ido ao Egito estudar exatamente a geometria, que aqui nasceu para responder a necessidades práticas: "Foi o primeiro que, tendo ido ao Egito, trouxe de lá esta doutrina e a introduziu na Hélade, e ele próprio fez muitas descobertas e, de muitas, deixou uma idéia aos seus sucessores, abordando alguns problemas de modo mais geral, e outros de modo mais prático". Na medida em que o Egito é geralmente considerado o berço da civilização grega, "o reconhecimento da origem egípcia não era outra coisa senão o corolário da certeza de que a geometria era um traço essencial da identidade cultural helênica".

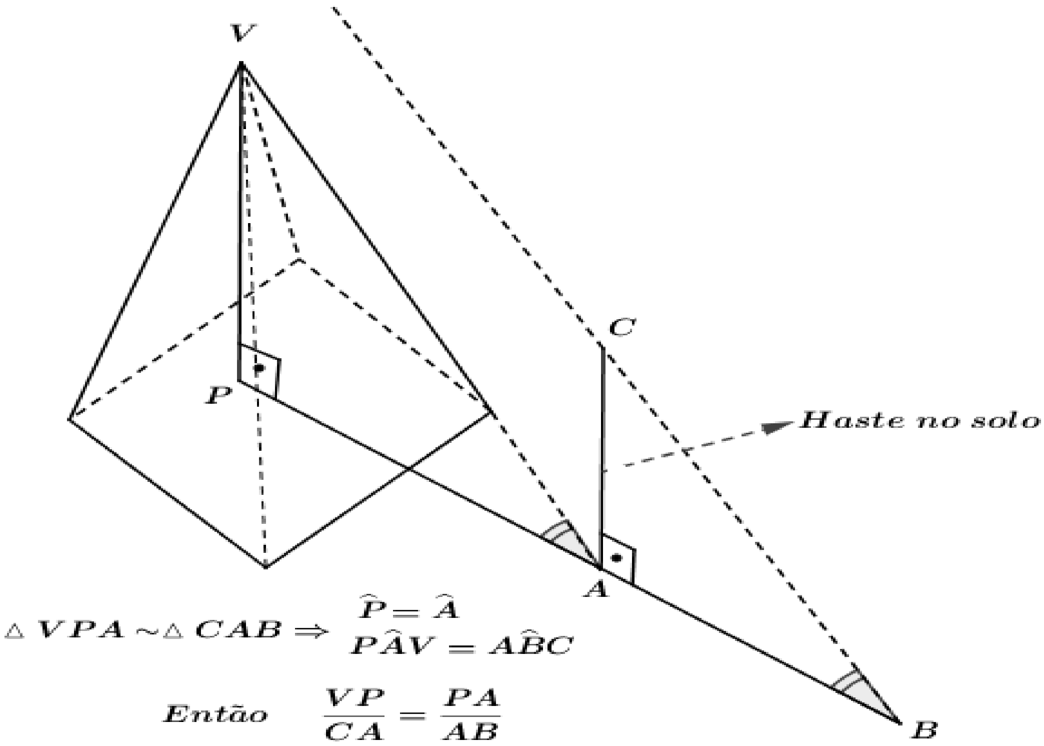
> Entre outras descobertas de Tales, a tradição informou-nos sobre o famoso teorema, pelo qual o ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto, que parece ter sido o primeiro teorema de geometria demonstrado de forma dedutiva. Com Tales, um dos sete sábios já segundo Platão, a matemática insere-se em um programa maior, que poderíamos chamar de organização racional do conhecimento e do mundo, que passava pela astronomia, pela política e sobretudo pela conduta humana, isto é, pela ética. Esse programa não é invalidado mesmo se concordarmos que algumas célebres "proezas" atribuídas a Tales sejam de cunho até anedótico, como a de ter conseguido determinar a distância de um barco a partir da costa ou a altura de uma pirâmide. Elas são, claramente, anacrônicas, pois pressupõem o uso do conceito de proporção.

Além da proeza de conseguir determinar a distância de um barco a partir da costa, esta outra anedota talvez seja a mais conhecida da história de Tales de Mileto: A medição altura da pirâmide. De acordo com o resumo de Fontana ([4], 2012), a história da medição da altura da pirâmide foi realizada por Tales de Mileto no século VI a.C. Conta-se que ele fez isso utilizando um teorema geométrico que, mais tarde, ficou conhecido pelo seu nome: O Teorema de Tales. Com o passar do tempo, segundo os autores Cornelli e Coelho ([2], 2007), houve várias versões sobre o modo em que Tales conseguiu calcular a altura da pirâmide. Os mesmos autores descrevem em seu artigo:

Estão disponíveis diversos relatos que descrevem a medição da altura da pirâmide feita por Tales de Mileto. A primeira e mais antiga é a citada por Diôgenes de Laêrtios (século II-III d.C.): “Hierônimos conta-nos que Tales mediu a altura das pirâmides pela sombra das mesmas, fazendo a medição na hora em que a nossa própria sombra corresponde ao nosso tamanho” ([5], Laêrtios 2008, p. 19). Hierônimos de Rodes atribui a Tales, supostamente, o método mais simples para medir a altura de uma pirâmide. Uma outra versão para a história foi fornecida por Plutarco (século I-II d.C).

Colocando a prumo uma vara no final da sombra da pirâmide e fazendo dois triângulos com a linha que traça o raio do sol quando toca as duas extremidades, ele mostrou que havia uma certa proporção entre a altura da pirâmide e a da vara correspondente ao comprimento da sombra de um à sombra de outro. Destes dois relatos, devemos dar preferência a primeira versão por ser mais intuitiva, muito mais concordante com o suposto conhecimento de um jônio do século VI a.C. A segunda versão, além de envolver o conceito de triângulo, atribui um conhecimento mais complexo a Tales, a saber, que a altura da pirâmide está para o comprimento da sua sombra, exatamente como a altura de qualquer objeto vertical mensurável está para o comprimento da sua sombra no mesmo momento do dia.

Figura 2.2: Possível medição da altura pirâmide.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

# 3 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Neste capítulo apresentaremos alguns tópicos da geometria euclidiana que serão utilizados para o estudo do teorema de Tales. Admitiremos a existência das noções primitivas(ponto, reta e plano), que são adotadas sem definição, sendo estas:

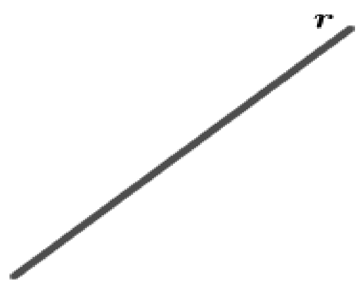
- **PONTO**

Figura 3.3: Representação de ponto.


Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

- **RETA**

Figura 3.4: Representação de reta.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

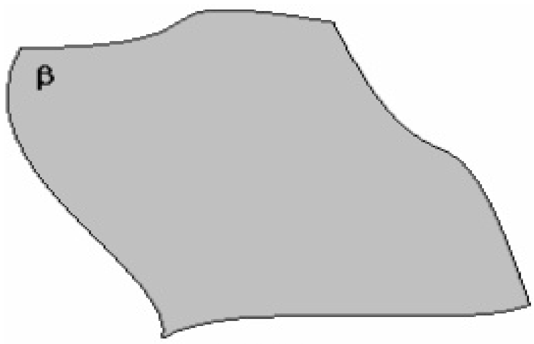
- **PLANO**

**Axioma 3.1.** *Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.*

**Axioma 3.2.** *Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.*

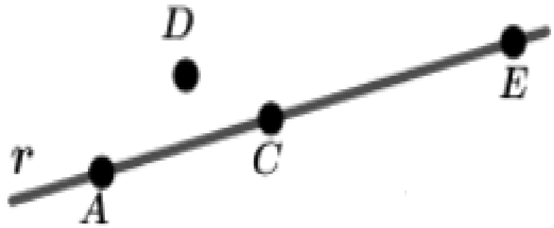
[3]Disponível em https://www.infoescola.com/matematica/ponto-reta-e-plano/.

Figura 3.5: Representação de plano.



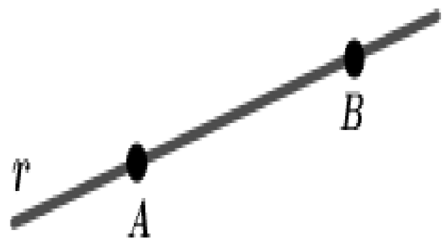

Fonte: Wikipédia[3]

Figura 3.6: Uma representação geométrica para o axioma 1.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

Figura 3.7: Uma representação geométrica para o axioma 2.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

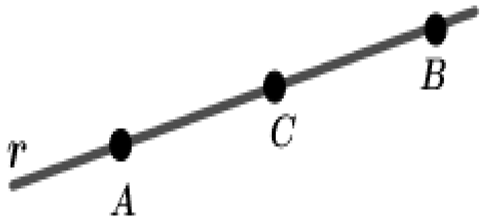
**Axioma 3.3.** *Dados três pontos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.*

**Axioma 3.4.** *Dados dois pontos $A$ e $B$ sempre existem: um ponto $C$ entre $A$ e $B$ e um ponto $D$ tal que $B$ está entre $A$ e $D$.*

**Axioma 3.5.** *Uma reta $m$ determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a reta $m$ (Observe a figura 10).*

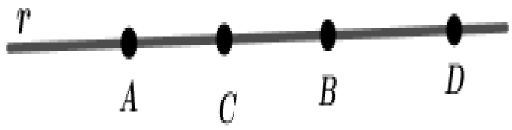
**Definição 3.1.** *Quando duas retas têm um único ponto em comum diz-se que elas se intersectam naquele ponto. Neste caso, as retas são ditas concorrentes.*

Figura 3.8: Uma representação geométrica para o axioma 3.



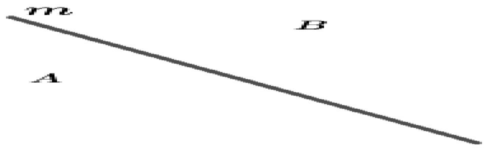

Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

Figura 3.9: Uma representação geométrica para o axioma 4.



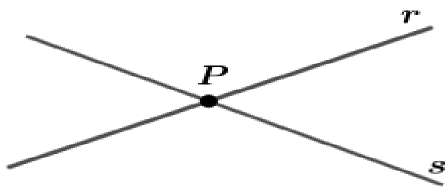

Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

Figura 3.10: Uma representação geométrica para o axioma 5.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

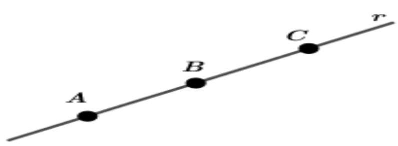
Figura 3.11: Retas concorrentes.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Definição 3.2.** *Pontos Colineares são os pontos que pertencem a uma mesma reta.*

Figura 3.12: Pontos colineares.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Definição 3.3.** *O conjunto constituído pelos pontos distintos $A$ e $B$ sobre uma reta $r$ e por todos os pontos da reta $r$ que estão entre $A$ e $B$, é chamado segmento $AB$. Os pontos $A$ e $B$ são denominados extremos ou extremidades do segmento.*

Figura 3.13: Segmento de reta.


Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

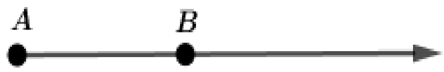
Usando segmentos podemos construir inúmeras figuras geométricas. Uma das mais simples é o triângulo, que é formada por três pontos não-colineares e pelos segmentos definidos por esses três pontos. Os três pontos são chamados vértices do triângulo e os segmentos são os lados do triângulo.

**Axioma 3.6.** *Dados três pontos distintos $A$, $B$ e $C$ sobre uma reta $r$, se o ponto $C$ encontra-se entre os pontos $A$ e $B$, então:*

$$AC + CB = AB$$

**Definição 3.4.** *Se $A$ e $B$ são pontos distintos sobre uma reta $r$, o conjunto constituído pelos pontos do segmento $AB$ e por todos os pontos $C$ de $r$, tais que $B$ encontra-se entre $A$ e $C$, é chamado de semirreta de origem $A$ contendo o ponto $B$, e é representado por $S_{AB}$. O ponto $A$ é então denominado origem da semirreta $S_{AB}$.*

Figura 3.14: Semirreta.

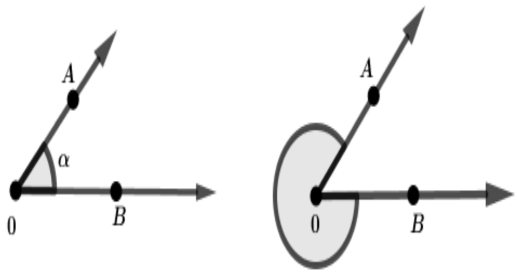



Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Definição 3.5.** *O ponto médio de um segmento $AB$ é um ponto $C$ deste segmento tal que $AC = CB$.*

**Definição 3.6.** *Dadas, no plano, duas semirretas $S_{OA}$ e $S_{OB}$, um ângulo de vértice $O$ e lados $OA$ e $OB$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $S_{OA}$ e $S_{OB}$. As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo. Observe a figura 3.15.*

Figura 3.15: Ângulos.

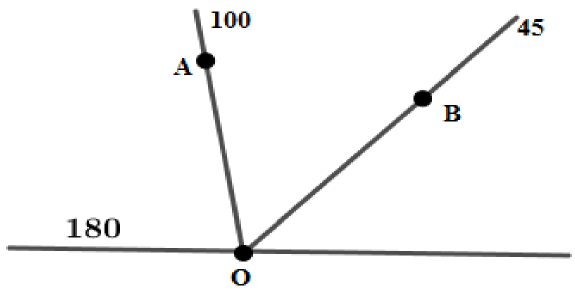



Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Axioma 3.7.** *A todo ângulo corresponde um único número real maior ou igual a zero. Este número é zero se e somente se os lados do ângulo coincidem.*

**Axioma 3.8.** *Existe uma bijeção entre as semirretas de mesma origem que dividem um dado semi-plano e os números entre zero e 180, de modo que a diferença entre os números é a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.*

Figura 3.16: Bijeção entre as semirretas .



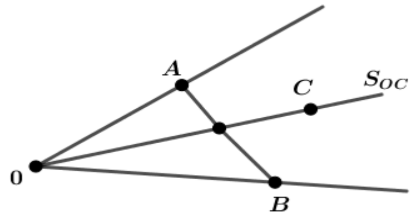

Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Definição 3.7.** *Uma semirreta $S_{OC}$ divide o ângulo $A\widehat{O}B$ se o segmento $AB$ intercecta $S_{OC}$. Se uma semirreta $S_{OC}$ divide o ângulo $A\widehat{O}B$ de modo que $A\widehat{O}C = C\widehat{O}B$, dizemos que $S_{OC}$ é a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.*

**Definição 3.8.** *Se uma semirreta $S_{OC}$ divide um ângulo $A\widehat{O}B$, então $A\widehat{O}B = A\widehat{O}C + C\widehat{O}B$.*

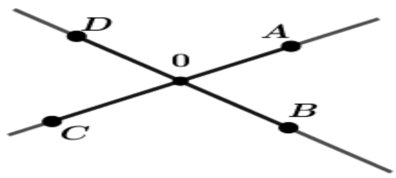
**Definição 3.9.** *Dois ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são ditos opostos pelo vértice se os pares de lados ($S_{OA}$, $S_{OD}$) e ($S_{OB}$, $S_{OC}$) são semiretas distintas de uma mesma reta. Observe que ângulos opostos pelo vértice têm o mesmo suplemento. Portanto, ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida. Observe as figuras abaixo.*

Figura 3.17: Bijeção entre as semirretas .




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

Figura 3.18: Bijeção entre as semirretas .

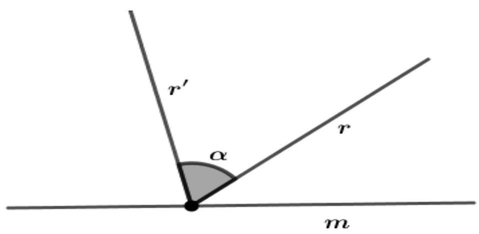



Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Definição 3.10.** *Um ângulo cuja medida é* $90^\circ$ *é chamado ângulo reto. Se duas retas se intersectam formando um ângulo reto, dizemos que as retas são perpendiculares. Se a soma das medidas de dois ângulos é* $90^\circ$*, dizemos que os ângulos são complementares.*

**Teorema 3.1.** *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.*

Figura 3.19: Retas perpendiculares .




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

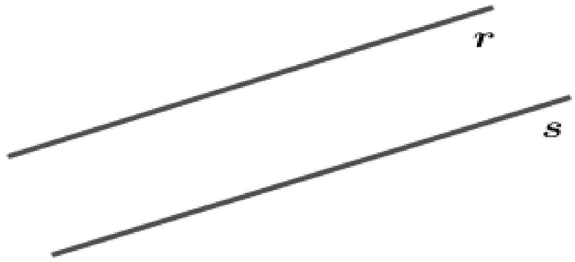
**Demonstração 3.1.** *Suponha que existam duas perpendiculares r e r' a uma reta m passando pelo ponto A. Assim, r e r' formam um ângulo* $\alpha$ *em um dos semi-planos determinados por m. Mas como r e r' formam ângulos retos com m, temos que* $\alpha = 0$*. Logo, r e r' coincidem.* □

**Definição 3.11.** *Um ângulo é agudo se mede menos de 90º e é obtuso se mede mais de 90º.*

**Definição 3.12.** *Dizemos que duas retas são coplanares se elas estão contidas no mesmo plano.*

**Definição 3.13.** *Duas retas, coplanares, que não se intersectam são ditas paralelas.*

Figura 3.20: Retas paralelas.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

## 3.1Congruência

**Definição 3.14.** *Sejam $AB$ e $CD$ segmentos. Se $AB = CD$, então os segmentos são chamados congruentes; Dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes se eles tem a mesma medida.*

**Definição 3.15.** *Dois triângulos $ABC$ e $DEF$ são congruentes se existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices tal que os lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. E a correspondência é dada por:*

$$A \leftrightarrow D$$

$$B \leftrightarrow E$$

$$C \leftrightarrow F$$

*Assim teremos seis congruências induzidas sobre os lados e os ângulos.*

$$AB = DE \leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{D}$$

$$BC = EF \leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{E}$$

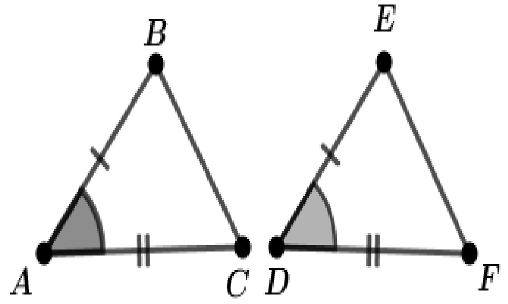
$$CA = FD \leftrightarrow \widehat{C} = \widehat{F}$$

.

Logo, para que dois triângulos sejam congruentes é necessário que as seis congruências acima sejam satisfeitas. Mas, se queremos verificar se dois triângulos são congruentes será necessário verificar somente algumas delas.

**Axioma 3.9.** *(LAL) Sejam $ABC$ e $DEF$ dois triângulos. Se $AB = DE$, $AC = DF$ e $\widehat{A} = \widehat{D}$ então $ABC = DEF$.*

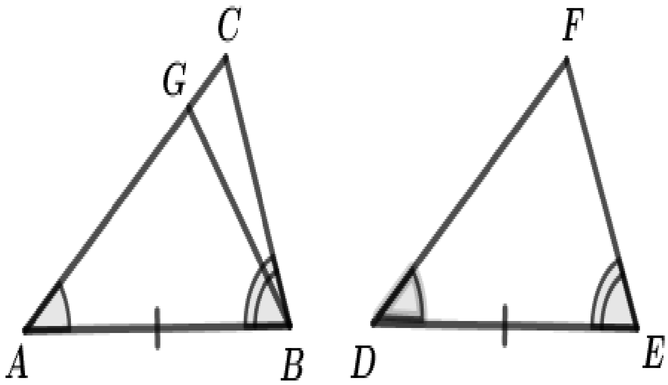
Figura 3.21: Congruência 1.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Teorema 3.2.** *(ALA) Dados dois triângulos $ABC$ e $DEF$ com $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$ , então $ABC = DEF$.*

Figura 3.22: Congruência 2.

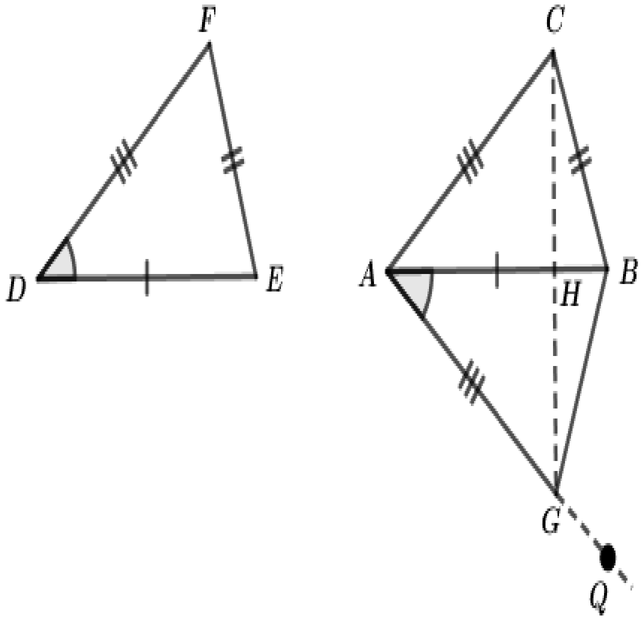



Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Demonstração 3.2.** *Considere um ponto $G$ na semi-reta $S_{AC}$ tal que $AG = DF$. Por construção, temos $AG = DF$, $AB = DE$ e $\widehat{A} = \widehat{D}$. Logo pelo Axioma 3.9, obtemos $ABG = DEF$. Então, segue que $A\widehat{B}G = \widehat{E} = A\widehat{B}C$. Portanto, as semirretas $S_{BG}$ e $S_{BC}$ coincidem. Isto implica que $G$ coincide com o ponto $C$. Então $ABC = ABG = DEF$.* $\square$

**Teorema 3.3.** *(Caso LLL) Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.*

Figura 3.23: Caso LLL.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Demonstração 3.3.** *Sejam $ABC$ e $DEF$ triângulos com $AB = DE$, $BC = EF$ e $AC = DF$.*

*Considere uma semirreta $S_{AQ}$ no semi-plano oposto ao que contém o ponto C, tal que $B\widehat{A}Q = \widehat{D}$. Na semirreta $S_{AQ}$ tome um ponto G tal que $AG = DF$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos, segue que $AGB = DEF$. O segmento $CG$ intercepta $AB$ no ponto H, pois estão em lados opostos. Note que $AG = DF = AC$. Assim, o triângulo $ACG$ é isósceles e então $A\widehat{G}C = A\widehat{C}G$. Da mesma forma, concluímos que o triângulo $BCG$ é isósceles com $B\widehat{C}G = B\widehat{G}C$. Mas, $A\widehat{G}B = A\widehat{G}C + CGB = A\widehat{C}G + G\widehat{C}B = A\widehat{C}B$. Portanto, podemos aplicar o Axioma 3.9 e concluimos que $ACB = AGB$. Como $AGB = DFE$, temos que $ABC = DEF$.* □

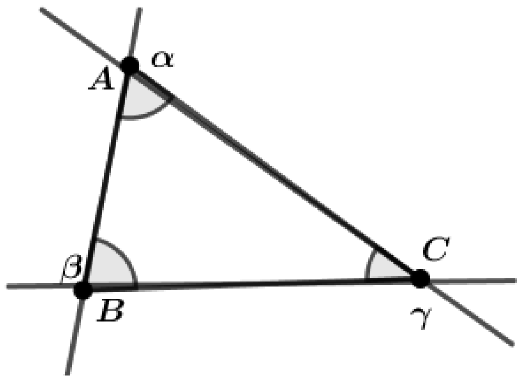
**Definição 3.16.** *Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes.*

## 3.2 Teorema do ângulo externo

**Definição 3.17.** *Os ângulos internos de um triângulo são os ângulos formados pelos lados do triângulo. Um ângulo suplementar a um ângulo interno do triângulo é denominado ângulo exterior do triângulo.*

Todo triângulo possui exatamente seis ângulos externos. Esses seis ângulos formam três pares de ângulos congruentes.

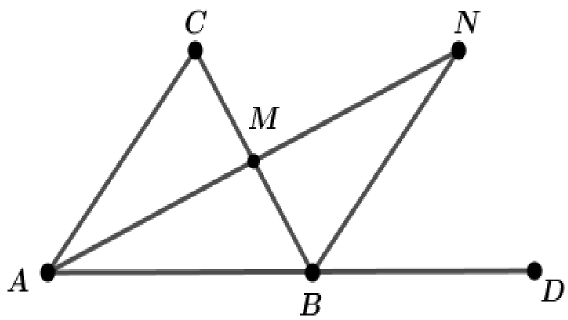
Figura 3.24: Ângulos de um triângulo.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Teorema 3.4.** *(Ângulo Externo) A medida de um ângulo externo de qualquer triângulo é maior que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Figura 3.25: Teorema do ângulo externo.

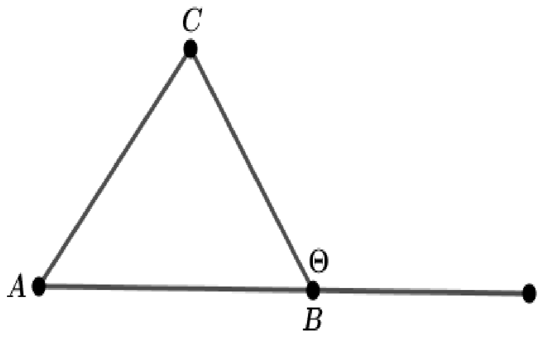



Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Demonstração 3.4.** *Dado um triângulo ABC, considere um ponto D sobre a semirreta* $_{SAB}$ *tal que B esteja entre A e D. Provaremos que* $C\widehat{B}D > \widehat{A}$ *e* $C\widehat{B}D > \widehat{C}$*. De fato, sejam M o ponto médio do segmento BC e N o ponto na semirreta* $S_{AM}$ *tal que M esteja entre A e N e* $AM = MN$*. Temos* $CM = BM$*,* $AM = MN$ *e* $A\widehat{M}C = B\widehat{M}N$*. Assim, por LAL, os triângulos AMC e BMN são congruentes e, portanto,* $\widehat{C} = M\widehat{B}N$*. Como* $M\widehat{B}D = M\widehat{B}N + N\widehat{B}D$*, concluimos que* $C\widehat{B}D > \widehat{C}$*. De forma inteiramente análoga se prova que* $C\widehat{A}D > \widehat{A}$*.* □

**Corolário 3.1.** *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que* $180°$*.*

Figura 3.26: Angulos internos de um triângulo.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Demonstração 3.5.** *Dado um triângulo ABC, mostremos, que* $\widehat{A}+\widehat{B} < 180\,°$. *De fato, seja* $\Theta$ *a medida do ângulo externo do triângulo ABC, adjacente ao ângulo* $\widehat{B}$. *Pelo Teorema 3.2.1, temos* $\widehat{A} < \Theta$. *Como* $\Theta$ *e* $\widehat{B}$ *são suplementares, temos* $\Theta + \widehat{B} = 180\,°$. *Logo,* $\widehat{A}+\widehat{B} < +\widehat{B} = 180\,°$. □

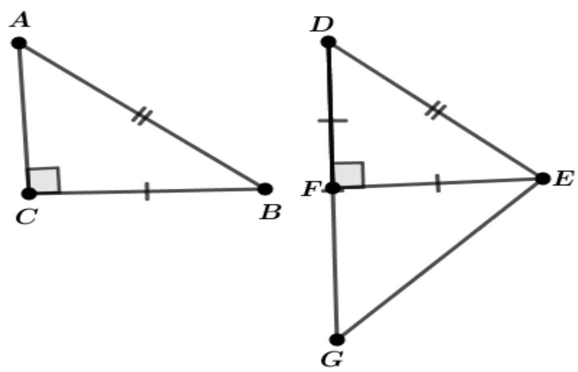
**Corolário 3.2.** *Em todo triângulo existem, pelo menos, dois ângulos internos agudos.*

**Demonstração 3.6.** *Se um triângulo possuir dois ângulos internos não agudos, a soma deles é maior ou igual a 180º, contradizendo o Corolário 3.1.* □

**Definição 3.18.** *Um triângulo é dito retângulo se um dos ângulos internos é reto. O lado oposto ao ângulo reto é denominado de hipotenusa e os outros dois de catetos.*

**Teorema 3.5.** *Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são* $\widehat{C} e \widehat{F}$. *Se* $AB = DE$ *e* $BC = EF$, *então* $ABC = DEF$.

Figura 3.27: Congruência em triângulos retângulos.



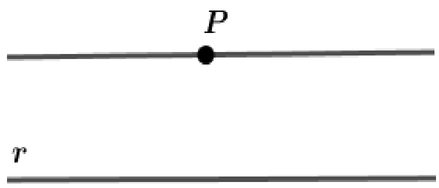

Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Demonstração 3.7.** *Seja G um ponto tal que F está entre D e G e* $FG = AC$. *Segue que o triângulo EGF é retângulo cujo ângulo reto é* $\widehat{F}$. *Pelo caso LAL de congruência* *de triângulos, segue que $ABC = GEF$. Assim $EG = AB$. Então $DEG$ é um triângulo isósceles com base DG. Logo, $E\widehat{D}G = E\widehat{G}D$. Pelo caso LAA, segue que $DEF = GEF$. Portanto, $ABC = DEF$.* □

## 3.3 Axioma das paralelas

**Axioma 3.10.** *Por um ponto fora de uma reta $r$ pode-se traçar uma única reta paralela à reta $r$.*

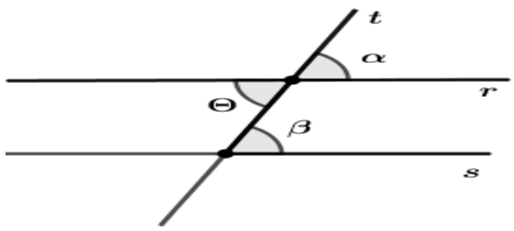
Figura 3.28: Axioma das paralelas.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Definição 3.19.** *Sejam $r$ e $s$ duas retas coplanares paralelas e $t$ uma reta transversal às retas $r$ e $s$. Os ângulos $\alpha$ e $\beta$ são ditos correspondentes e os ângulos $\theta$ e $\beta$ são ditos alternos internos.*

Figura 3.29: Ângulos correspondentes e alternos internos.

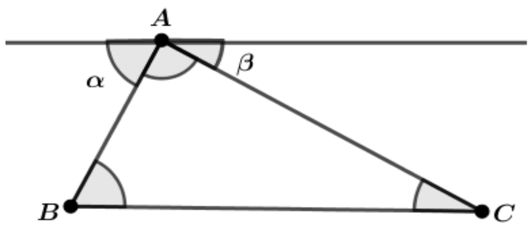



Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Teorema 3.6.** *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é* $180\,°$.

**Demonstração 3.8.** *Seja $ABC$ um triângulo. Pelo vértice $A$ tracemos a reta paralela ao lado BC. Por construção, temos que $\alpha + B\widehat{A}C + \beta = 180\,°$. Daí, como $\alpha = A\widehat{B}C$ e $\beta = A\widehat{C}B$, pois são ângulos alternos internos, então substituindo estas igualdades, temos que $A\widehat{B}C + B\widehat{A}C + A\widehat{C}B = 180\,°$. Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é* $180\,°$. □

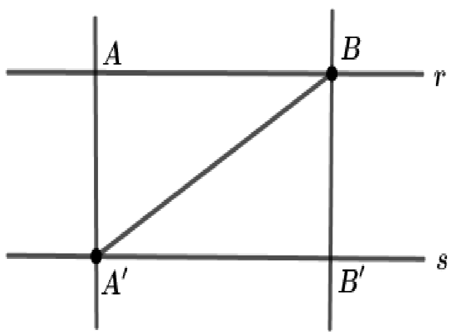
Figura 3.30: Soma dos ângulos internos de um triângulo.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Proposição 3.1.** *Retas paralelas são equidistantes, ou seja, se $r$ e $s$ são retas paralelas, então qualquer ponto de $r$ dista igualmente de $s$.*

Figura 3.31: Retas equidistantes.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Demonstração 3.9.** *Sejam $r$ e $s$ duas retas paralelas. Dados dois pontos $A, B \in \boldsymbol{r}$ considere as retas perpendiculares a $r$ por estes pontos. Sejam $A', B' \in \boldsymbol{s}$ os pés destas perpendiculares . Queremos provar que $AA' = BB'$. De fato, considere o segmento A'B. Temos $A\widehat{B}A' = BA'B'$ e $A\widehat{A'}B = A'BB'$. Assim, os triângulos $A'AB$ e BB'A' são congruentes. Assim concluimos que $AA' = BB'$.* □

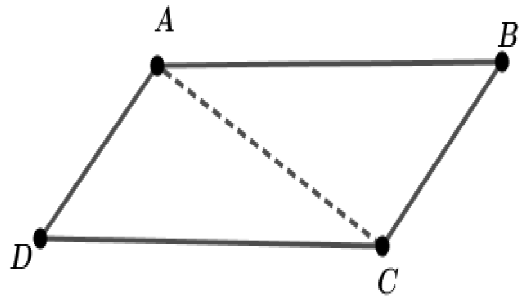
**Definição 3.20.** *Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.*

**Proposição 3.2.** *Os lados e ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.*

**Demonstração 3.10.** *Seja $ABCD$ um paralelogramo. Como $AB$ e $DC$ são paralelos, então $B\widehat{A}C = A\widehat{C}D$. Da mesma forma, concluímos que $CAD = A\widehat{C}B$. Isto implica que $DAC = BCA$, já que $AC$ é comum a ambos os triângulos. Em particular, $AB = DC$, $AD = BC$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$. Além disso, $\widehat{A} = D\widehat{A}C + C\widehat{A}B = B\widehat{C}A + A\widehat{C}D = \widehat{C}$.* □

**Proposição 3.3.** *Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.*

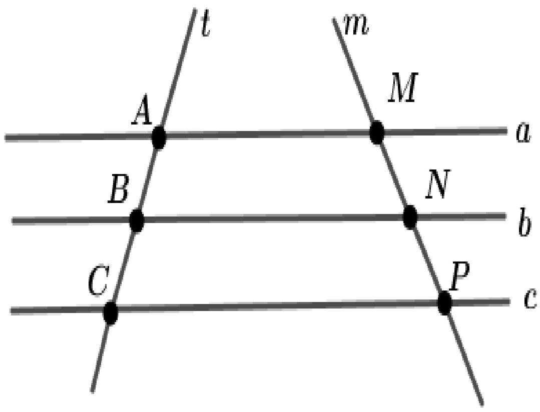
Figura 3.32: Paralelogramo 2.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Demonstração 3.11.** *Faremos a prova usando um feixe de três retas paralelas. Assim, sejam a, b e c três retas paralelas e t e m duas transversais, conforme a Figura abaixo.*

Figura 3.33: Feixe de paralelas 1.



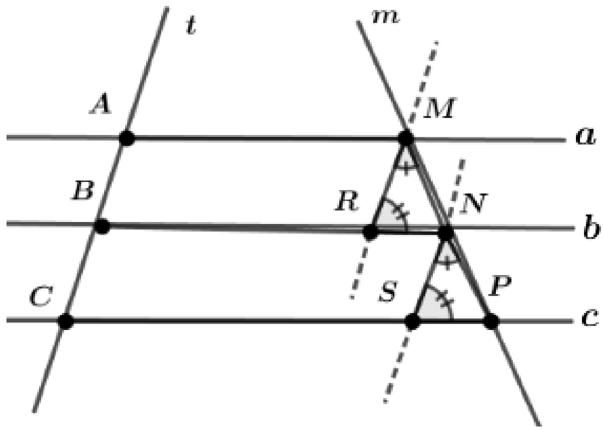

Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

*Por hipótese, temos que as retas do feixe de paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, digamos $AB = BC$. Devemos provar que $MN = NP$. Traçando por M e N retas paralelas a t, conforme figura abaixo, observe que ABRM e BCSN são paralelogramos, pois por hipótese a//b//c e por construção MR//t e NS//t, ou seja, MR//NS .*

*Assim, temos que $AB = MR$ e $BC = NS$ . Como $AB = BC$, segue que, $MR = NS$. Agora, note que $M\widehat{R}N = N\widehat{S}P$ e que $N\widehat{M}R = P\widehat{N}S$, pois, como já citado, b//c e MR//NS. Por consequência, temos que os triângulos MRN e NSP são congruentes, por ALA. Logo, $MN = NP$.* □

**Definição 3.21.** *Dados os segmentos AB, CD, EF e GH, dizemos que o par de segmentos AB,CD é proporcional ao par de segmentos EF,GH se*

Figura 3.34: Feixe de paralelas 2.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

# 4 O TEOREMA DE TALES

Antes de iniciarmos a demonstração precisaremos de alguns conceitos importantes. Chamamos segmento unitário, ao segmento de reta de medida padrão, que é utilizado para medir um segmento de reta AB qualquer. Por definição, o segmento, possui medida igual a 1.

**Definição 4.22.** *Dados dois segmentos AB e CD, dizemos que os segmento CD cabe um número inteiro de vezes no segmento AB se,* $AB = n.CD$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

**Definição 4.23.** *Dizemos que os segmentos AB e CD são comensuráveis se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.*

**Definição 4.24.** *Chamamos de múltiplo do segmento AB qualquer segmento com medida n.AB, para algum n natural.*

Vale ressaltar que a medida de um segmento é um número racional se, e somente se, ele é comensurável com o segmento unitário, caso isso não aconteça sua medida é um número irracional.

**Definição 4.25.** *Dizemos que dois segmentos AB e CD são incomensuráveis se não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.*

**Teorema 4.7.** *(TALES) Um feixe de retas paralelas determina em duas transversais, quaisquer, segmentos proporcionais.*

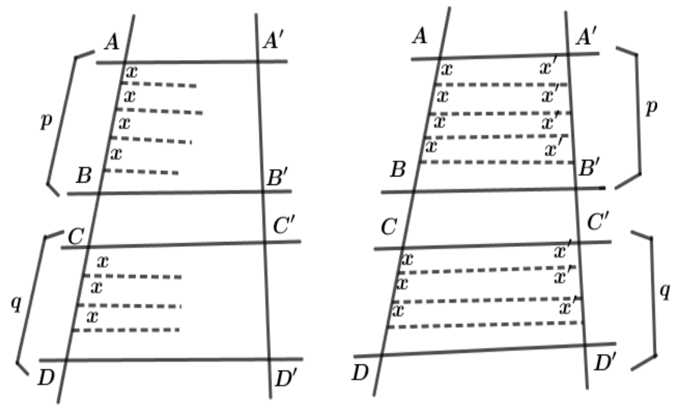
**Demonstração 4.12.** *Dividiremos em dois casos:*

***1º Caso**: AB e CD são comensuráveis (observe a figura 4.35).*

*Existe um segmento, chamaremos de x, que é multiplo de AB e de CD. Assim teremos:*

$$AB = px \;\; e \;\; CD = qx \;\; \overset{\div}{\Rightarrow} \;\; \frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

Figura 4.35: Feixe de retas 1.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

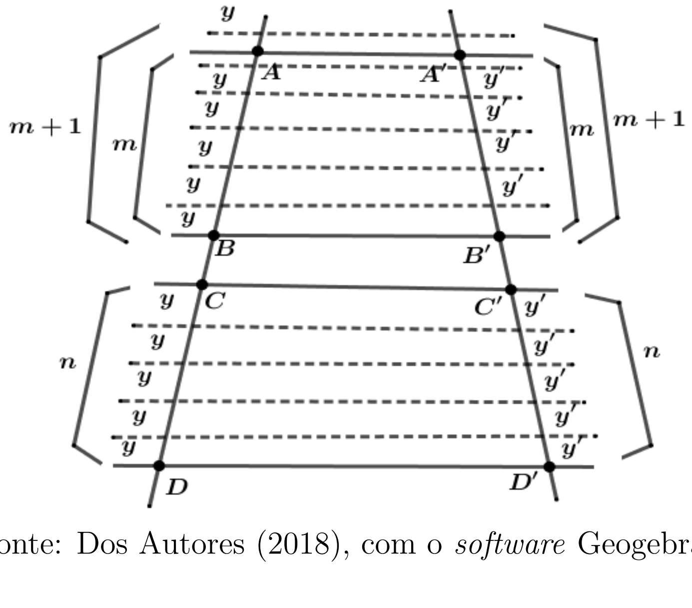
*Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD e usando a proposição 3.3 temos:*

$$A'B' = px' \;\; e \;\; C'D' = qx' \;\; \stackrel{\div}{\Rightarrow} \;\; \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

*Comparando (1) e (2), temos* $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.

***2º Caso****: AB e CD são incomensuráveis.*

Figura 4.36: Feixe de retas 2.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

*Não existe um segmento múltiplo de AB e CD.Tomamos um segmento y multiplo de CD, isto é :*

$$CD = n.y$$

*Por AB e CD incomensuráveis, marcando sucessivamente y em AB, para um certo número inteiro m de vezes, obtemos:*

$$m.y \ < AB < \ (m+1)y$$

*Operando temos:*

$$m.y \ < AB < \ (m+1)y \ \text{ e } \ n.y = CD \ \ \dot{\Rightarrow} \ \ \frac{m}{n} < \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n} \qquad (3)$$

*Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD e usando a proposição 3.3 temos:*

$$C'D' = n.y' \ \text{ e } \ m.y' < A'B' < (m+1)y'$$

*Operando temos:*

$$m.y' \ < A'B' < \ (m+1)y' \ \text{ e } \ n.y' = C'D' \ \ \dot{\Rightarrow} \ \ \frac{m}{n} < \frac{A'B'}{C'D'} < \frac{m+1}{n} \qquad (4)$$

*Temos que y é um número múltiplo de CD que pode variar. Dividindo y, aumentamos n e nestas condições* $\frac{m}{n}$ *e* $\frac{m+1}{n}$ *formam um par de classes que definem um único número real que é* $\frac{AB}{CD}$ *pela expressão (3) e* $\frac{A'B'}{C'D'}$ *pela expressão (4). Como esse número é único, então:*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

. □

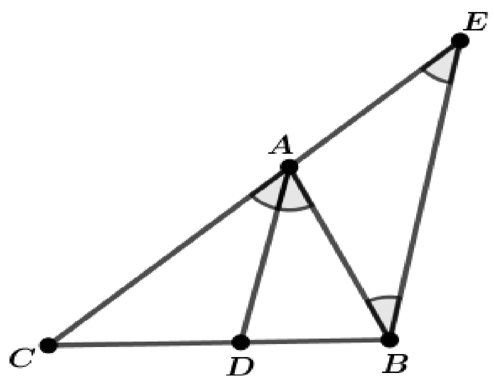
# 4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE TALES

Neste capítulo aplicaremos o Teorema de Tales na demonstração de quatro teoremas clássicos da Geometria Euclidiana.

## 4.1 Teorema da bissetriz interna

**Teorema 4.8.** *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

Figura 4.37: bissetriz interna 1.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

**Demonstração 4.13.** *Seja o triângulo* $ABC$ *da figura 4.37. Considere* $AD$ *a bissetriz interna do ângulo* $\widehat{A}$ *e* $BE$ *um segmento paralelo a* $AD$*, com* $C$*,* $A$ *e* $E$ *colineares. Como* $AD$ *é paralelo a* $BE$*, resulta que* $C\widehat{A}D$ *é congruente a* $A\widehat{E}B$ *(ângulos correspondentes) e* $D\widehat{A}B$ *é congruente a* $A\widehat{B}E$ *(ângulos alternos internos). Portanto,* $A\widehat{B}E$ *é congruente a* $A\widehat{E}B$*. Logo o triângulo* $EAB$ *é isósceles, com* $AE = AB$*.*

*Pelo teorema de Tales, obtemos:*

$$\frac{CA}{CD} = \frac{AE}{DB}$$

*Como $AE = AB$ concluímos que*

$$\frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DB}$$

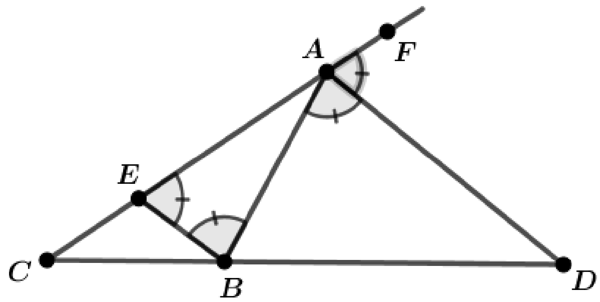
□

## 4.2 Teorema da bissetriz externa

**Teorema 4.9.** *Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta a reta que contém o lado oposto, então ficam determinados, nesta reta, dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

**Demonstração 4.14.** *Usaremos o mesmo raciocínio do Teorema 4.8 .*

Figura 4.38: bissetriz externa 1.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

*Consideremos o triângulo $ABC$ onde $AD$ é bissertriz do ângulo externo de vértice em $A$ e $BE$ um segmento paralelo a $AD$. Como $AD$ é paralelo a $BE$, então $F\widehat{A}D$ é congruente a $A\widehat{E}B$ (ângulos correspondentes) e $D\widehat{A}B$ é congruente a $A\widehat{B}E$ (alternos internos). Portanto, $A\widehat{B}E$ é congruente a $A\widehat{E}B$. Logo o triângulo $EAB$ é isósceles, com $AE = AB$. Pelo teorema de Tales, temos:*

$$\frac{CA}{CD} = \frac{AE}{DB}$$

*Como $AE = AB$, obtemos*

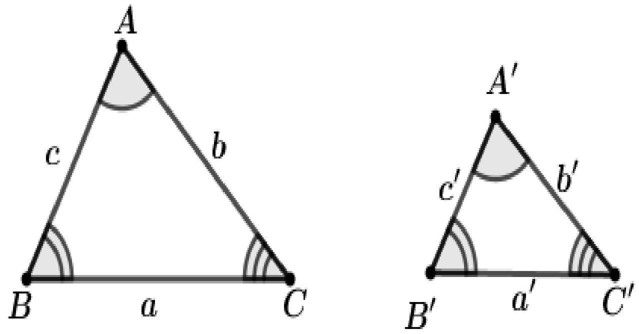
$$\frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DB}$$

□

Antes das próximas aplicações definiremos o conceito de **Semelhança de triângulos**.

**Definição 4.26.** *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

Figura 4.39: semelhança de triângulos.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

$$ABC \sim A'B'C' \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{C} = \widehat{C'} \ e \ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Dois lados homólogos são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes. Sendo $K$ a razão de semelhança entre os lados homólogos, ou seja,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

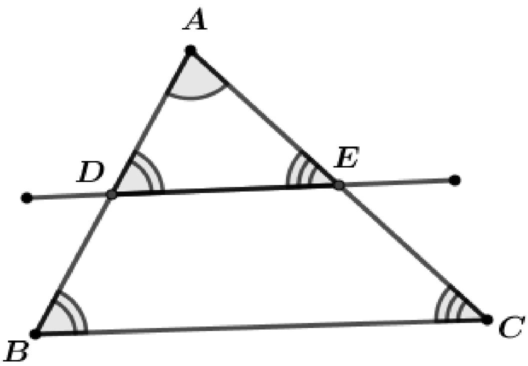
onde $K$ é chamado razão de semelhança de triângulos. Caso $K = l$ então os triângulos são congruentes.

## 4.3 Teorema fundamental

**Teorema 4.10.** *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

**Demonstração 4.15.** *Temos a hipótese que $DE \ // \ BC$ e teremos que provar que $ADE \sim ABC$. Precisamos mostrar que $ADE$ e $ABC$ tem ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais. Observe que:*

Figura 4.40: Teorema fundamental 1.



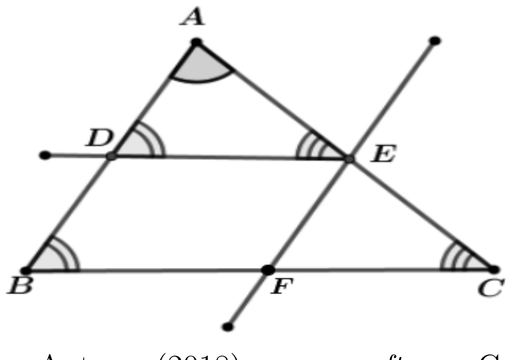

Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

*(I) Ângulos congruentes*

$DE \; // \; BC \quad \Rightarrow \quad \widehat{D} = \widehat{B}$ *e* $\widehat{E} = \widehat{C}$ *(ângulos correspondentes), então temos que:* $\widehat{D} = \widehat{B}$, $\widehat{E} = \widehat{C}$ *e* $\widehat{A}$ *comum.* *(1)*

*(II)Lados proporcionais*

Figura 4.41: Teorema fundamental 2.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

*Pelo Teorema de Tales temos:*

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

*Por E construimos EF paralela a AB, com* $F \in BC$.
*Note que:*

$$Paralelogramo\ BDEF \ \Rightarrow \ DE = BF \ \ e \ \ Teorema\ de\ Tales \ \Rightarrow \ \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

*assim*

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

*Logo* $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ *(2)*

*(III)Resultado*

*(1) e (2)* $\Rightarrow$ $ADE \sim ABC$. $\square$

## 4.4 Teorema de Menelaus

Segundo Macedo ([7], 2014), Menelaus de Alexandria foi um astrônomo e geômetra nascido em Alexandria, Egito, por volta do ano 80. Escreveu uma coleção de seis livros sobre cordas no círculo, um livro denominado de Elementos da Geometria e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos. Continuou os trabalhos de Hiparco[4] em trigonometria e demonstrou o interessantíssimo teorema, que leva o seu nome.

**Teorema 4.11.** *Sejam três pontos D, E e F localizados respectivamente nas retas suportes dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC, e diferentes dos vértices. Se D, E e F são colineares então,*

$$\frac{FA}{FC} \cdot \frac{EC}{EB} \cdot \frac{DB}{DA} = 1$$

**Demonstração 4.16.** *Aplicaremos o teorema de Tales. Trace o seguimento CG paralelo a DF com G no prolongamento de AD. Assim:*

$$\frac{FC}{FA} = \frac{DG}{DA} \Rightarrow \frac{FC}{DG} = \frac{FA}{DA}$$

*então*

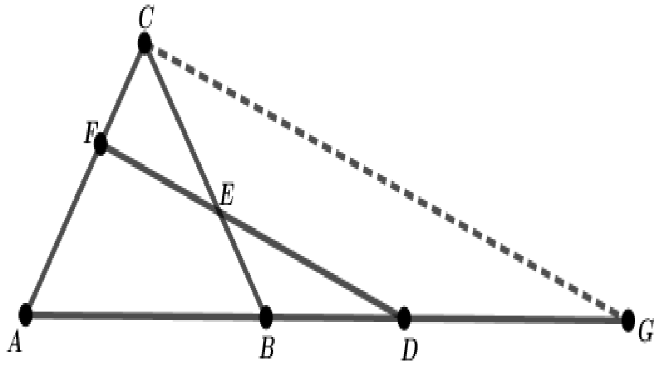
$$DG = \frac{FC.DA}{FA} \qquad (1)$$

*e como o seguimento $CB$ intersecta as retas paralelas $CG$ e $DF$, temos:*

$$\frac{EC}{EB} = \frac{DG}{DB} \Rightarrow \frac{EC}{DG} = \frac{EB}{DB}$$

[4]Astrônomo grego, construtor de máquinas, exímio cartógrafo e matemático da escola de Alexandria, nascido em 190 a.C. em Niceia, na Bitínia, hoje Iznik, na atual Turquia. Viveu em Alexandria, sendo um dos grandes representantes da Escola Alexandrina. Hoje é considerado o fundador da astronomia científica e também chamado de pai da trigonometria.

Figura 4.42: Teorema de Menelaus.




Fonte: Dos Autores (2018), com o *software* Geogebra.

*ou seja,*

$$DG = \frac{EC.DB}{EB} \qquad (2)$$

*Portanto de (1) e (2) temos:*

$$\frac{FC.DA}{FA} = \frac{EC.DB}{EB} \;\Rightarrow\; FA.EC.DB = DA.FC.EB$$

*logo,*

$$\frac{FA}{FC} \cdot \frac{EC}{EB} \cdot \frac{DB}{DA} = 1$$

□

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do estudo apresentou de forma breve os conceitos que fundamentam o teorema de Tales. Inicialmente sua origem foi apresentada, esta deu-se devido aos estudos realizados por Tales de Mileto. Posteriormente apresentamos o teorema de Tales e algumas aplicações. Buscamos uma apresentação convencional, que abra um campo de opções para que leitor possa pensar em como é importante conhecer os conceitos teóricos que abrangem a sustentação de um teorema. Evidentemente os elementos de estudo foram escolhidos de maneira prática e clara, voltadas para esclarecer dúvidas que norteiam a pessoa que procura conhecer o teorema de Tales de uma forma mais analítica.

Esperamos que este trabalho venha contribuir para a melhoria da aprendizagem dos alunos e professores, na medida em que venha subsidiar os professores e alunos no intuito de tornar os teoremas citados mais acessíveis e esclarecedores e assim possa ser mais uma referência de pesquisa para aqueles que querem aprimorar o estudo do teorema de tales na Geometria plana.

# REFERÊNCIAS


[1] BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

[2] CORNELLI, G; COELHO, M. C. M. N. **"Quem não é geômetra não entre!"Geometria, Filosofia e Platonismo**. Kriterion: Revista de Filosofia, v. 48, n. 116, p. 417-435, 2007. Disponível em:< *http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0100-512X2007000200009script=sci_arttext* >. Acesso em: 22 jul. 2017.

[3] DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1993.

[4] FONTANA, J. **Tales de Mileto e a medição da altura da pirâmide**. Metatheoria–Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia, v. 2, n. 1, p. 23-36, 2012. Disponível em: < *http://www.metatheoria.com.ar/index.php/m/article/download/61/72* >. Acesso em: 26 ago. 2017.

[5] LAÊRTIOS, D. **Vidas e doutrinas dos filósofos ilustres, tradução do grego, introdução e notas de Mário da Gama**. Brasília: UnB, 2ª ed, 2008.

[6] LUNA, W. A. **Uma Construção da Geometria Analítica a partir dos Teoremas de Tales e de Pitágoras**. 2013. 70 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013. Disponível em: < *https://mat.ufcg.edu.br/profmat2/wp-content/uploads/sites/5/2015/07/Weidson.pdf* >. Acesso em: 24 ago. 2017.

[7] MACEDO, D. M. R. **Resgatando alguns teoremas clássicos da Geometria Plana**. 2014. 57 f. Dissertação(Mestrado em Matemática)- Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: < *http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8990/1/2014disdmrmacedo.pdf* >. Acesso em: 12 ago. 2017.

[8] MORAES , M. A. **Matemática e Música Grega** . 2011. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Intituto Superior de Educação: Faculdade de Guairacá, Guarapuava , 2011. Disponível em: < *http://br.monografias.com/trabalhos-pdf/matematica-musica-grega/matematica-musica-grega.pdf* >. Acesso em: 08 ago. 2017.