UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

EDSON AZEVEDO MOURA

O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MACAPÁ
2018

EDSON AZEVEDO MOURA

O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Monografia apresentada à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso como exigência para aprovação e posterior obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá.
Orientador: Prof. Dr Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

MACAPÁ
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Bibliotecária Orinete Costa Souza CRB-11/920

515.723
M929u
Moura, Edson Azevedo.
O uso da transformada de Laplace na resolução de problemas /
Edson Azevedo Moura ; orientador, Guzmán Eulálio Isla Chamilco.
-- Macapá, 2018. 74 f.

Trabalho de conclusão de curso (graduação)- Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Equações diferenciais-Equações com retardamento. 3. Laplace, Transformadas de. I.Chamilco, Guzmán Eulálio Isla, Orientador. II.Fundação Universidade Federal do Amapá. III Título.

EDSON AZEVEDO MOURA

O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A banca examinadora aprova a Monografia defendida à mesma, como parte da exigência para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, na área de concentração em Matemática aplicada e equações diferenciais.

MACAPÁ
2018

Prof. Dr Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Orientador - Universidade Federal do Amapá

Solange Regina Cromianski

Profª Dra. Solange Regina Cromianski
UNIFAP

Profº. Me. Kelmem da Cruz Barroso
UNIFAP

AGRADECIMENTOS

Toda honra e glória damos àquele que é digno de recebê-la: nosso Senhor. Por ter me dado forças e determinação pra lutar por meus sonhos.

Agradeço a meus pais EDEVALDO GOMES MOURA e EUDILENA DO SOCORRO BRAGA AZEVEDO, a meus irmãos, meus tios ELIAS DOS SANTOS e MARÍLIA DOS SANTOS, casal abençoado por Deus, e a toda minha família que com muito carinho e apoio mesmo que distantes, não mediram esforços para que eu chegasse até essa etapa da minha vida. Aos meus familiares em geral, por sua capacidade de acreditar em mim e investir. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que me deram esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estava sozinho nessa caminhada. À comunidade da Igreja, pois foi nesse meio que aprendi o verdadeiro valor da minha fé em Deus e, para além do Curso de MATEMÁTICA, foi aqui onde aprendi refletir e duvidar e nunca encarar a realidade como pronta. Aqui aprendi a ver a vida de um jeito diferente. Ao curso de Matemática da UNIFAP, e às pessoas que convivi ao longo desses anos. As experiencias de uma produção compartilhada na comunhão com os amigos nesse espaço foram as melhores na minha vida no que diz respeito à minha formação acadêmica. Agradeço a todos que de alguma forma estiveram ou estão fazendo parte da minha vida.

E o que dizer de você ALICE STEFANY SILVA da SILVA? obrigado pela paciência, pelo incentivo, pela força e principalmente pelo carinho... Valeu apena toda distancia, toda luta, todo sofrimento, todas as renuncias... pois hoje estamos juntos, colhendo uma de varias vitorias.

Agradeço ao mundo por me dá as coisas, por nunca fazer serem da mesma forma, pois assim não teríamos o que pesquisar, o que descobrir e o que fazer; pois através disto consegui concluir minha monografia. Enfim, agradeço a todos.

É necessário dizer que não é a quantidade de informações, nem a sofisticação em Matemática que podem dar sozinhas um conhecimento pertinente, mas sim a capacidade de colocar o conhecimento no contexto.

Edgar Morin

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo do método da Transformada de Laplace e suas propriedades e a maneira como será utilizado na resolução de alguns problemas matemáticos governados por Equações Diferenciais, especialmente por Equações Diferenciais com Retardo e alguns casos de modelos populacionais.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias. Equações Diferenciais com Retardo. transformada de Laplace. Modelo logístico.

ABSTRACT

This work presents a study of the Laplace Transform method and its properties and how it will be used to solve some mathematical problems governed by Differential Equations, especially by Differential Equations with Delay and some cases of population models.

Keywords:Differential Equations with Delay. Laplace Transform. Ordinary Differential Equations. Logistic Model.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em modelagem matemática de diversos fenômenos da natureza, tem-se demonstrado que as equações diferenciais tem um papel importante, pois o estudo destas é uma teoria poderosa para mostrar dados mais precisos do tempo presente e sobre o comportamento de determinadas populações ao longo do tempo por exemplo. Uma técnica matemática denominada Transformada de Laplace ajuda não somente no estudo da análise qualitativa de um modelo matemático governado por uma equação diferencial ordinária, especialmente os modelos de dinâmica populacional, como também na resolução de problemas equacionais que nos deparamos em quase todo dia.

No capítulo 1 deste trabalho, trataremos de forma rápida e concisa sobre os assuntos *Série de Taylor* e *Equação Diferencial Ordinária.* No ponto em que se trata das EDO's, faremos mensão somente de alguns pontos importantes para a aplicação.

No capítulo 2, abordaremos um estudo sobre a transformada de laplace com demonstrações de algumas importantes transformadas, finalizando com a construção de uma tabela de transformadas.

No capítulo 3, faremos menção de forma introdutória, sem um aprofundamento analítico de análise funcional sobre equações diferenciais com retardo, pois deixaremos neste trabalho, um modelo com retardo característico como forma de incentivo para o aluno e os exemplos usados serão assegurados por [3].

Chegando ao capítulo 4, introduziremos as aplicações deste trabalho. Aplicações que vão ser referentes à EDO's, equações diferenciais com retardo e sobre um modelo logístico governado por uma equação diferencial ordinária não-linear do tipo Bernoulli; sendo que estas aplicações, suas soluções serão expressas por meio da transformada de laplace. A finalização deste trabalho se dará com um comentário sobre um modelo populacional derivado do modelo logístico.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

A seguir lembraremos algumas definições básicas necessárias para o andamento deste trabalho. Aqui, veremos definições, inclusive referentes às equações diferenciais ordinárias e alguns pontos referentes ao universo das EDO's e séries de taylor.

1.1 Série de Taylor

Pra começar; supondo que $f(t)$ possa ser representada por uma série de potências do tipo:

$$f(t) = c_0 + c_1(t-a) + c_2(t-a)^2 + c_3(t-a)^3 + ... \tag{1}$$

tomando alguns processos de derivação sobre (1), chegaremos ao seguinte resultado da soma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t-a)^n \tag{2}$$

em que:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

com $f^{(n)}(a)$ a derivada da função f no ponto a. Com isso podemos introduzir a definição sobre este ponto.

Definição 1 ***(Série de Taylor)***

Seja (1) uma função contínua e analítica; então a série de taylor desta função é o polinômio:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^n}{n!} = f(a) + \frac{f'(a)(t-a)}{1!} + \frac{f''(a)(t-a)^2}{2!} + ... \tag{3}$$

com $a \in \mathbb{R}$.

Somente para lembrar, que o caro aluno e leitor deve conter um estudo prévio sobre o assunto de série de potências e mesmo até em relação ao estudo de séries infinitas em geral, tanto no campo do cálculo quanto no campo da análise real. Para verificação sobre o assunto, o interlocutor poder verificar em [6].

1.2 Equação Diferencial

As equações diferenciais funcionam como um suporte matemático para muitas áreas da ciência exatas e da engenharia. Muitos problemas que ocorrem nas ciências naturais (física, química, biologia), nas engenharias e ciências sociais, envolvem a modelagem matemática. Quando formulados matematicamente, esses problemas requerem a determinação de uma função que satisfaça uma equação contendo derivadas de funções incógnitas; ou seja, podemos dizer que as equações diferenciais são equações que contém uma ou mais derivadas da função desconhecida.

As EDO's são equações que envolvem derivadas de funções de somente uma variável independente, por exemplo:

$$\frac{d}{dt}f(t) + f(t) = h(t) \tag{4}$$

Nos modelos populacionais de matemática, seja independente do caso da modelagem, as EDO's são frequentemente usadas para modela-los com o objetivo de representar a variação deste, se for em relação a um modelo sobre população, estas equações servirão para representar a variação da população em relação ao tempo ou até mesmo em relação ao espaço inserido.

Estas equações podem ser classificadas quanto ao seu grau, ordem e até mesmo por sua linearidade. O grau de uma equação diferencial ordinária é tomado em relação à derivada de maior grau ou seja, a derivada que conter o maior expoente, esta representa o grau da EDO. Em relação a sua linearidade, diz-se que uma equação diferencial do tipo:

$$\varphi(t, f, f', f'', f''', ..., f^{(n)}) = h(t)$$

é linear se φ for uma função linear em relação às variáveis $f, f', f'', f''', ..., f^{(n)}$. O caso de linearidade de uma função, o aluno poderá verificar em [1]; assim, podemos representar uma equação diferencial quanto sua ordem da seguinte maneira:

$$k_0(t)f^{(n)}(t) + k_1(t)f^{(n-1)}(t) + k_2(t)f^{(n-2)}(t) + ... + k_n(t)f(t) = h(t)$$

Voltando ao caso de uma equação diferencial linear, nota-se que nestas equações, a variável dependente f e as derivadas são envolvidas por potências iguais a 1, e cada coeficiente k depende somente de t para melhor entendimento. Assim, uma equação que tenha a forma diferente destes requisitos citados acima, são consideradas não-lineares.

Em ralação a solução de uma EDO, dizemos que uma função $f(t)$ é solução, se esta quando substituída na equação, o resultado será a satisfação da identidade; por exemplo a função:

$$f(t) = je^{3t} - 2 \tag{5}$$

é solução da equação:

$$\frac{df}{dt} - 3f(t) = 6 \tag{6}$$

pois se substituirmos $f(t)$ na equação, a igualdade é satisfeita.

Se atentarmos para (5), vemos que há uma constante j na solução; essa constante significa que, para a equação em questão, existe uma família de soluções que satisfazem ela mas se quisermos apenas uma única solução que satisfaça o problema? O que podemos fazer? O problema poderá ser contornado tomando uma condição sobre $f(t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Esse processo chama-se PVI ou problema de valor inicial; por exemplo, se $f(t) = 2$ para $t = 0$, teríamos o seguinte:

$$f(t) = je^{3t} - 2$$

$$\text{com } f(0) = 2$$

$$je^{3.0} - 2 = 2 \Rightarrow j = 4$$

com isso, a única curva que satisfaz (6) no ponto $(0, 2)$ é:

$$f(t) = 4e^{3t} - 2$$

Os leitores podem estar se perguntando se tem como assegurar a existência e unicidade dessas soluções. Como o objetivo deste trabalho não é exatamente mostrar de forma profunda o universo das equações diferenciais, aconselhamos que os leitores possam verificar este caso em [1], [3], [5], [9] e [10].

1.2.1 EDO quanto ordem e escrita

Como bem sabemos, podem existir EDO's de até mesmo ordem n e que podemos escreve-las de muitas maneiras, e dependendo da maneira em que esta se encontra, há um modo ou método que se aplica em sua resolução. Tendo isso como base, vamos particularizar essa ordem e esse método de resolução para esse trabalho; trataremos somente, de forma bem clara as EDO's de primeira ordem(Homogêneas e não-Homogêneas) e as EDO's do tipo Bernoulli, sendo que estas podem ser resolvidas através de substituição, que será citada mais à frente.

Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem linear

Definição 2
Uma EDO é de primeira ordem e linear, se pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{df}{dt} + s(t)f(t) = h(t) \tag{7}$$

Onde se $h(t) = 0$ implica que (7) é do tipo homogênea, caso contrário, (7) será do tipo não-homogênea, e $s(t)$ pode ser igual a uma constante.

Exemplo 1

A equação:

$$\frac{df}{dt} + \frac{f(t)}{2} = 2 + t \tag{8}$$

é uma EDO linear não-homogênea, pois satisfaz todos os requisitos da definição com $h(t) = 2 + t$ e $s(t) = 1/2$.

Definição 3

Uma EDO de primeira ordem que pode ser escrita da forma:

$$\frac{df}{dt} + s(t)f(t) = h(t)(f(t))^n \tag{9}$$

é uma equação de Bernoulli.

Devemos observar que para $n = 0$ e $n = 1$ a equação de Bernoulli se reduz a uma equação diferencial linear agora para n diferente de dos valores citados anteriormente, a equação diferencial torna-se uma EDO não-linear do tipo Bernoulli, e a resolução que mais se adota pela maioria dos matemáticos, é fazendo uma determinada substituição com mudança de variável, que tem como objetivo transformar esta equação não-linear em uma equação linear onde podemos resolve-la por vários métodos existentes dentro do campo do cálculo, e um deles o método de integração, que não introduziremos aqui, o leitor poderá verificar e estuda-lo em [10]. Assim fazendo a mudança de variável na equação (9), que podemos rescreve-la da seguinte maneira:

$$u(t) = (f(t))^{1-n} \Longrightarrow \frac{du}{dt} = (1-n)(f(t))^{-n}\frac{df}{dt}$$

organizando o resultado teremos:

$$\frac{df}{dt} = \frac{(f(t))^n}{(1-n)}\frac{du}{dt}$$

Exemplo 2

Tomando a equação:

$$\frac{df}{dt} + s(t)f(t) = h(t)(f(t))^n$$

e aplicando a substituição, com o intuito de deixa-la na forma linear. Então rescrevendo (9):

$$(1-n)(f(t))^{-n}\frac{df}{dt} + (1-n)s(t)(f(t))^{1-n} = (1-n)h(t)$$

$$\frac{du}{dt} + (1-n)s(t)u(t) = (1-n)h(t) \tag{10}$$

onde observando o formato escrito desta equação vemos que se trata de uma EDO linear, que conseguimos resolve-la sem mais problemas.

Aqui tomamos de forma genérica, no entanto este tipo de equação será tomada no capítulo que vem a tratar sobre o modelo logístico, onde resolveremos a equação que modela este tipo de comportamento via transformada de laplace e faremos uma análise sobre o modelo.

CAPÍTULO 2

TRANSFORMADA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace é um método de resolução de equações diferenciais e dos problemas de valores iniciais dessas equações, que reduz a questão da resolução de uma equação diferencial a um problema algébrico. Tal método tem a vantagem de resolver diretamente os problemas, isto é, os problemas de valor inicial podem ser resolvidos sem que se determine uma solução geral do problema. Além disso, as equações não-homogêneas são resolvidas sem ter que primeiro encontrar a solução das homogêneas correspondentes.

Uma noção da transformada de Laplace, é ter uma mudança de variável, ou uma transformação coordenadas. A transformada de Laplace pode ser comparada com um "tradutor de frases" no qual não somente as palavras diferem, mas também as regras gramaticais contidas em uma frase.

A transformada de Laplace é um dispositivo matemático em homenagem ao matemático francês ***Pierre Simon***, marques de Laplace $(1749 - 1827)$.

2.1 Transformada de Laplace

Para o estudo deste capítulo, é necessário como pré-requisito, o conteúdo de integrais improprias para poder prosseguir em seu estudo, pois estudar as transformadas de Laplace é estudar integrais impróprias.

Definição 1

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$, com $t > 0$, usualmente indicada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou $F(s)$ é dada pela fórmula:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{11}$$

A transformada é definida para todo s para o qual a integral:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

convirja e para todo s para o qual:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt$$

seja finito.

De um ponto de vista diferente, a transformada de Laplace é uma maneira de comparar a função $f(t)$ com função exponencial no intervalo $[0, +\infty)$ usando a integral como instrumento de comparação. A transformada de Laplace é parte de uma classe de transformadas, chamadas de transformadas integrais; que possuem sua forma geral igual à:

$$F(s) = \int_A^B G(s,t)f(t)dt$$

onde $G(s,t)$ é uma função dada.

Também podemos tomar uma transformada integral, como qualquer transformada linear da forma acima descrita, com $G(s,t)$ sendo o núcleo da transformada. O que difere de uma transformada para a outra são exatamente a escolha do núcleo e dos limites de integração A e B. Por exemplo, a transformada de Laplace tem como núcleo da transformada a função exponencial e^{-st} e seu limite de integração vai de 0 à $+\infty$.

2.2 Condições para existência da transformada de Laplace

Diante mão temos que ter a noção que nem todas as integrais de determinadas funções convirjam, assim hão de ter funções cuja a sua transformada de Laplace não exista. Mas como garantir a existência da transformada de Laplace de uma função? Vamos citar duas condições que podem garantir a existência da transformada de Laplace de uma função.

- A função $f(t)$ tem que ser contínua por partes em qualquer que seja o intervalo limitado da seguinte forma: $[0, +\infty)$.
- A função $f(t)$ tem que ser de ordem exponencial para $t > T \in \mathbb{R}$ com $T > 0$.

Definição 2 ***(Função contínua por partes)***
Se diz que uma função $f(t)$ é contínua por partes sobre um intervalo $[a, b]$, se este poder ser dividido em um número finito ou contável de subintervalos onde $f(t)$ é contínua no interior de cada subintervalos de $[a, b]$. E também o limite de $f(t)$ é finito quando tal tende para extremidades de cada subintervalo.

Definição 3 ***(Funções de ordem exponencial)***
Diz-se que uma função dada $f(t)$ é de ordem exponencial θ, sobre um conjunto descrito por $[0, +\infty)$, se existir números $M, T > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

- $|f(t)| \leq Me^{\theta t}$
- para todo $t > T$.

Abaixo um teorema que diz respeito à condição de existência da transformada de Laplace.

Teorema 1 ***(Condições de existência da transformada de Laplace)***

Seja $f(t)$ contínua por partes no intervalo $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial θ , então a sua transformada de Laplace existe para todo $s > \theta$.

Demonstração:

Verificar em [1].

2.3 Propriedades da Transformada

A linearidade da transformada é muito importante, pois sem essa propriedade seria em muitos casos, impossível de se resolver determinados problemas.

Teorema 2 ***(Linearidade)***

Sejam $f(t)$ e $g(t)$, duas funções que admitem transformadas de Laplace. Então valem as igualdades abaixo:

- $\mathcal{L}\{af(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$

Demonstração

A demostração segue diretamente da definição inicial de transformada de Laplace e dos conhecimentos de integrais improprias.

Assim para mostrar que $\mathcal{L}\{af(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\}$, tomemos o seguinte:

$$\mathcal{L}\{af(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} af(t)dt = a \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = a\mathcal{L}\{f(t)\}$$

pois pela definição da própria transformada $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

E para mostrar $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$, tomemos:

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \int_0^{+\infty} [f(t) + g(t)]e^{-st}dt$$

aplicando a propriedade linear das integrais, iremos ter:

$$\int_0^{+\infty} [f(t) + g(t)]e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt$$

que pela definição da própria transformada:

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

resultado que satisfaz a ultima afirmação do teorema.

A prova para o resultado da diferença de duas funções, dentro das condições para a aplicação da transformada, se dá de maneira análoga.

□

Um resultado muito importante dentro da transformada de Laplace na resolução de problemas de valores iniciais, é a transformada de derivadas. Abaixo essa propriedade será posta em forma de um teorema, pois a sua veracidade é de grande importância nos resultados das equações diferenciais com retardamento e ordinárias que abordaremos mais adiante. Mas antes de introduzir o teorema, vamos enunciar um corolário que nos será de grande importância na demonstração do teorema que será inserido.

Corolário 1

Se $f(t)$ é uma função admissível, então sua integral:

$$g(t) = \int_0^t f(\lambda)d\lambda$$

é também admissível com mesma ordem exponencial θ. Assim a transformada de Laplace de $g(t)$ existe para $s > \theta$. A demonstração deste corolário o leitor pode analisar sua veracidade em [11].

Teorema 3 ***(Transformada de Laplace de Derivadas)***

Seja $f', f'', f''', ..., f^{(x-1)}$ contínuas no intervalo $[0, +\infty)$, de ordem exponencial e $f^{(n)}$ for contínua em partes no intervalo dado, então:

$$\mathcal{L}\{f^{(x)}(t)\} = s^x\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{(x-1)}f(0) - s^{(x-2)}f'(0) - ... - f^{(x-1)}(0)$$

.

Demonstração

Para demonstrarmos tal propriedade, vamos deduzir a fórmula geral da nossa primeira transformada da derivada de $f(t)$, que a partir dela vamos fazer com que a igualdade acima posta no teorema seja verdadeira.

Assim sabemos pelo corolário acima que $f(t)$ é admissível e assim $f'(t)$ também será, e com isso seguindo diretamente da definição da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}f'(t)dt$$

resolvendo a integral imprópria pelo método de integração por partes, e neste caso tomemos $u = e^{-st} \Longrightarrow du = -se^{-st}dt$ e $dv = f'(t)dt \Longrightarrow v = f(t)$ chegaremos ao seguinte resultado:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)dt$$

aplicando a substituição mencionada acima:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b udv = \lim_{b \to +\infty} \left(uv|_0^b - \int_0^b vdu \right)$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(e^{-st} f(t)|_0^b + s \int_0^b f(t) e^{-st} dt \right)$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(e^{-s.b} f(b) - e^{-s.0} f(0) + s \int_0^b f(t) e^{-st} dt \right)$$

$$\lim_{b \to +\infty} e^{-sb} f(b) - \lim_{b \to +\infty} e^{-s.0} f(0) + s \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(t) e^{-st} dt$$

Como $\lim_{b \to +\infty} e^{-sb} = 0$ e $f(b)$ é de ordem exponencial, ou seja: $|f(b)| \leq Me^{\theta t}$ com M, θ constantes positivas, então teremos $\lim_{b \to +\infty} e^{-sb} f(b) = 0$. Resultando apenas:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt - f(0)$$

pela definição inicial $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$, e assim:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

suponhamos que $f(t)$ seja derivável mais de uma vez. Pelo corolário 1, $f''(t)$ é uma função admissível pois esta sendo a derivada de $f'(t)$ que como mencionado, é uma função admissível. Assim, para encontrarmos a transformada da segunda derivada de $f(t)$, tomaremos a definição novamente de transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f''(t)dt$$

tomemos $u = e^{-st} \Longrightarrow du = -se^{-st}dt$ e $dv = f''(t)dt \Longrightarrow v = f'(t)$, teremos:

$$\lim_{b \to +\infty} \left(e^{-st} f'(t)|_0^b + s \int_0^b e^{-st} f'(t)dt \right) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(e^{-s.b} f'(b) - e^{-s.0} f'(0) + s \int_0^b e^{-st} f'(t)dt \right) =$$

sabendo que $\lim_{b \to +\infty} e^{-s.b} f'(b) = 0$:

$$\lim_{b \to +\infty} \left(-f'(0) + s \int_0^b e^{-st} f'(t)dt \right) = -f'(0) + s \lim_{b \to +\infty} \left(\int_0^b e^{-st} f'(t)dt \right) =$$

e novamente integrando por partes a integral impropria acima, fazendo $p = e^{-st} \Longrightarrow dp = -se^{-st}dt$ e $dq = f'(t)dt \Longrightarrow q = f(t)$ temos:

$$-f'(0) + s \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-s.b}f(b) - e^{-s.0}f(0) + s\int_0^b e^{-st}f(t)dt\right) =$$

sabendo que $\lim_{b\to+\infty} e^{-s.b}f'(b) = 0$:

$$-f'(0) - sf(0) + s^2 \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st}f(t)dt\right)$$

e pela definição de transformada de Laplace:

$$s^2 \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st}f(t)dt\right) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\}$$

e com isso:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

De forma análoga para $\mathcal{L}\{f'''(t)\}$ teremos:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Suponhamos que esta seja diferenciável x vezes. Então teremos a forma de sua transformada de Laplace da derivada de ordem x da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}\{f^{(x)}(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}f^{(x)}(t)dt = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st}f^{(x)}(t)dt\right)$$

O cálculo desta integral é análogo ao cálculo das integrais anteriores, onde que a cada integração feita a ordem da derivada de $f^{(x)}(t)$ diminui. Veremos o que acontece no tal processo.

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st}f^{(x)}(t)dt\right)$$

tomemos $u = e^{-st} \Longrightarrow du = -se^{-st}dt$ e $dv = f^{(x)}(t)dt \Longrightarrow v = f^{(x-1)}(t)$:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-s.b}f^{(x-1)}(b) - e^{-s.0}f^{(x-1)}(0) + s\int_0^b e^{-st}f^{(x-1)}(t)dt\right) =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-f^{(x-1)}(0) + s\int_0^b e^{-st}f^{(x-1)}(t)dt\right) = -f^{(x-1)}(0) + s\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st}f^{(x-1)}(t)dt\right)$$

fazendo novamente substituição por partes na integral com $p = e^{-st} \Longrightarrow dp = -se^{-st}dt$ e $dq = f^{(x-1)}(t)dt \Longrightarrow q = f^{(x-2)}(t)$.

$$-f^{(x-1)}(0) + s\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-s.b}f^{(x-2)}(b) - e^{-s.0}f^{(x-2)}(0) + s\int_0^b e^{-st}f^{(x-2)}(t)dt\right) =$$

$$= -f^{(x-1)}(0) - sf^{(x-2)}(0) + s^2 \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st} f^{(x-2)}(t)dt\right) =$$

onde fazendo estas integrações continuamente chegaremos ao seguinte resultado:

$$= -f^{(x-1)}(0) - sf^{(x-2)}(0) - s^2 f^{(x-3)}(0) - ... + s^{(x)} \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st} f(t)dt\right) =$$

$$= -f^{(x-1)}(0) - sf^{(x-2)}(0) - s^2 f^{(x-3)}(0) - ... + s^{(x)}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Portanto, tomando os casos particulares como das derivadas anteriormente tratadas e tomando o processo de indução matemática sobre este processo, a transformada de laplace da derivada $x-$ésima é dada da forma:

$$\mathcal{L}\{f^{(x)}(t)\} = s^{(x)}\mathcal{L}\{f(t)\} - ... - s^2 f^{(x-3)}(0) - sf^{(x-2)}(0) - f^{(x-1)}(0)$$

□

2.4 Tabulação de algumas funções e suas respectivas transformadas

Diante dos resultados acima postos, já somos capazes de encontrar algumas transformadas de Laplace de algumas funções mais conhecidas e das que vamos utilizar neste trabalho; onde o calculo dessas transformadas segue diretamente da definição inicial de transformada de Laplace, por isso o leitor precisa ter um conhecimento suficiente sobre integração e limite de funções, vistos principalmente em *cálculo 1*.

(a)$\mathcal{L}\{c\} = c/s$

Demonstração:

Sendo $f(t) = c$, com c uma constante, segue-se da definição de transformada de Laplace e também da propriedade de linearidade da transformada o seguinte:

$$\mathcal{L}\{c\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} c dt = c\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = c\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-st}dt =$$

$$= c\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-s.b}}{s} + \frac{e^{-s.0}}{s}\right) = -c\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{-s.b}}{s}\right) + c\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

portanto, $\mathcal{L}\{c\} = c/s$ para $s > 0$.

□

(b)$\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$

Demonstração:

Sendo $f(t) = t$, segue da definição de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-st} t dt =$$

integrando por partes a integral dada, com $u = t \Longrightarrow du = dt$ e $dv = e^{-st}dt \Longrightarrow v = -e^{-st}/s$ teremos:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{be^{-s.b}}{s} + \frac{0.e^{-s.0}}{s} + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}dt\right) = \frac{1}{s}\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-s.b}}{s} + \frac{e^{-s.0}}{s}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

portanto, $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$ para $s > o$.

$\square$

(c)$\mathcal{L}\{t^c\} = c!/s^{c+1}$

Demonstração:

Temos $c = 1, 2, 3, 4, ...$, e seguindo da definição de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t^c\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^c dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-st} t^c dt =$$

tomemos $u = t^c \Longrightarrow du = ct^{c-1}dt$ e $dv = e^{-st}dt \Longrightarrow v = -e^{-st}/s$:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-s.b}b^c}{s} + \frac{e^{-s.0}0^c}{s} + \frac{c}{s}\int_0^b t^{c-1}e^{-st}dt\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{c}{s}\int_0^b t^{c-1}e^{-st}dt\right)$$

Nota-se que se aplicarmos a definição de transformada de laplace no resultado acima, teremos:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b t^{c-1}e^{-st}dt\right) = \mathcal{L}\{t^{c-1}\}$$

e com isso:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{c}{s}\int_0^b t^{c-1}e^{-st}dt\right) = \frac{c}{s}\int_0^{+\infty} t^{c-1}e^{-st}dt = \frac{c}{s}\mathcal{L}\{t^{c-1}\} =$$

$$\mathcal{L}\{t^c\} = \frac{c}{s}\mathcal{L}\{t^{c-1}\}$$

temos que $c = 1, 2, 3, 4, ...$, e $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$. Tomemos uma sequência de interações:

- $\mathcal{L}\{t\} = (1/s)\,\mathcal{L}\{t^{1-1}\} = (1/s)\,\mathcal{L}\{1\} = (1/s)\,(1/s) = 1/s^2$
- $\mathcal{L}\{t^2\} = (2/s)\,\mathcal{L}\{t^{2-1}\} = (2/s)\,\mathcal{L}\{t\} = (2/s)\,(1/s^2) = 2/s^3$
- $\mathcal{L}\{t^3\} = (3/s)\,\mathcal{L}\{t^{3-1}\} = (3/s)\,\mathcal{L}\{t^2\} = (3/s)\,(2/s^3) = (6/s^4) = 3!/s^4$
- $\mathcal{L}\{t^4\} = (4/s)\,\mathcal{L}\{t^{4-1}\} = (4/s)\,\mathcal{L}\{t^3\} = (4/s)\,(6/s^4) = (24/s^5) = 4!/s^4$
- $\mathcal{L}\{t^5\} = (5/s)\,\mathcal{L}\{t^{5-1}\} = (5/s)\,\mathcal{L}\{t^4\} = (5/s)\,(24/s^5) = (120/s^6) = 5!/s^6$

onde a partir desse resultados podemos obter a forma geral para esta transformada, que se apresenta da seguinte forma:

$$\mathcal{L}\{t^c\} = \frac{c}{s}\mathcal{L}\{t^{c-1}\} = \frac{c}{s}\left[\frac{(c-1)\,!}{s^c}\right] = \frac{c!}{s^{c+1}}$$

□

(d)$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = 1/(s-c)$

Demonstração:

Seguindo na mesma linha de demostração das transformadas anteriores teremos:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = \int_0^{+\infty} e^{ct}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{t(c-s)}dt = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-t(s-c)}dt\right)$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-b.(s-c)}}{s-c} + \frac{e^{0.(c-s)}}{s-c}\right) = \frac{1}{s-c}\lim_{b\to+\infty}(1) = \frac{1}{s-c}$$

portanto:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = \frac{1}{s-c} \qquad\qquad para \quad s > c$$

□

(e)$\mathcal{L}\{e^{ct}\sin(at)\} = a/\left[(s-c)^2 + a^2\right]$

Demonstração:

Tomemos a definição inicial de transformada e apliquemos na função dada, para mostrarmos sua veracidade. Sendo assim:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\sin(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{t(c-s)}\sin(at)dt = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-t(s-c)}\sin(at)dt\right)$$

resolvendo a integral pelo método da integração por partes; tomemos:

$$u = \sin(at) \Longrightarrow du = a\cos(at)dt$$

e

$$dv = e^{-t(s-c)}dt \Longrightarrow v = -(e^{-t(s-c)}/s - c)$$

e assim teremos:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-t(s-c)}\sin{(at)}dt\right) =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\sin{(a.b)}e^{-b.(s-c)}}{(s-c)} + \frac{\sin{(a.0)}e^{-0.(s-c)}}{(s-c)} + \frac{a}{s-c}\int_0^b e^{-t(s-c)}\cos{(at)}dt\right)$$

como $sin(ab)$ é limitada e de ordem exponencial, temos:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\sin{(a.b)}e^{-b.(s-c)}}{(s-c)}\right) = 0$$

e

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\sin{(a.0)}e^{-0.(s-c)}}{(s-c)}\right) = 0$$

restando apenas o seguinte resultado:

$$\frac{a}{s-c}\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-t(s-c)}\cos{(at)}dt\right)$$

novamente aplicando integração por partes na integral acima e substituindo:

$$p = \cos{(at)} \Longrightarrow dp = -a\sin{(at)}dt$$

e

$$dq = e^{-t(s-c)}dt \Longrightarrow q = -\frac{e^{-t(s-c)}}{s-c}$$

fazendo as substituições devidas na integral, chegaremos à:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\cos{(a.b)}e^{-b.(s-c)}}{(s-c)} + \frac{\cos{(a.0)}e^{-0.(s-c)}}{(s-c)} - \frac{a}{s-c}\int_0^b e^{-t(s-c)}\sin{(at)}dt\right) =$$

novamente temos que $cos(a.b)$ uma função limitada e sendo assim:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\cos{(a.b)}e^{-b.(s-c)}}{(s-c)}\right) = 0$$

e

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\cos{(a.0)}e^{-0.(s-c)}}{(s-c)}\right) = \frac{1}{s-c}$$

restando:

$$\frac{a}{s-c}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{s-c}-\frac{a}{s-c}\int_0^b e^{-t(s-c)}\sin{(at)}dt\right)=$$

$$=\frac{a}{(s-c)^2}-\frac{a^2}{(s-c)^2}\int_0^{+\infty} e^{-t(s-c)}\sin{(at)}dt=$$

podemos então fazer uma relação de igualdade:

$$\mathcal{L}\{e^{-t(s-c)}\sin{(at)}\}=\frac{a}{(s-c)^2}-\frac{a^2}{(s-c)^2}\mathcal{L}\{e^{-t(s-c)}\sin{(at)}\}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{(s-c)^2}\right)\mathcal{L}\{e^{-t(s-c)}\sin{(at)}\}=\frac{a}{(s-c)^2}$$

$$\left(\frac{(s-c)^2+a^2}{(s-c)^2}\right)\mathcal{L}\{e^{-t(s-c)}\sin{(at)}\}=\frac{a}{(s-c)^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t(s-c)}\sin{(at)}\}=\frac{a}{(s-c)^2}\frac{(s-c)^2}{(s-c)^2+a^2}=\frac{a}{(s-c)^2+a^2}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{e^{-t(s-c)}\sin{(at)}\}=\frac{a}{(s-c)^2+a^2}$$

satisfazendo a igualdade acima.

□

(f)$\mathcal{L}\{e^{ct}\cos{(at)}\}=(s-c)/[(s-c)^2+a^2]$

Demonstração:

A demonstração desta transformada é dada de forma análoga ao da última transformada demonstrada e sendo que alguns resultados desta serão utilizados na demonstração.

(g)$\mathcal{L}\{e^{ct}\sinh{(at)}\}=a/[(s-c)^2-a^2]$

Demonstração:

Sabemos que:

$$\sinh{(t)}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

e de resultados anteriores temos $\mathcal{L}\{e^{ct}\}=1/(s-c)$ e substituindo na definição de transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\sinh{(at)}\}=\mathcal{L}\left\{e^{ct}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{(c+a)t}-e^{(c-a)t}}{2}\right\}$$

aplicando propriedade de linaeridade da transformada:

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{(c+a)t}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{(c-a)t}\right\}\right)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{(c+a)t}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{(c-a)t}\right\}$$

usando o resultado:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = 1/(s-c)$$

teremos:

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{(c+a)t}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{(c-a)t}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(c+a)} - \frac{1}{s-(c-a)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s-c+a-s+c+a}{[s-(c+a)][s-(c-a)]}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{(s-c-a)\,(s-c+a)}\right) =$$

$$\frac{a}{s^2-2cs-a^2+c^2} = \frac{a}{(s-c)^2-a^2}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}\sinh{(at)}\right\} = \frac{a}{(s-c)^2-a^2}$$

$\square$

(h) $\mathcal{L}\{e^{ct}\cosh{(at)}\} = (s-c)/[(s-c)^2-a^2]$

Demonstração:

Sabemos que:

$$\cosh{(t)} = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

e temos de resultados anteriores que $\mathcal{L}\{e^{ct}\} = 1/(s-c)$ e substituindo na definição de transformada de Laplace, termos:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\cosh{(at)}\} = \mathcal{L}\left\{e^{ct}\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{(c+a)t}+e^{(c-a)t}}{2}\right\}$$

aplicando propriedade de linearidade da transformada:

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{(c+a)t}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{(c-a)t}\right\}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{(c+a)t}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{(c-a)t}\right\}$$

usando o resultado:

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = 1/(s-c)$$

teremos:

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{(c+a)t}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{(c-a)t}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(c+a)} + \frac{1}{s-(c-a)}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s-c+a+s-c-a}{[s-(c+a)][s-(c-a)]}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s-2c}{(s-c-a)\,(s-c+a)}\right) =$$

$$\frac{s-c}{s^2-2cs-a^2+c^2} = \frac{s-c}{(s-c)^2-a^2}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}\cosh(at)\right\} = \frac{s-c}{(s-c)^2 - a^2}$$

para todo $s > c$.

$\square$

(i)$\mathcal{L}\{e^{ct}[X\cos(at) + ((Xc+Y)/a)\sin(at)]\} = [(Xs+Y)/(s-c)^2 + a^2]$

Demonstração:

Para esta demonstração iremos usar os princípios de linearidade da transformada de Laplace e os resultados obtidos nas transformadas dos itens (e) e (f) encontradas acima. Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}\left[X\cos(at)+\frac{Xc+Y}{a}\sin(at)\right]\right\} =$$

$$= X\mathcal{L}\left\{e^{ct}\cos(at)\right\} + \frac{Xc+Y}{a}\mathcal{L}\left\{e^{ct}\sin(at)\right\} =$$

$$= X\left(\frac{s-c}{(s-c)^2 + a^2}\right) + \frac{Xc+Y}{a}\left(\frac{a}{(s-c)^2 + a^2}\right) =$$

$$= \frac{Xs - Xc}{(s-c)^2 + a^2} + \frac{Xc+Y}{(s-c)^2 + a^2} = \frac{Xs+Y}{(s-c)^2 + a^2}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}\left[X\cos(at) + \frac{Xc+Y}{a}\sin(at)\right]\right\} = \frac{Xs+Y}{(s-c)^2 + a^2}$$

para todo $s > c$.

$\square$

(j)$\mathcal{L}\{e^{ct}[X\cosh(at) + (Xc+Y)/a)\sinh(at)]\} = (Xs+Y)/[(s-c)^2 - a^2]$

Demonstração:

Para a demostração desta transformada, novamente usaremos a propriedade de linearidade da transformada e as transformadas das funções (g) e (h) demonstradas acima.

Assim:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}\left[X\cosh(at) + \frac{Xc+Y}{a}\sinh(at)\right]\right\} =$$

$$= X\mathcal{L}\left\{e^{ct}\cosh(at)\right\} + \frac{Xc+Y}{a}\mathcal{L}\left\{e^{ct}\sinh(at)\right\}$$

usando as transformadas (g) e (h) teremos:

$$X\left(\frac{s-c}{(s-c)^2 - a^2}\right) + \frac{Xc+Y}{a}\left(\frac{a}{(s-c)^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{Xs - Xc}{(s-c)^2 - a^2} + \frac{Xc + Y}{(s-c)^2 - a^2}$$

e portanto teremos que:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}\left[X\cosh(at) + \frac{Xc+Y}{a}\sinh(at)\right]\right\} = \frac{Xs+Y}{(s-c)^2 - a^2}$$

para todo $s > c$.

$\square$

(l) $\mathcal{L}\left\{p^k\right\} = (1 - e^{-s})/s\,(1 - pe^{-s})$ para $k \leq t < k+1$, com $k = 0, 1, 2, 3, ...$

Demonstração:

Tomemos por definição de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{p^k\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}p^k dt$$

como $k = 0, 1, 2, 3, ...$ e $k \leq t < k+1$, podemos dessa forma tomar a seguinte soma de integrais, vislumbrando uma de suas propriedades lineares. Assim:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}p^k dt = \int_0^1 e^{-st}p^0 dt + \int_1^2 e^{-st}p^1 dt + \int_2^3 e^{-st}p^2 dt + ...$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^1 e^{-st}p^0 dt + \int_1^2 e^{-st}p^1 dt + \int_2^3 e^{-st}p^2 dt + ... \int_t^{t+1} e^{-st}p^t dt\right)$$

Resolvendo cada integral acima:

$$\int_0^1 e^{-st}dt = -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$\int_1^2 e^{-st}p dt = p\left(-\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s}\right) = p\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$$

$$\int_2^3 e^{-st}p^2 dt = p^2\left(-\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\right) = p^2\frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$$

$$\int_t^{t+1} e^{-st}p^t dt = p^t\left(-\frac{e^{-(t+1)s}}{s} + \frac{e^{-ts}}{s}\right) = p^t\frac{e^{-ts} - e^{-(t+1)s}}{s}$$

fazendo a substituição de cada resultado, iremos ter:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}p^k dt = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1 - e^{-s}}{s} + p\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} + p^2\frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s} + ... + p^t\frac{e^{-ts} - e^{-(t+1)s}}{s}\right)$$

tomando $(1-e^{-s})/s$ como evidência, chegaremos a um resultado do tipo :

$$\frac{1-e^{-s}}{s}\lim_{t\to+\infty}\left(1+pe^{-s}+p^2e^{-2s}+...+p^te^{-ts}\right)$$

tomando limite sobre a soma em questão e definição de série potências, veremos que a soma infinita:

$$\sum_{t=0}^{+\infty}p^ke^{-st}=1+pe^{-s}+p^2e^{-2s}+...$$

para $k=0,1,2,3,...$ à cada soma parcial da série, se encaixa nos critérios e tomando a representação desta soma em uma dada função; estudo visto no curso de cálculo e que pode ser verificado em [6], veremos que esta soma representa a seguinte função:

$$\sum_{t=0}^{+\infty}p^ke^{-st}=1+pe^{-s}+p^2e^{-2s}+...=\frac{1}{1-pe^{-s}}$$

e então:

$$\frac{1-e^{-s}}{s}\left(1+pe^{-s}+p^2e^{-2s}+...\right)=\frac{1-e^{-s}}{s}\left(\frac{1}{1-pe^{-s}}\right)=\frac{1-e^{-s}}{s(1-pe^{-s})}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{p^k\right\}=\frac{1-e^{-s}}{s(1-pe^{-s})}$$

□

(m) $\mathcal{L}\left\{e^{ct}f(t)\right\}=F(s-c)$

Demonstração:

Pela definição de transformada de laplace temos:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}f(t)\right\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{ct}f(t)dt=$$

sabemos que:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=F(s)$$

então:

$$\int_0^{+\infty}e^{-(s-c)t}f(t)dt=F(s-c)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{e^{ct}f(t)\right\}=F(s-c)$$

□

(n) $\mathcal{L}\{f(ct)\} = (1/s)\, F\,(s/c)$
Demonstração:
Tomemos:

$$\mu = ct \Longrightarrow d\mu = cdt$$
$$t = \frac{\mu}{c}$$

seguindo da definição de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} e^{-s\left(\frac{\mu}{c}\right)} f(\mu)d\mu$$

Sendo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

então teremos:

$$\frac{1}{c}\int_0^{+\infty} e^{-s\left(\frac{\mu}{c}\right)} f(\mu)d\mu = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$$

para $c > 0$.

□

(o) $\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\mu)d\mu\right\} = (1/s)\, F(s) - (1/s)\int_a^t f(\mu)d\mu$
Demonstração:
Segue-se da definição de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\mu)\right\} = \int_0^{+\infty}\left(\int_a^t f(\mu)d\mu\right)e^{-st}dt$$

tomando $h(t) = \int_a^t f(\mu)d\mu$:

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_a^t f(\mu)d\mu\right)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$$

Resolvendo a integral aplicando o método de integração por partes, fazendo a seguinte substituição:

$$u = h(t) \Longrightarrow du = h'(t)dt$$
$$dv = e^{-st}dt \Longrightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

Assim:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b h(t)e^{-st}dt\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{h(b)e^{-s.b}}{s} + \frac{h(0)e^{-s.0}}{s} + \frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}h'(t)dt\right)$$

como $h(b)$ é admissível e $\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-s.b}/s\right) = 0$ temos assim que:

$$\lim_{b\to+\infty} h(b)\left(e^{-s.b}/s\right) = 0$$

restando:

$$\frac{h(0)}{s} + \frac{1}{s}\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st}h'(t)dt\right) = \frac{h(0)}{s} + \frac{1}{s}F(s) =$$

$$\frac{h(0)}{s} + \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_a^0 f(\mu)d\mu = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(\mu)d\mu$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\mu)d\mu\right\} = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(\mu)d\mu$$

□

Por meio dessas transformadas encontradas, podemos expor a tabela abaixo:

Função	**Transformadas**
$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$
(a) $\mathcal{L}\{c\}$	c/s
(b) $\mathcal{L}\{t\}$	$1/s^2$
(c) $\mathcal{L}\{t^c\}$	$c!/s^{c+1}$
(d) $\mathcal{L}\left\{\frac{t^{c-1}}{(c-1)!}\right\}$	$1/s^c$
(e) $\mathcal{L}\{e^{ct}\}$	$1/(s-c)$
(f) $\mathcal{L}\{e^{ct}\sin(at)\}$	$a/\left[(s-c)^2+a^2\right]$
(g) $\mathcal{L}\{e^{ct}\cos(at)\}$	$(s-c)/[(s-c)^2+a^2]$
(h) $\mathcal{L}\{e^{ct}\sinh(at)\}$	$a/[(s-c)^2-a^2]$
(i) $\mathcal{L}\{e^{ct}\cosh(at)\}$	$(s-c)/[(s-c)^2-a^2]$
(j) $\mathcal{L}\{e^{ct}[X\cos(at)+(Xc+Y)/a)\sin(at)]\}$	$((Xs+Y)/[(s-c)^2+a^2]$
(l) $\mathcal{L}\{e^{ct}[X\cosh(at)+(Xc+Y)/a)\sinh(at)]\}$	$(Xs+Y)/[(s-c)^2-a^2]$
(m) $\mathcal{L}\{p^k\}$	$(1-e^{-s})/s(1-pe^{-s})$
(n) $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$	$F(s-c)$
(o) $\mathcal{L}\{f(ct)\}$	$(1/s)F(s/c)$
(p) $\mathcal{L}\left\{\int_a^t f(\mu)d\mu\right\}$	$(1/s)F(s)-(1/s)\int_a^t f(\mu)d\mu$

Tabela 1.1: Tabela das principais transformadas.

2.5 Transformada inversa de Laplace

Para obtermos a transformada de uma função contínua por partes e de ordem exponencial; faz-se uma transformação de $f(t)$ em uma função $F(s)$. A transformada inversa de Laplace, é a transformação de uma função $F(s)$ em uma função $f(t)$; ou seja:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Um exemplo de como podemos enxergar a transformada inversa de laplace de uma função, é o exemplo (b) da tabela acima; pois se $\mathcal{L}\{t\} = 1/s$, então a sua transformada inversa será $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = t$.

As mesmas propriedades de linearidade que são validas na transformada de Laplace, serão validas também para as transformadas inversas, como segue abaixo no teorema.

Teorema 4 ***(Linearidade da transformada inversa de Laplace)***
Se $F(s)$ e $G(s)$ admitem transformada de Laplace, então:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)\} = af(t)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) \pm bG(s)\} = af(t) \pm bg(t)$$

Pois seguindo diretamente da definição de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

tomemos $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e com esse dois resultados necessariamente temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t)$$

Assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{a\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{a\mathcal{L}\{f(t)\}\} = af(t)$$

mostrando a primeira parte do teorema. Para demonstrar a segunda parte do teorema, faremos o mesmo caminho percorrido na primeira parte, assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) \pm bG(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{a\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \pm b\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)dt\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{a\mathcal{L}\{f(t)\} \pm b\mathcal{L}\{g(t)\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{a\mathcal{L}\{f(t)\}\} \pm \mathcal{L}^{-1}\{a\mathcal{L}\{g(t)\}\}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) \pm bG(s)\} = af(t) \pm bg(t)$$

Assim com as ideias das duas afirmações dadas no teorema 4, podemos seguir mencionando alguns exemplos, para melhor fixar a ideia sobre a inversa da transformada de Laplace. Sendo que para a imersão dentro desse mundo das transformadas inversas, o caro leitor precisa ter um conhecimento sobre frações parciais, vide [9], pois não será feita uma revisão sobre este assunto aqui neste trabalho.

□

Exemplo 1

A transformada inversa de Laplace da função $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\}$*, recorrendo à tabela* (1.1)*, é igual à* $f(t) = c$*, sendo* c *uma constante.*

Exemplo 2

Vamos encontrar a transformada inversa de laplace da função $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^5\}$*.*

Resolução:

Tomando com referência a tabela (1.1) vemos que, podemos relacionar tal função com a forma geral de uma transformada inversa do tipo $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^c\}$, onde neste caso $c = 5$, e cuja inversa da transformada será:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^c}\right\} = \frac{t^{c-1}}{(c-1)\,!} = \frac{t^{5-1}}{(5-1)\,!} = \frac{t^4}{4!} = \frac{t^4}{24}$$

Assim $f(t) = t^4/24$.

□

Exemplo 3

Encontremos a transformada inversa de laplace da função:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$$

Resolução:

Analisando $F(s)$, podemos fazer uma comparação com a transformada do item (f) da tabela (1.1) tomando $c = 0$ e assim teríamos:

$$\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

fazendo $9 = 3^2$, vemos que pela transformada de $sin(at)$, o numerador da fração apresenta a mesma constante a presente no denominador da fração, sendo assim, para contornarmos esse problema, vamos multiplicar a função $F(s)$ por $3/3$ e usando a linearidade da transformada inversa de laplace, poderemos relacionar os resultados:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{3}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}$$

sendo $[3/(s^2+3^2)] = \mathcal{L}\{\sin(3t)\}$:

$$\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\sin(3t)\}\} = \frac{1}{3}\sin(3t)$$

Portanto temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = f(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$$

□

Exemplo 4

Analisemos a transformada inversa da função $F(s)$ igual a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\}$$

Resolução:

Para a resolução desta transformada inversa, lançaremos mãos da propriedade de linearidade da transformada inversa, assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+7}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+7}\right\} =$$

$$= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}\right\} + \frac{5}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}\right\} =$$

analisando na tabela (1.1), veremos que:

$$3\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\cos\left(\sqrt{7}t\right)\right\}\right\} + \frac{5}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\sin\left(\sqrt{7}t\right)\right\}\right\} =$$

$$= 3\cos\left(\sqrt{7}t\right) + \frac{5}{\sqrt{7}}\sin\left(\sqrt{7}t\right) = 3\cos\left(\sqrt{7}t\right) + \frac{5\sqrt{7}}{7}\sin\left(\sqrt{7}t\right)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} = f(t) = 3\cos\left(\sqrt{7}t\right) + \frac{5\sqrt{7}}{7}\sin\left(\sqrt{7}t\right)$$

□

Exemplo 5

Tomando $F(s)$ igual a:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$$

calculemos qual será $f(t)$.

Resolução:

Primeiramente para começarmos a modelar cada termo desta função, vamos expandir a fração geral em frações parciais. Assim, expandindo em frações parciais:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X}{(s-1)} + \frac{Y}{(s+2)} + \frac{Z}{(s+4)}\right\}$$

calculando os valores referentes à X, Y e Z, chegaremos respectivamente aos valores $1/15$,$-1/6$ e $1/10$. Com isso os nossos cálculos se resumem em tomarmos as seguintes transformadas inversas:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{15(s-1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{6(s-1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10(s-1)}\right\}$$

aplicando a propriedades de linearidade da transformada inversa, teremos:

$$\frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} + \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)}\right\}$$

levando em consideração os resultados da tabela (1.1), teremos que:

$$\frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{e^{t}\right\}\right\} - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\right\}\right\} + \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\}\right\} =$$

$$\frac{1}{15}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t} = f(t)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = f(t) = \frac{1}{15}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}$$

$\square$

Exemplo 6

Calculemos a seguinte transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}$$

Resolução:

Para a resolução desta transformada inversa o caro leitor deverá aplicar novamente frações parciais referente a fração acima. Sendo assim, expandindo tal fração do seguinte modo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Z}{s^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Ws+V}{s^2+4}\right\}$$

onde por igualdade de polinômios teremos que $X = 1/8$, $Y = 3/4$, $Z = -1/2$, $W = -1/8$ e $V = -3/4$. Substituindo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{4s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{8}s - \frac{3}{4}}{s^2+4}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{4s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{8}s}{s^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{4}}{s^2+4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} =$$

relacionando com a tabela (1.1), e fazendo alguns ajustes nas frações, teremos:

$$= \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} - \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} =$$

Sendo:

- $\mathcal{L}\{c=1\} = 1/s$
- $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$
- $\mathcal{L}\{t^{c-1}/(c-1)!\} = \mathcal{L}\{t^{3-1}/(3-1)!\} = 1/s^3$
- $\mathcal{L}\{\cos(2t)\} = s/[s^2+2^2]$
- $\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = 2/[s^2+2^2]$

Sendo assim; substituindo os resultados acima, teremos que :

$$f(t) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{3}{8}\sin(2t)$$

□

2.6 Produto convolução

Em matemática, particularmente na área de análise funcional e processamento do sinal, convolução é um operador linear que, a partir de duas funções dadas, resulta numa terceira que mede a soma do produto dessas funções ao longo da região subentendida pela superposição delas em função do deslocamento existente entre elas. O conceito de convolução está ligado à integral de superposição na Óptica de Fourier, à integral de Duhamel na teoria das vibrações, ao Teorema de Borel no estudo de sistemas lineares invariantes no tempo, ao conceito de média móvel, às funções de correlação e de auto-correlação em estatística e em processamento de sinais, e a diversos conceitos usados em análise de imagens, como digitalização, alisamento, embaçamento e aberração cromática.

Como dito acima, a integral e tomada como uma integral de superposição; mas aqui neste ponto tomaremos a convolução como uma integral indefinida, sendo que o aluno pode muito bem analisar os outros tipos de convolução que existe, onde citaremos aqui, mas não sera objeto de estudo para nos neste trabalho. Temos os tipos de convolução: *convolução contínua, convolução discreta,convolução cíclica e convolução como uma integral indefinida*, sendo que esta ultima será tomada neste trabalho, o restante ficará como objeto de incentivo de pesquisa para o aluno.

A definição abaixo é uma extensão de convolução contínua para funções $f(t)$ e $g(t)$ definidas no intervalo $[0;+\infty)$.

Definição 2.6.1 ***(Produto convolução)***

Sejam as funções $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas por partes dentro do intervalo $[0;+\infty)$, pode-se ter então o produto convolução de $f(t)$ e $g(t)$ da forma

$$f * g = \int_0^t f(\mu)g(t-\mu)d\mu$$

Exemplo 1

Calculemos o produto convolução das funções $f(t) = 2e^t$ e $g(t) = \cos(t)$

Resolução:

Seguindo diretamente da definição acima, temos:

$$f * g = \int_0^t 2e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu = 2\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu$$

o que temos que fazer agora é somente resolver esta integral impropria para encontrarmos o produto convolução destas funções. Tomemos integração por partes na integral, sendo:

$$u = e^{\mu} \Longrightarrow du = e^{\mu}d\mu$$

e

$$dv = \cos(t-\mu)\,d\mu \Longrightarrow v = -\sin(t-\mu)$$

com isso:

$$2\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu = 2\left(-e^t\sin(t-t) + e^0\sin(t-0) + \int_0^t e^{\mu}\sin(t-\mu)\,d\mu\right) =$$

$$= 2\sin(t) + 2\int_0^t e^{\mu}\sin(t-\mu)\,d\mu$$

tomando novamente integração por partes sobre a integral, sendo:

$$p = e^{\mu} \Longrightarrow dp = e^{\mu}d\mu$$

e

$$dq = \sin(t-\mu)\,d\mu \Longrightarrow q = \cos(t-\mu)$$

então:

$$2\int_0^t e^{\mu}\sin(t-\mu)\,d\mu = 2e^t\cos(t-t) - 2e^0\cos(t-0) - 2\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu =$$

$$= 2e^t - 2\cos(t) - 2\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu$$

fazendo a seguinte relação de igualdade:

$$2\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu = 2\sin(t) + 2\int_0^t e^{\mu}\sin(t-\mu)\,d\mu$$

e substituindo o ultimo resultado, teremos:

$$2\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu = 2\sin(t) + 2e^t - 2\cos(t) - 2\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu =$$

$$4\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu = 2\sin(t) + 2e^t - 2\cos(t) =$$

$$\int_0^t e^{\mu}\cos(t-\mu)\,d\mu = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos(t) + \sin(t)\right)$$

e com isso, temos o seguinte resultado:

$$2e^t * \cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos(t) + \sin(t)\right)$$

□

Definição 2.6.2 ***(Comutatividade)***
O produto convolução entre duas funções será comutativo, ou seja:

$$f * g = \int_0^t f(\mu)g(t-\mu)d\mu = \int_0^t g(\mu)f(t-\mu)d\mu = g * f$$

O resultado acima será de grande valia para o desenvolvimento do teorema abaixo, que mostraremos aplicando o princípio da transformada de laplace, pois f e g são contínuas, e mais precisamente, contínuas por partes em um dado intervalo. Sendo assim, vamos ao teorema.

Teorema 4 ***(Teorema de convolução)***

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ contínuas por partes no intervalo $[0,+\infty)$, e sejam estas de ordem exponencial; então:

$$\mathcal{L}\{f*g\} = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$$

E uma ideia de sua demonstração é que tomando a definição de transformada de laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

assim, se tomarmos a transformada da convolução de duas funções, essa ficara da seguinte forma substituindo na definição acima:

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left[f(t)*g(t)\right]dt$$

tomemos a definição (2.6.1):

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\left[f(t)*g(t)\right]dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left[\int_0^t f(\mu)g(t-\mu)d\mu\right]dt$$

tendo como base algumas definições vistas durante o curso de cálculo, que o caro aluno tenha feito, podemos ter e^{-st} como uma contante quando tomada integrável em relação à $d\mu$. Sendo assim:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\left[\int_0^t f(\mu)g(t-\mu)d\mu\right]dt = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t e^{-st}f(\mu)g(t-\mu)d\mu\right]dt$$

tomando $f(\mu)$ como uma constante e assim ficaremos com as integrais integradas da seguinte forma;

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t e^{-st}f(\mu)g(t-\mu)d\mu\right]dt = \int_0^{+\infty} f(\mu)\left[\int_0^t e^{-st}g(t-\mu)dt\right]d\mu$$

tomando $p = t-\mu \Longrightarrow t = p+\mu$ e para μ fixo, temos $dt = dp$. Assim:

$$\int_0^{+\infty} f(\mu)\left[\int_0^t e^{-st}g(t-\mu)dt\right]d\mu = \int_0^{+\infty} f(\mu)\left[\int_0^t e^{-s(p+\mu)}g(p)dp\right]d\mu =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\mu)\left[\int_0^t e^{-sp}e^{-s\mu}g(p)dp\right]d\mu = \int_0^{+\infty} e^{-s\mu}f(\mu)d\mu\left[\int_0^t e^{-sp}g(p)dp\right]$$

e por definição temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\mu}f(\mu)d\mu\left[\int_0^t e^{-sp}g(p)dp\right] = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$$

satisfazendo a demonstração.

A forma inversa do teorema de convolução, tomaremos como a definição abaixo posta seguida de um exemplo que ficar para o caro aluno leitor verificar.

□

Definição 2.6.3 ***(Forma inversa do teorema de convolução)***
Tomando como referencia o teorema 4 desta seção, temos a seguinte relação:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\} = f * g$$

O exemplo abaixo servirá para o leitor verificar a autenticidade da definição, levando e consideração as transformadas inversas da tabela (1.1). Assim segue o exemplo:

Exemplo 2
Tomemos a seguinte transformada inversa de laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

onde para se encontrar $f(t)$ dessa transformada inversa o caro aluno tera que aplicar o produto convolução. Tal dica esta sendo dada pois o aluno que não se atentar a apresentação desta transformada, terá o risco de toma-la $f(t)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1}\right\} = \sin(t)\cos(t)$$

onde $g(t) = \cos(t)$ e $h(t) = \sin(t)$ são as funções correspondentes às transformadas inversas da função acima. No entanto essa forma de pensar não é considerada correta, pois a definição da forma inversa do teorema de convolução nos dá a seguinte forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\} = f * g$$

ou seja, o caro aluno terá que aplicar o produto convolução sobre $g(t)$ e $h(t)$. O caro leitor que se propor a aplicar tal método, encontrara a seguinte função resultante da sobreposição desta duas funções:

$$f(t) = \frac{1}{2}t\sin(t)$$

ou seja:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1}\right\} = g(t) * h(t) = \frac{1}{2}t\sin(t)$$

□

2.7 Função de Heaviside

Em matemática, a função de Heaviside (ou função degrau como conhecemos) é uma função singular e função descontínua com valor zero quando o seu argumento é negativo e valor unitário quando o argumento é positivo. Nos casos em que o argumento é nulo seu valor assume a média dos limites laterias da função (pela esquerda e pela direita) calculados no ponto em que a abscissa vale c. Levando em consideração somente uma complementação desta função para o estudo que esta sendo feito sobre transformada de laplace, adotaremos como mais conveniente para este estudo a função do tipo $U(t-c)$, particularizando para somente $t \geq 0$.

2.7.1 Definição *(Função de Heaviside)*

Seja $U(t-c)$ uma função de Heaviside com descontinuidade em $t=c$, então esta é da forma:

$$U(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > c \end{cases}$$

Graficamente esta pode ser representada da seguinte forma:

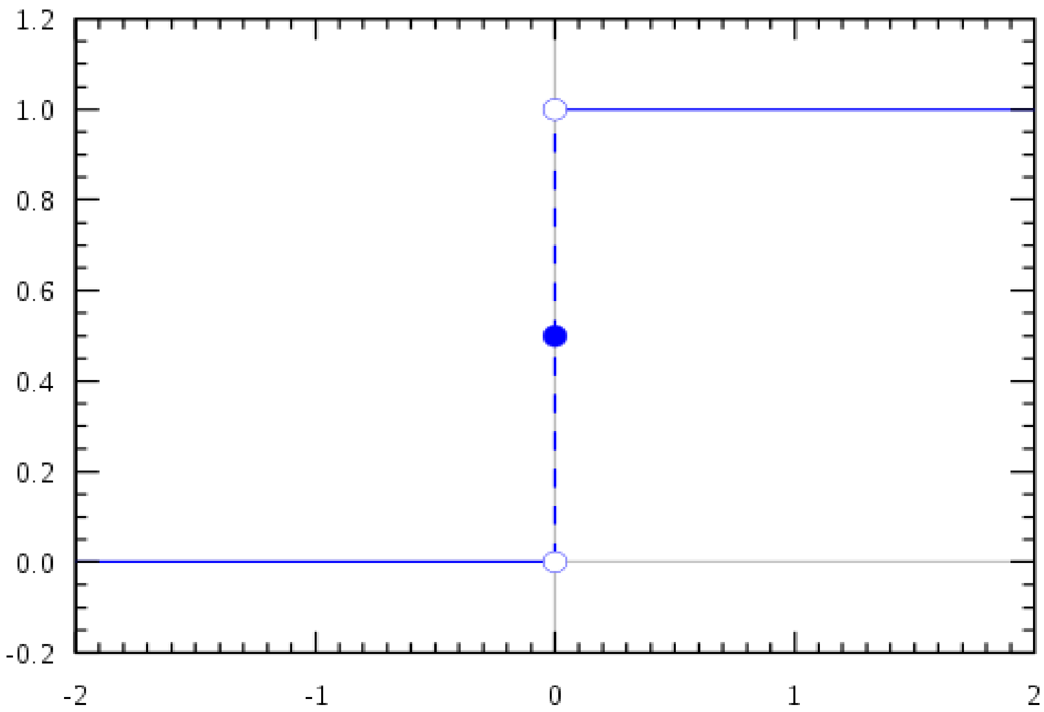

Figura 1.1: *Exemplo de Função de Heaviside*
Fonte: *wikipédia(2018)*

Exemplo 1

Esbocemos o grafico da seguinte função:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Resolução:

Perante o que a função nos mostra, podemos ter o seguinte gráfico:

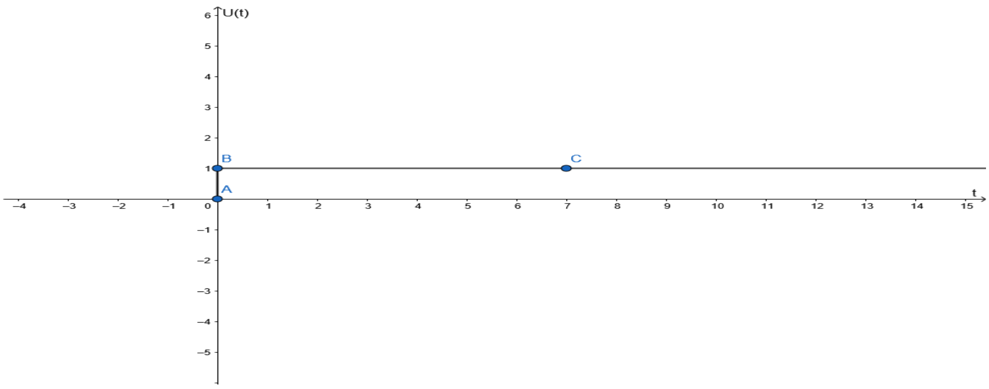

Figura 1.2: *Função de Heaviside com* $c = 0$
Fonte: *geogebra online*

Uma característica muito interessante dessa função, principalmente do seu comportamento de gráfico, é que se esta for multiplicada por outra função $g(t)$ definida neste caso para $t \geq 0$, a função de heaviside cancelará determinada parte do traçar do gráfico.

Exemplo 2

Seja a função:

$$f(t) = \sin(t)U(t - 6,28) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 6,28 \\ \sin t, & t \geq 6,28 \end{cases}$$

Resolução:

Diante disso temos o seguinte grafico :

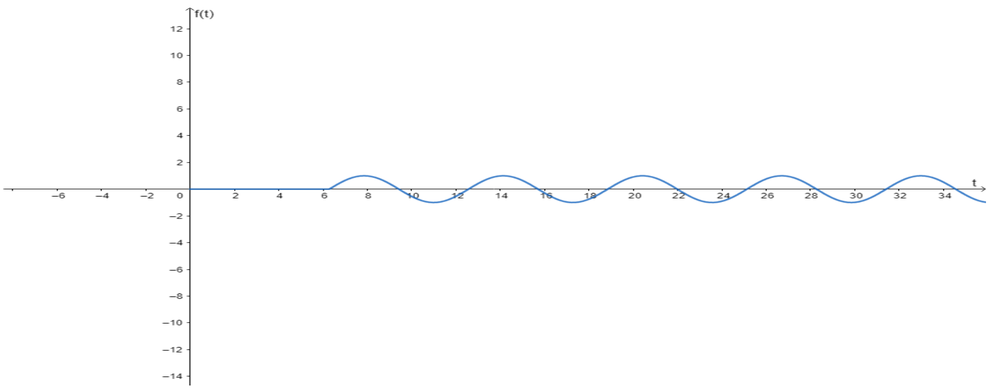

Figura 1.3: *Função de Heaviside com* $c = 6,28$ *multiplicada* $g(t)$
Fonte: *geogebra online*

A função de heaviside, mesmo sendo uma função descontínua, esta possui transformada de laplace. A seguir mostraremos isso.

Teorema 5 ***(Transformada da função de heaviside)***
Seja:

$$U(t-c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

com $c > 0$, então:

$$\mathcal{L}\{U(t-c)\} = \frac{e^{-sc}}{s}$$

Demonstração:

Decorrendo diretamente da definição de transformada de laplace, para a função de heaviside com $s > 0$, teremos:

$$\mathcal{L}\{U(t-c)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}U(t-c)dt$$

seguindo sobre os valores assumidos pela função de heaviside e determinados intervalos, teremos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}U(t-c)dt = \int_0^{c} e^{-st}U(t-c)dt + \int_c^{+\infty} e^{-st}U(t-c)dt$$

$$= \int_0^{c} e^{-st}.0dt + \int_c^{+\infty} e^{-st}.1dt = \lim_{b\to+\infty} \int_c^{b} e^{-st}dt$$

resolvendo essa integral iremos ter:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-s.b}}{s} + \frac{e^{-s.c}}{s}\right) = \frac{e^{-s.c}}{s}$$

e com isso chegamos à parte final do teorema, cujo resultado é:

$$\mathcal{L}\left\{U(t-c)\right\} = \frac{e^{-s.c}}{s}$$

satisfazendo o enunciado do teorema.

$\square$

Teorema 6
Seja:

$$g\left(t-c\right)U(t-c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ g\left(t-c\right), & t \geq c \end{cases}$$

com $c > 0$*, então:*

$$\mathcal{L}\left\{g(t-c)U(t-c)\right\} = e^{-sc}G(s)$$

Demostração:
Seguindo novamente da definição de transformada de lapalce:

$$\mathcal{L}\left\{g(t-c)U(t-c)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} g\left(t-c\right)U(t-c)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t-c)U(t-c)dt = \int_0^{c} e^{-st} g(t-c)U(t-c)dt + \int_c^{+\infty} e^{-st} g(t-c)U(t-c)dt =$$

$$= \int_0^{c} e^{-st} g(t-c).0dt + \int_c^{+\infty} e^{-st} g(t-c).1dt = \lim_{b \to +\infty} \int_c^{b} e^{-st} g(t-c)dt$$

resolvendo a integral pelo método de substituição, tomando a substituição $u = t - c \Longrightarrow du = dt$, iremos ter a seguinte integral:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} e^{-s(u+c)} g(u)du = \lim_{b \to +\infty} e^{-sc} \int_0^{b} e^{-su} g(u)du =$$

$$= e^{-sc} \int_0^{+\infty} e^{-su} g(u)du = e^{-sc}\mathcal{L}\left\{g(u)\right\} = e^{-sc}G(s)$$

resultado que finaliza a demonstração do teorema.

$\square$

2.8 Função Delta de Dirac

Na matemática, a função delta de Dirac, também conhecida como função δ, é uma distribuição na reta real, a qual vale infinito no ponto zero e é nula no restante da reta. A integral da função Delta de Dirac em toda reta é definida como tendo valor 1, e esta foi introduzida pelo físico teórico Paul Dirac em 1930.

Pode-se pensar no Delta de Dirac como um retângulo infinitamente estreito e infinitamente alto, com área igual à unidade. Em muitos casos, pode ser encarado como o limite de funções que tendem a estas condições. Além disso, se enfocarmos no contexto de processamento de sinais, ela é frequentemente interpretada como um impulso unitário.

Matematicamente podemos dizer que o Delta de Dirac não pode ser caracterizado propriamente como uma função, mas sim como um objeto matemático. Isso porque qualquer função que valha zero em todos os pontos exceto um, deve ter integral nula em toda a reta. Entretanto, quando em uma integral, ganha sentido matemático e, para a maioria dos propósitos, pode ser encarado e manipulado como uma função.

Tal objeto tem uma relação com a função de heaviside, sendo esta em certo sentido, dizer que a delta de Dirac é a derivada da função Heaviside, ou que a integral da delta de Dirac é a função de passo Heaviside, o aluno poderá fazer uma verificação disto mais a frente com os futuros resultados. Para adentrarmos na definição formal desta "função", faremos menção de algumas definições importantes e de uma distribuição de força como introdução para estas definições.

Tomemos o caso de uma força tomada por $g(t)$ com $c = 0$.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\kappa \\ \frac{1}{2\kappa}, & -\kappa < t < \kappa \\ 0, & t \geq \kappa \end{cases}$$

com κ uma constante pequena e positiva.

Sendo também que $c - \kappa < t < c + \kappa$ muito grande no intervalo acima e igual a zero em outros pontos. E a sua integral, temos como denota-la da seguinte forma:

$$F(\kappa) = \int_{c-\kappa}^{c+\kappa} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

sendo a medida da intensidade da força. Podemos escrever esta integral desta maneira pelo fato de que não ira alterar

$$\int_{c-\kappa}^{c+\kappa} f(t)dt$$

pois ja que $f(t)$ se anula fora de $[c - \kappa, c + \kappa]$.

Definição 2.8.1

Seja $f(t)$ com as propriedades acima, então:

$$\lim_{\kappa \to 0} f(t) = +\infty$$

Definição 2.8.2
Seja novamente $f(t)$ posta de maneira igual à distribuição tomada acima, então:

$$\lim_{\kappa \to 0} F(\kappa) = \lim_{\kappa \to 0} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \right) = 1$$

Com as definições (2.8.1) e (2.8.2), podemos definir a função delta de Dirac.

Definição 2.8.3 (*Função Delta de Dirac*)
Uma função de Delta de Dirac, designada por $\delta(t)$, é definida contendo as seguintes propriedades:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Para tomarmos para qualquer ponto, tomemos as relações acima a seguinte forma:

$$\delta(t-c) = \begin{cases} +\infty, & t = c \\ 0, & t \neq c \end{cases}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-c)dt = 1$$

com c uma constante.

A ideia acima pode ser vista no grafico abaixo, onde este representa a função Delta de Dirac com centro $c = 0$, tal que podemos entende-la como um a forma de distribuição que no ponto $t = 0$ tende para infinito e nos demais pontos diferentes de zero, sempre serão iguais a zero.

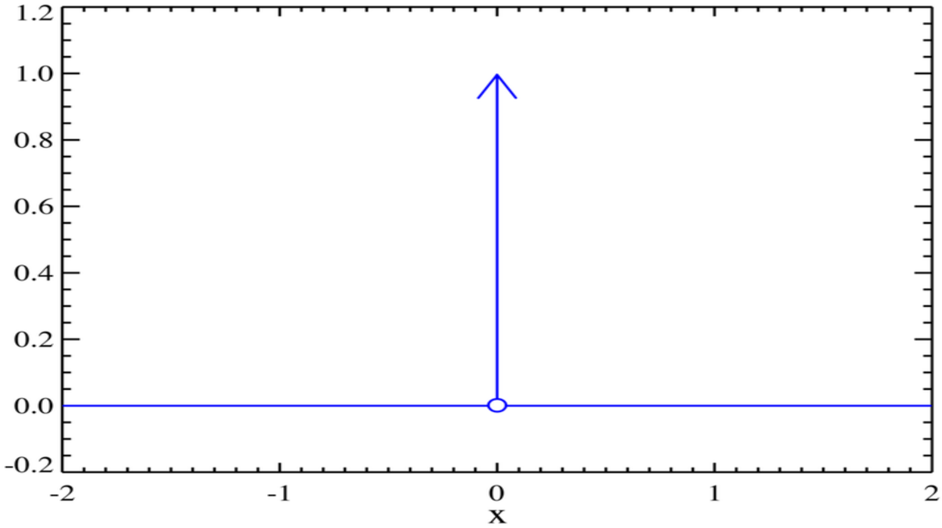

Figura 1.4: *Função Delta de Dirac, centrada em zero*
Fonte: *Wikipédia 2018*

Assim como a função de heaviside, a função Delta de Dirac mesmo não sendo uma função admissível, esta apresenta transformada de laplace.

Teorema 7 ***(Transformada da Função Delta de Dirac)***
Seja $\delta(t-c)$ de Dirac, para $c > 0$, temos:

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-c)\right\} = e^{-sc}$$

Demonstração:
Para começarmos a demostração deste teorema suponhamos que a seguinte igualdade:

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-c)\right\} = \lim_{\kappa\to 0} \mathcal{L}\left\{\delta_{\kappa}\left(t-c\right)\right\}$$

Assim seguindo das definições acima postas, é diferente de zero no intervalo $[c-\kappa, c+\kappa]$ e ainda, $c-\kappa > 0$, e com isso:

$$\mathcal{L}\left\{\delta_{\kappa}\left(t-c\right)\right\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\delta_{\kappa}\left(t-c\right)dt = \int_{c-\kappa}^{c+\kappa} e^{-st}\delta_{\kappa}\left(t-c\right)dt$$

podemos substituir $\delta_{\kappa}\left(t-c\right)$ por $1/2\kappa$, teremos:

$$\int_{c-\kappa}^{c+\kappa} e^{-st}\delta_{\kappa}\left(t-c\right)dt = \int_{c-\kappa}^{c+\kappa} e^{-st}\frac{1}{2\kappa}dt = \frac{1}{2\kappa}\int_{c-\kappa}^{c+\kappa} e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{2s\kappa}\left(e^{-s(c+\kappa)} - e^{-s(c-\kappa)}\right) = \frac{1}{2s\kappa}e^{-st}\left(e^{s\kappa} - e^{-s\kappa}\right) = \frac{e^{-st}}{s\kappa}\frac{\left(e^{s\kappa} - e^{-s\kappa}\right)}{2} =$$

$$= \frac{e^{-st}}{s\kappa}\sinh\left(s\kappa\right)$$

tomemos limite sobre o resultado:

$$\lim_{\kappa\to 0}\frac{e^{-st}}{s\kappa}\sinh(s\kappa) = e^{-st}\lim_{\kappa\to 0}\frac{\sinh(s\kappa)}{s\kappa}$$

vemos que este limite não esta bem definido quando $\kappa \to 0$, sendo assim, tomando o teorema de L'Hospital para resolve-lo, pois esta função se encontra nos requisitos para a aplicação do teorema. Assim:

$$e^{-st}\lim_{\kappa\to 0}\frac{\sinh(s\kappa)}{s\kappa} = e^{-st}\lim_{\kappa\to 0}\frac{\sinh'(s\kappa)}{(s\kappa)'} = e^{-st}\lim_{\kappa\to 0}\frac{s\cosh(s\kappa)}{s} = e^{-st}$$

Portanto:

$$\lim_{\kappa\to 0}\mathcal{L}\{\delta_\kappa(t-c)\} = e^{-st} = \mathcal{L}\{\delta(t-c)\}$$

□

Com isso definimos o estudo sobre a transformada de laplace, sendo que alguns resultados que ficaram em aberto, o aluno poderá resolve-los, onde com isso este irá deter um conhecimento mais fixo em relação ao assunto.

CAPÍTULO 3

INTRODUÇÃO À EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDO

Neste capítulo, daremos definições elementares e mostraremos algumas das características essenciais de equações diferenciais com retardo, particularmente o caso mais simples — com um único retardo constante, e a coeficientes constantes. Os resultados que iremos mostrar são bastante conhecidos e retirados de livros texto clássicos, como [3] e [8]. Abordaremos os temas de maneira informal, omitindo demonstrações com rigor mais avançado e mesmo definições mais gerais, que podem ser encontradas nas referências já citadas.

Antes de adentrarmos nas noções iniciais das equações diferenciais com retardo, temos que lembrar que essas equações fazem parte de um conjunto maior de equações; as ***equações diferenciais funcionais***. Uma equação diferencial funcional é aquela em que a variável dinâmica — e possivelmente suas derivadas — possui argumentos calculados em instantes diferentes. Aqui cabe distinguirmos equações diferenciais funcionais do tipo retardada de equações neutras ou avançadas. As retardadas — as únicas que abordaremos aqui de maneira simples, fazendo com que se tenha um bom entendimento — contêm argumentos em instantes passados apenas na própria variável dinâmica $f(t)$, e não em suas derivadas, exemplos:

$$f'(t) - f(t-2) = 0$$

e

$$f'(t) - f\left(t - \frac{\sqrt{3}}{t}\right) = 0$$

Equações neutras apresentam argumentos com retardo tanto na variável dinâmica quanto em sua derivada e as do tipo avançadas, apenas na derivada. O tipo mais simples de dependência do passado nas $EDFs$*(Equações Diferenciais Funcionais)* são as Equações Diferenciais Funcionais Retardadas ($EDFRs$) ou simplesmente Equações Diferenciais com Retardo(EDR), por exemplo, a equação diferencial com retardado linear:

$$f'(t) = Af(t) + Bf(t-c)$$

onde A, B e $c > 0$ são constantes. A primeira pergunta que podemos fazer é sobre o problema de valor inicial para a equação acima, ou melhor, qual é o mínimo de informações que devemos ter para que tal defina uma função $f(t)$ para $t \geq 0$? Refletindo, chega-se a conclusão de que uma função deve ser especificada em no intervalo $[-c, 0]$ e, naturalmente, tomamos o estado em um instante t como sendo a solução em $[t - r, t]$.

3.1 Definição Introdutória *(EDR)*

Uma equação diferencial com retardo é a equação que pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{df}{dt} = g\left(t, f(t), f(t-\tau)\right) \tag{12}$$

seguida de uma condição inicial:

$$f(t_0) = \varphi(t_0) \qquad t_0 \in [-\tau, 0]$$

onde seus argumentos estão presentes em instantes passados apenas na variável dinâmica, e τ é o tempo de atraso presente na equação.

Para melhor entendimento; se g for contínua, então encontrar uma solução de (12), com valor inicial dado , é equivalente resolvermos a equação integral:

$$f(t) = \begin{cases} \varphi\left(t - t_0\right) & para \quad t \in [t_0 - c, t_0] \\ \varphi\left(0\right) - \int_{t_0}^{t} f(s, f_s) ds & para \quad t \in [t_0, t_0 + c] \end{cases}$$

Observação: *Este resultado trata-se de um lema que o caro leitor poderá buscar para estudos em* [2]*. Optamos em não fazer citação direta deste lema pois para a sua demonstração teríamos que fazer um estudo fluente com relação à área de análise funcional e alguns resultados de análise real* 1*, e como o referido assunto (EDR) será posto como um comentário introdutório neste trabalho, vamos coloca-lo de forma direta e limpa ao aluno de graduação, omitindo demonstrações rigorosas.*

Podemos observar que nesse tipo de equação, a determinação da solução de f depende não apenas do conhecimento da mesma em um instante t_0 , como no caso de uma EDO como sabemos, mas sim do conhecimento da solução em um instante anterior a t_0. É preciso conhecer um certo "passado"da solução anterior ao instante t_0, no exemplo seguinte podemos observar tal comportamento. Para melhor fixação, vamos a um exemplo de uma resolução genérica de uma EDR de forma recursiva.

Exemplo 1

Consideremos a equação diferencial funcional com retardo discreto:

$$f'(t) = \begin{cases} g(t, f(t-1)) & se \quad t > 1 \\ f(t) = \varphi(t) & se \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

Solução:

Vamos supor g e φ contínuas. Para $t \in [1,2]$ a solução que iremos denotar por $f_1(t)$ que satisfaz:

$$f_1'(t) = \begin{cases} g(t, f_1(t-1)) = g(t, \phi(t-1)) & se \quad t \in [1,2] \\ f_1(t) = \varphi(t) \end{cases}$$

Pelo *"Lema"* acima posto e aplicando integração na equação acima temos:

$$\int_1^t f_1'(t) = \int_1^t g(s, \varphi(s-1))ds =$$

$$f(t) - f(1) = \int_1^t g(s, \varphi(s-1))ds$$

$$f(t) = \varphi(1) + \int_1^t g(s, \varphi(s-1))ds$$

isso para $t \in [1,2]$.

Se conhecemos a solução da equação no intervalo $[n-1, n]$, a equação a qual denotaremos por $f_{n-1}(t)$, é também nossa solução também no intervalo $[n, n+1]$ e assim satisfará a equação:

$$\begin{cases} f'_n(t) = g\left(t, f_n(t-1)\right) = g\left(t, f_{n-1}(t-1)\right) & se \quad t \in [n, n+1] \\ f_n(n) = f_{n-1}(n) \end{cases}$$

ou seja, pelo comentário sobre o lema, vamos ter:

$$f_n(t) = \varphi\left(1\right) + \int_1^t g\left(s, f_{n-1}(s-1)\right) ds \qquad para \quad t \in [n, n+1]$$

Portanto, a solução da equação ficará determinada para $t \geq 0$ e esta satisfará:

$$f(t) = f_n(t) \qquad \forall t \in [n, n+1]$$

.

$\square$

Sobre mais resultados com rigor analítico sobre por exemplo existência e unicidade de solução local dessas equações o caro leitor poderá verificar novamente em [2].

Exemplo 2

Tomemos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} f'(t) = f\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \\ f(0) = \varphi(0) = \sin(\theta), \quad \forall_\theta \in \left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right] \end{cases}$$

Resolução:

Vamos construir de forma recursiva intervalo por intervalo a unica solução da equação dada. Assim para:

- Para $t \in [0, 3\pi/2]$

Temos pelo *"Lema"*:

$$\int_0^t f'(t)dt = \int_0^t f\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds$$

aplicando propriedades de integração e de trigonometria na equação acima teremos:

$$f_1(t) - f_1(0) = \int_0^t \sin\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds$$

$$f_1(t) = \sin(0) - \cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(t)$$

- Para $t \in [(3\pi/2), 3\pi]$

Novamente teremos:

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^t f'(t)dt = \int_{\frac{3\pi}{2}}^t f\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds$$

aplicando o mesmo procedimento do item anterior:

$$f_2(t) = \sin(3\pi/2) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \sin\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds =$$

$$f_2(t) = \sin(3\pi/2) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \sin\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds =$$

$$= -1 + \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \sin\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds =$$

$$= -1 - \cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) + 1 = \sin(t)$$

Assim tomando de forma sucessiva esta resolução, teríamos que:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t), & t \in [(-3\pi/2), 0] \\ \sin(t), & t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Se por outro lado, somente por curiosidade, tomarmos o PVI:

$$\begin{cases} f'(t) = f\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \\ f(0) = \phi(0) = \cos(\theta), \quad \forall_\theta \in \left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right] \end{cases}$$

de forma análoga, a sua solução recursiva é obtida e dada como:

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t), & t \in [(-3\pi/2), 0] \\ \cos(t), & t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

□

Algo muito curioso nota-se aqui. Nota-se que as soluções $sin(t)$ e $cos(t)$ se interceptam em infintos pontos, o que pelo teorema de existência e unicidade de *EDO's* isso pode não ser possível, porém como se tratando de *EDR* isso pode ser possível, como o caro leitor poderá ver em [2] .

Mas você leitor pode estar se perguntando, "posso aplicar a transformada de laplace nestes casos?"sim você pode! no entanto, para o *Exemplo 2*, teriamos que fazer um breve estudo sobre a *Transformada de laplace Bilateral*; aqui neste trabalho estamos tratando da transformada unilateral, cujo intervalo de aplicação é $[0, +\infty)$.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES

Neste ponto do trabalho começaremos as aplicações dos respectivos pontos abordados anteriormente com uma abordagem sobre um modelo logístico *-modelagem de EDO-* mediante resolução via transformada de laplace.

4.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Neste ponto, trataremos de alguns exemplos da aplicação da transformada de laplace na resolução de algumas equações diferenciais ordinárias. Esta aplicação é bem satisfeita pois o estudo feito sobre este funcional linear *(transformada de laplace)* nos garante a aplicação nas funções que usualmente se tomam.

Algo que podemos ter garantia de uso nas resoluções, é concernente ao uso da transformada de laplace de derivadas. Com isso, será de grande valia a existência de um valor inicial no problema; as outras transformadas estão postas com suas respectivas demonstrações logo acima neste trabalho, de forma clara e sucinta.

Exemplo Aplicado 1

Apliquemos a transformada de laplace na equação diferencial ordinária e explicitemos sua solução. Sendo esta a EDO:

$$\frac{df}{dt} - 5f(t) = 0$$

com $f(0) = 2$.

Resolução:

Aplicando a transformada em ambos os lados da igualdade, juntamente com as propriedades de linearidade da transformada do teorema 3 teremos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} - 5\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) - 5\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = 0$$

como $f(0) = 2$, temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s-5) = 2 \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{(s-5)}$$

Aplicando a transformada inversa, chegaremos à solução do PVI:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)}\right\}$$

$$f(t) = 2e^{5t}$$

□

Exemplo Aplicado 2
Determinemos a solução da EDO abaixo:

$$\frac{df}{dt} - 5f(t) = 0$$

sendo $f(\pi) = 2$.

Observação: O nosso PVI não se encontra mais no ponto $t = 0$ e sim no ponto $t = \pi$, mesmo sendo a mesma equação resolvida no *exemplo* 1 *aplicado*, só que desta vez queremos sua solução em ponto diferente,pois a transformada de laplace que sempre conhecemos, nos fornece um ponto $f(0) = c$ para facilitar os cálculos na transformada da derivada. Aqui, este exemplo ficará com uma forma de exercício para o caro leitor.

Exemplo Aplicado 3
Seja a EDO do tipo:

$$\frac{d^2f}{dt^2} + 4f(t) = 0$$

com $f(0) = 2$ *e* $f'(0) = 2$. *Explicitemos a sua solução.*

Resolução:

Aplicando a transformada de laplace na equação:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} + 4\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

usando os resultados referentes a transformada da derivada e os valores iniciais, teremos:

$$s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) + 4\mathcal{L}\{f(t)\} = 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}\left(s^2+4\right) = 2s + 2$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2s+2}{(s^2+4)} = \frac{2s}{(s^2+4)} + \frac{2}{(s^2+4)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}$$

Analisando os resultados na tabela [1.1] vemos que a solução será:

$$f(t) = 2\cos(2t) + \sin(2t)$$

$\square$

4.2 Equações Diferenciais com Retardo

Aqui iremos aplicar a transformada na resolução de alguns exemplos de equações diferenciais com retardamento, sem analisar os pontos de equilíbrio de cada equação, que é um ponto muito importante. Temos garantia da aplicação da transformada nessas equações mediante resultados de análise funcional, vide [3], e de cálculo, vide [8]. Assim:

Exemplo Aplicado 4
Seja a equação diferencial com retardo:

$$f'(t) + f(t-1) = t^2$$

dentro das condições impostas pela definição inicial de equações diferenciais com retardo, e tendo como valor inicial $f(t) = 0$ para $t \leq 0$, aplicando o método da transformada de laplace, vamos exibir sua solução.

Resolução:

Por tal função ser supostamente contínua, podemos tomar a transformada de laplace na equação, e assim teremos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} + \mathcal{L}\{f(t-1)\} = \mathcal{L}\left\{t^2\right\}$$

recorrendo aos estudos sobre transformadas de laplace, iremos ter, dentro das condições impostas pelo PVI deste exemplo:

- $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{f(t-1)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-1)dt = e^{-s}\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{t^2\} = 2/s^3$

Substituindo na equação inicial deste exemplo:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} + \mathcal{L}\{f(t-1)\} = \mathcal{L}\left\{t^2\right\} \Rightarrow s\mathcal{L}\{f(t)\} + e^{-s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}\left(s + e^{-s}\right) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^3\left(s+e^{-s}\right)} =$$

$$= \frac{2}{s^4\left(1 + \frac{e^{-s}}{s}\right)} = \frac{2}{s^4\left(1 - \left(-\frac{e^{-s}}{s}\right)\right)}$$

Podemos muito bem expandir esta função em soma de potências; assim, expandindo em serie de potencias a função acima:

$$\frac{2}{s^4\left(1-\left(-\frac{e^{-s}}{s}\right)\right)} = \frac{2}{s^4}\left(1-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}-\frac{e^{-3s}}{s^3}+...\right) =$$

$$= \frac{2}{s^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}$$

temos então o seguinte resultado:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}$$

tomando a transformada inversa de laplace juntamente com suas propriedades de linearidade que nos possibilitara aplicar a inversa da transformada na soma exibida equação. Portanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\}$$

Trabalhando na inversa desta transformada, para que possamos ver uma função conhecida, onde desde já vemos que esta transformada inversa pode ser da forma $e^{-ns}F(s)$. Para não confundirmos com a notação da tabela exibida neste trabalho, podemos fazer $t = n$, assim:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n e^{-ns}}{s^{(n+3)+1}}\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+3)!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}(n+3)!}{s^{(n+3)+1}}\right\}$$

Então já estamos dentro e com as condições de ter a transformada inversa da função. Logo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{(n+3)!}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ns}F(s)\right\} = \sum_{n=0}^{[t]}\frac{2(-1)^n U(t)(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}$$

Analisando a função de heaveside no intervalo do somatório, temos:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & para \quad t < n \\ 1, & para \quad t \geq n \end{cases}$$

onde neste caso; n varia de 0 até o inteiro menor ou igual a t . Assim $U(t) = 1$.

E com isso, temos a solução da equação expandida em uma soma da forma:

$$f(t) = 2\sum_{n=0}^{[t]}(-1)^n\frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}$$

□

Exemplo Aplicado 5

Encontrar a solução ou a família de soluções para a equação diferencial com retardo dada da seguinte forma:

$$3f'(t) - 4f(t-1) + f(t-2) = t$$

novamente com as condições de existência do exemplo anterior, com $f(t) = 0$ *para* $t \leq 0$.

Resolução:

Tomando transformada de laplace em ambos os lados da equação e aplicando suas propriedades de linearidades, obtemos:

$$3\mathcal{L}\{f'(t)\} - 4\mathcal{L}\{f(t-1)\} + \mathcal{L}\{f(t-2)\} = \mathcal{L}\{t\}$$

onde por meio da condição inicial posta, temos os seguintes resultados:

- $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $4\mathcal{L}\{f(t-1)\} = 4\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t-1)dt = 4e^{-s}\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{f(t-2)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t-2)dt = e^{-2s}\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$

Substituindo na equação, teremos:

$$3\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s\mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3s\mathcal{L}\{f(t)\} - 4e^{-s}\mathcal{L}\{f(t)\} + e^{-2s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}\left(3s - 4e^{-s} + e^{-2s}\right) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2\left(3s - 4e^{-s} + e^{-2s}\right)} = \frac{1}{s^2\left[3s + e^{-s}\left(e^{-s} - 4\right)\right]}$$

Organizando os termos acima de forma que tenhamos condições de representar tal resultado em forma de uma soma infinita, e apartir disto aplicarmos a transformada inversa de laplace na igualdade que iremos ter, assim facilitando nossos cálculos. Portanto:

$$\frac{1}{s^2\left[3s + e^{-s}\left(e^{-s} - 4\right)\right]} = \frac{1}{3s^3}\frac{1}{\left(1 + \frac{e^{-s}(e^{-s}-4)}{3s}\right)} = \frac{1}{3s^3}\frac{1}{\left[1 - \left(-\frac{e^{-s}(e^{-s}-4)}{3s}\right)\right]}$$

chegamos ao seguinte resultado:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{3s^3}\left(1 - \frac{e^{-s}\left(e^{-s} - 4\right)}{3s} + \frac{e^{-2s}\left(e^{-2s} - 16\right)}{9s^2} - \frac{e^{-3s}\left(e^{-3s} - 64\right)}{27s^3} + ...\right) =$$

$$= \frac{1}{3s^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}\left(e^{-ns}-4^n\right)}{3^n s^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-ns}\left(e^{-ns}-4^n\right)}{3^{n+1}s^{n+3}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-2ns}}{3^{n+1}s^{n+3}} - \frac{(-1)^n 4^n e^{-ns}}{3^{n+1}s^{n+3}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-2ns}}{3^{n+1}s^{n+3}} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n e^{-ns}}{3^{n+1}s^{n+3}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-2ns}}{3^{n+1}s^{n+3}} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n e^{-ns}}{3^{n+1}s^{n+3}}$$

Tomando a transformada inversa de laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-2ns}}{3^{n+1}s^{n+3}}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n e^{-ns}}{3^{n+1}s^{n+3}}\right\} =$$

podemos reescrever da seguinte forma, com o intuito de melhorar a sua inversa:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2ns}}{s^{(n+2)+1}}\right\} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{3^{n+1}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^{n+3}} = \frac{e^{-ns}}{s^{(n+2)+1}}\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2ns}(n+2)\,!}{s^{(n+2)+1}(n+2)\,!}\right\} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{3^{n+1}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^{n+3}} = \frac{e^{-ns}(n+2)\,!}{s^{(n+2)+1}(n+2)\,!}\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+2)\,!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2ns}(n+2)\,!}{s^{(n+2)+1}}\right\} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{3^{n+1}(n+2)\,!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}(n+2)\,!}{s^{(n+2)+1}}\right\}$$

olhando os termos das somas infinitas, onde aplicaremos o inversa da transformada, estas são transformadas inversas da forma $e^{-cs}F(s)$. Assim com base na tabela de transformadas (1.1):

$$\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+2)\,!}\left\{\sum_{n=0}^{[t]}U(t)(t-2n)^{n+2}\right\} - \frac{(-1)^n 4^n}{3^{n+1}(n+2)\,!}\left\{\sum_{n=0}^{[t]}U(t)(t-n)^{n+2}\right\}$$

Temos que analisar agora a função de Heaveside no intervalo da soma. Sendo assim:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{[t]}\frac{(-1)^n(t-2n)^{n+2}}{3^{n+1}(n+2)\,!} - \sum_{n=0}^{[t]}\frac{(-1)^n 4^n(t-n)^{n+2}}{3^{n+1}(n+2)\,!} \Rightarrow$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{[t]}\frac{(-1)^n\left[(t-2n)^{n+2}-4^n(t-n)^{n+2}\right]}{3^{n+1}(n+2)\,!}$$

□

4.3 Modelo Logístico

Neste momento abordaremos um caso específico de uma equação diferencial Ordinária: ***Equação Logística***. Equação esta que se encaixa no ramo da modelagem matemática onde que vem tratar de um determinado tipo de crescimento em meio uma determinada **população**. Esse crescimento se chama ***crescimento logístico***.

Antes de adentrarmos no assunto,vamos fazer menção de algumas definições que são pertinentes para o bom andamento da aplicação deste modelo matemático.

Definições

- **Densidade Populacional** $f(t)$

  População é o conjunto de todos os habitantes de determinado local. Também pode estar relacionado com os indivíduos de mesma espécie que coexistem em um mesmo lugar ou região.

  E usa-se a expressão densidade populacional $f(t)$ para se referir a quantidade de indivíduos que existem em uma determinada área predefinida.

- **Ecossistema**

  Significa o sistema onde se vive, o conjunto de características físicas, químicas e biológicas que influenciam a existência de uma população $f(t)$.

- **Crescimento Assintótico**

  Chamamos de comportamento assintótico ou crescimento assintótico, o comportamento observado de uma população-função população $f(t)$- quando t tende ao infinito, ou seja:

  $$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \mathbb{M}$$

  com $\mathbb{M} \geq +\infty$.

- **Taxa de crescimento c**

  É o crescimento dado pela razão entre seu crescimento $(b-a)$ e o seu valor inicial a, ou seja:

  $$c = \frac{b-a}{a}$$

- **Ponto de Equilíbrio**

  Matematicamente, na área de equações diferenciais, o ponto de equilíbrio F^* é o ponto onde:
$$\frac{df}{dt} = h(t, f(t)) = 0$$
  para todo t.

- **Ponto de Inflexão**

  No ramo do cálculo diferencial, o ponto de inflexão, é um ponto sobre a curva na qual a curvatura de minha função troca de concavidade, ou seja é o ponto que se analisa estudando a derivada segunda da função com relação à mudança de sinal da derivada, ou seja:
$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

Uma Breve História

Pierre François Verhulst foi matemático e doutor na teoria dos números da Universidade de Gante em (1825), nasceu em 28 de Outubro de 1804 em Bruxelas, Bélgica; morreu em 15 de Fevereiro de 1849 em Bruxelas, Bélgica.

Verhulst iniciou seus estudos de *Filologia Clássica* em Bruxelas, mas logo interessou-se pela Matemática. Ainda como estudante conquistou dois prêmios por seus trabalhos no cálculo das variações. Mais tarde publicou artigos no campo da teoria dos números e da física. Por algum tempo, Verhulst foi muito engajado politicamente, tendo mesmo, por ocasião de uma estada em Roma em 1830, tentando convencer o Papa de conceder uma constituição aos estados da igreja. Teve atividade política também por ocasião da revolução belga de 1830 e da invasão holandesa de 1831.

Seu interesse na teoria das probabilidades foi despertado pela instituição de um novo jogo de loteria. Iniciou entretanto, apoiado por Adolphe Quételet, a interessar-se pela economia política e a utilizar-se de estatísticas populacionais, que neste momento vinham sendo crescentemente conhecidas nos trabalhos de *Thomas Robert Malthus*.

Seu modelo de crescimento populacional, proposto em 1838, é baseado na avaliação de estatísticas disponíveis e complementa a teoria do crescimento exponencial de Malthus com termos representando os fatores de **inibição** do crescimento. Após uma posterior elaboração foi publicada num trabalho de 1845. Desde os anos 1970 a equação logística tem recebido grande atenção como exemplo importante da teoria do caos. Verhulst publicou em 1838 a equação logística que descreve evolução, através do tempo, da densidade do número de indivíduos de uma população que podemos descrever por $f(t)$, e sendo dada por:
$$\frac{df}{dt} = cf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right] \tag{13}$$
onde **c** é a taxa de crescimento intrínseco da população sob condições ideais de crescimento, ou seja, quando não há existência de algum limitante para o crescimento da espécie; **K** é a mais conhecida capacidade de suporte ou capacidade de carga que representa o tamanho máximo de uma população que um determinado ambiente pode

suportar.

Equação Logística

Esta equação é um exemplo de uma equação diferencial ordinária do tipo não linear, podemos determina-la apartir de um grupo de axiomas postos por Hutchinson -que citaremos mais à frente- onde estes possuem características axiomáticas sobre população. Esses axiomas são chamados de ***Axiomas de Hutchinson***, anunciados em 1978. Assim:

Seja $f(t)$ o número total de indivíduos de determinada população em um tempo $t \in [0, T]$. Assumamos $f(t)$ contínua em t, então:

1. A taxa de variação da população é uma função diferenciável da mesma:

$$\frac{df}{dt} = g(f(t))$$

   com g diferenciável.

2. Todo organismo reproduz-se de pelo menos um individuo do mesmo tipo, ou seja em outras palavras, não há como ocorrer geração espontânea, e assim:

$$f(t) = 0 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0$$

3. Existe um limite para o tamanho da população, devido, por exemplo, a limitações de recursos e de espaço encontrado pela população. E com isso:

$$\exists \lim_{t \to +\infty} f(t) = K$$

Expandindo $g(f(t))$ em série de taylor ao redor de $f(t) = 0$, temos:

$$g(f(t)) = g(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(f(t))^n = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}f(t) + \frac{g''(0)}{2!}(f(t))^2 + ...$$

$$= a + bf(t) + c^*(f(t))^2 + ...$$

onde $a = 0$ pelo axioma (2) de Hutchinson. Portanto:

$$\frac{df}{dt} = a + bf(t) + c^*(f(t))^2 + ...$$

Com esse resultado podemos chegar ao determinado modelo logístico acima posto. Tomando a série de taylor até o termo quadrático teremos:

$$\frac{df}{dt} = bf(t) + c^*(f(t))^2$$

e para lançarmos mãos do axioma (3), tomemos $b > 0$ e $c^* < 0$:

$$bf(t)\left[1 - \frac{c^* f(t)}{b}\right] = cf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

com $b = c$ e $c^* = c/K$. E assim temos a nossa equação de crescimento logístico:

$$\frac{df}{dt} = cf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right]$$

que podemos escreve-la na forma de uma equação de Bernoulli, cuja solução daremos neste trabalho por meio da transformada de laplace.

Antes de aplicarmos a transformada, vemos que os pontos de equilíbrio da equação são $F^* = 0$ e $F^* = K$, pois levando em consideração a definição de ponto de equilíbrio deste trabalho temos:

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow cf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{K}\right] = 0$$

E se tomarmos a segunda derivada dessa equação, temos um resultado muito interessante, do tipo:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = cf'(t) - \frac{2cf(t)f'(t)}{K}$$

ou seja, vamos encontrar o ponto de inflexão da equação, portanto:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \Rightarrow cf'(t) - \frac{2cf(t)f'(t)}{K} = 0$$

$$cf'(t)\left[1 - \frac{2f(t)}{K}\right] = 0$$

Sendo **c** a taxa de crescimento de uma dada população, logo temos que $c > 0$, e com isso $cf'(t) > 0$, restando apenas a parte:

$$\left[1 - \frac{2f(t)}{K}\right] = 0$$

cuja função que representa o ponto de inflexão da equação é a função constante:

$$f(t) = \frac{K}{2} \tag{14}$$

Mas o que isso quer dizer? quer dizer que uma dada população $f(t)$, vivendo em um ecossistema fechado, para tempos t cujas as imagens sejam menores que *(K/2)*, esta população cresce de forma exponencial-*População Crescente*- mas no momento em que esta população atinge o ponto *(K/2)* esta tende a desacelerar o seu crescimento dentro do ecossistema e começa a tender pra um valor. Esse valor é conhecido como a capacidade de suporte do ambiente; mas porque a população tende a diminuir seu crescimento? pode ser por vários fatores, tais como:

- **Fatores Dependentes da Densidade**

  Podemos citar a competição, pois na maneira que $f(t)$ cresce, os recursos como comida, água, moradia para dormir, presas e etc... vão acabando, e a tendência é de a população morrer e com isso o número de crescimento desta diminui a cada instante até chegar na capacidade total de armazenamento do ecossistema.

  Doenças e parasitas, é também um uma agravante para a diminuição da população; acúmulo de resíduos, pois altas densidades populacionais podem levar ao acúmulo de resíduos nocivos que matam indivíduos ou prejudicam a reprodução, reduzindo o crescimento da população.

- **Fatores independentes da Densidade**

  O segundo grupo de fatores limitantes consiste dos fatores limitantes independentes da densidade que afetam a taxa de crescimento per capita independente da densidade da população. Como exemplo, vamos considerar um incêndio que começa numa floresta onde vivem uma variedade cerdos. O fogo irá queimar qualquer cerdo que estiver presente, independente do tamanho da população. A chance de um indivíduo morrer não depende em nada da quantidade de cerdos que estiver no ecossistema, ou seja, fatores limitantes independentes da densidade muitas vezes assumem a forma de desastres naturais, condições climáticas severas e poluição.

A curva $f(t)$ que delimita esse comportamento logístico, é chamada de curva logística, que podemos encontra-la resolvendo a equação logística de Verhulst. Aqui faremos uso da transformada de laplace para encontra-la. Assim; tomando a transformada sobre a equação logística teremos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{cf(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{c(f(t))^2}{K}\right\}$$

Para facilitar os cálculos, faremos uma substituição na equação acima. Esta substituição será a mesma substituição que usa-se em uma equação do tipo Bernoulli. Portanto, tomando $u(t) = f(t)^{1-n}$, com n neste caso igual a 2, temos:

$$u(t) = \frac{1}{f(t)} \Longrightarrow \frac{du}{dt}f(t) + u(t)\frac{df}{dt} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{(u(t))^2}\frac{du}{dt}$$

Substituindo o resultado na equação acima:

$$\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{(u(t))^2}\frac{du}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{c}{u(t)}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{c}{K(u(t))^2}\right\} \tag{15}$$

Trabalhando apenas com a parte da equação em si, desprezando em primeiro momento a transformada:

$$-\frac{1}{(u(t))^2}\frac{du}{dt} = \frac{c}{u(t)} - \frac{c}{K(u(t))^2}$$

$$\frac{1}{(u(t))^2}\left(\frac{c}{K}-\frac{du}{dt}\right)=\frac{c}{u(t)}\Longrightarrow\frac{c}{K}-\frac{du}{dt}=cu(t)$$

$$\frac{c}{K}-\frac{du}{dt}=cu(t)\Longrightarrow\frac{du}{dt}=\frac{c}{K}-cu(t)$$

Voltando novamente com a transformada sobre a equação rearrumada, temos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{c}{K}\right\}-c\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}$$

tomando o valor inicial do PVI como $u(0)=p_0$, temos como aplicar a transformada sem mais problemas. Calculando separadamente cada parte da transformada:

- $\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\}=s\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}-u(0)=s\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}-p_0$
- $\mathcal{L}\left\{c/K\right\}=c/Ks$

substituindo teremos:

$$s\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}-p_0=\frac{c}{Ks}-c\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}(s+c)=p_0+\frac{c}{Ks}\Longrightarrow\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}=\frac{p_0}{(s+c)}+\frac{c}{Ks\,(s+c)}$$

Decompondo em frações parciais teremos:

$$\frac{c}{Ks\,(s+c)}=\frac{1}{Ks}-\frac{1}{K(s+c)}$$

com isso o nosso resultado ficará:

$$\mathcal{L}\left\{u(t)\right\}=\frac{1}{Ks}-\frac{1}{K(s+c)}+\frac{p_0}{(s+c)}$$

aplicando a transformada inversa:

$$u(t)=\frac{1}{K}-\frac{e^{-ct}}{K}+p_0e^{-ct}\Longrightarrow u(t)=\frac{1-e^{-ct}+Kp_0e^{-ct}}{K}$$

pela substituição que fizemos na equação, $u(t)=1/f(t)$, e com isso:

$$\frac{1}{f(t)}=\frac{1-e^{-ct}+Kp_0e^{-ct}}{K}\Longrightarrow f(t)=\frac{K}{1-e^{-ct}+Kp_0e^{-ct}}$$

ajustando a nossa solução:

$$f(t)=\frac{K}{1-e^{-ct}+Kp_0e^{-ct}}\Longrightarrow f(t)=\frac{K}{1+e^{-ct}\,(Kp_0-1)}$$

Tomando:

$$p=Kp_0-1$$

onde K é a capacidade de suporte do ambiente e p_0 é a população inicial contida no local. Sendo assim, a solução da Equação Diferencial ficará:

$$f(t) = \frac{K}{1 + pe^{-ct}} \tag{16}$$

$\square$

Com p uma constante que podemos encontrar se dada uma condição inicial $f(t_0) = p_0$. Apartir de uma condição dada, vemos que quando as condições iniciais forem positivas, as curvas de soluções tendem para K, e quando as condições iniciais forem negativas as curvas de soluções divergem tendo a existência de uma assíntota vertical. Veremos isso nas figuras (1.5) e (1.6).

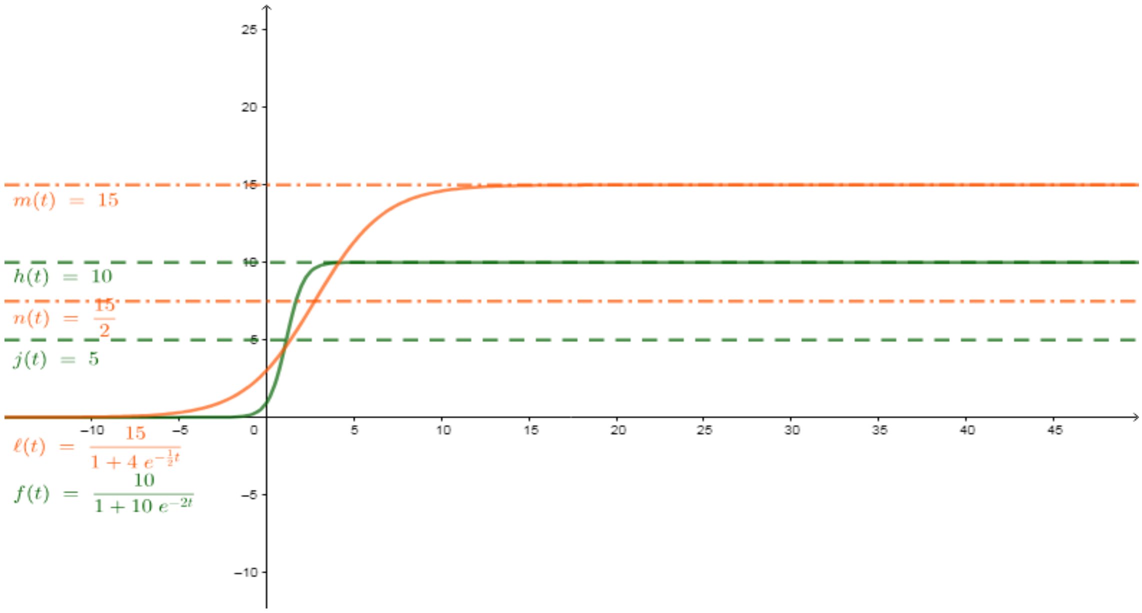

Figura 1.5: *Comportamento das curvas soluções em torno dos pontos de equilíbrio* 0 *e* $K = 10$ *e* $K = 15$.

Fonte: *Geogebra online(2018)*

Aqui vemos que, quando a condição inicial é positiva e população inicial menor que a capacidade de suporte do ambiente, a curva logística tende para o equilíbrio do ambiente, tendendo para K. Vemos também que o momento em que população começa a desacelerar o crescimento, é no momento que t atinge a imagem $K/2$. A diferença de crescimento que aparece nas duas cuvas, é devido a taxa de crescimento de cada população em questão. Pois se a população tiver uma taxa de crescimento alta, esta chegará mais rapidamente no limite ambiente, e com isso os fatores agravante começaram mais cedo sobre esta população. Diferentemente de uma população que detêm uma taxa de crescimento baixa, onde esta irá demorar para alcançar a capacidade de suporte do ambiente, ou seja, o tempo para que o população comece a regredir em seu crescimento é maior, bem como se vê na Figura (1.5).

A figura abaixo, mostra a divergência deste modelo para algumas variações de contantes. Assim:

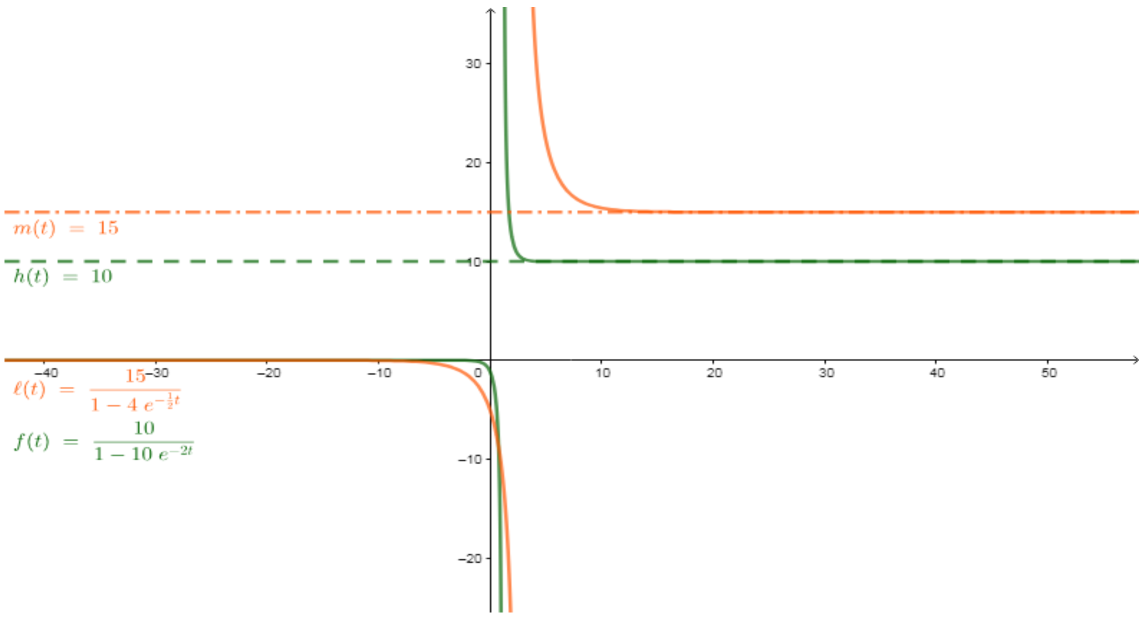

Figura 1.6: *Comportamento Logístico para coeficiente* $p < 0$
Fonte: *Geogebra online(2018)*

Tal comportamento ocorre quando o coeficiente que envolve a relação entre a capacidade de suporte e a população inicial for negativa, e isso somente é possivel se a população inicial for maior que a capacidade de suporte logo de inicio ou se no decorrer do tempo, a densidade populacional $f(t)$ ultrapassar a capacidade de suporte, e com isso haverá uma oscilação na curva logística que com um tempo esta tende novamente para o ponto atrator do modelo K.

O ponto K é ponto atrator do modelo e é também um ponto de *equilíbrio assintoticamente estável*, pois:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{K}{1+pe^{-ct}} = K \qquad (17)$$

e além disso todas soluções tendem para ele tanto no caso convergente quanto no caso divergente, ou seja, a população mesmo com desequilíbrio ou não, sempre tenderá a se estabilizar, dependendo da taxa de crescimento de cada população.

Assim concluímos a aplicação da transformada de laplace no modelo logístico de Verhulst com uma pequena análise comportamental do modelo

□

Você está se perguntando o porque de termos introduzido uma parte sobre *Equações Diferenciais com Retardo*. Bom apartir daqui, como forma de uma continuação de pesquisa para alunos que tenham o interesse de continuar a linha de pesquisa, comentaremos a respeito de uma variação do modelo de Verhulst. Trata-se do modelo Logístico com retardo, que é representado por uma equação derivada da equação logística que conhecemos; *A Equação de Hutchinson.*

4.4 Equação de Hutchinson *(Comentário)*

Um exemplo de equação diferencial com retardo é a equação de Hutchinson ou equação de Hutchinson-Wright ou mais ainda equação logística com retardo. Esta equação é uma modificação da equação logística considerando que a taxa de variação da população depende da quantidade desta em um instante anterior ao instante atual. Pois na prática, o processo de reprodução não é instantâneo. Hutchinson assumiu que este processo demorasse um tempo τ. Com isso a equação logística com atraso é descrita por:

$$\frac{df}{dt} = cf(t)\left[1 - \frac{f(t-\tau)}{K}\right] \tag{18}$$

Vemos logo que não se trata de uma equação que comumente resolvemos durante o curso de graduação de nossa instituição, a sua solução pode ser dada em forma de solução numérica onde o comportamento das suas curvas, que representam o comportamento da população, apresentam oscilações do tipo como vistas na figura (1.7). veja:

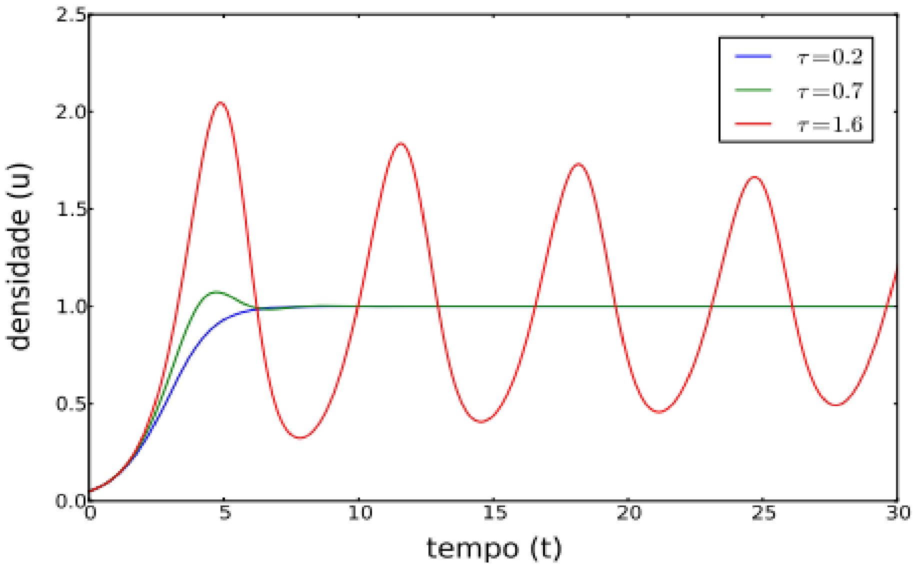

Figura 1.7: *Comportamento oscilatório da equação Logística com atraso temporal*
Fonte: *Coutinho; Eq. Dif. com Retar. aplicado em biologia de populações.*

Observe que para quanto maior o tempo de atraso τ na equação, as oscilações tendem a aumentar, mas buscam sempre um ponto atrator para se estabilizar. Observe também que com retardos próximos de zero, a população quase que não oscila, além do mais, quando o retardo é igual a zero, temos a equação logística de Verhulst. Segundo [2], este gráfico foi tomando a solução numérica desta equação, mas hão de vir umas duvidas. Será que podemos aplicar a transformada de laplace para exprimir a solução $f(t)$ desta equação? Pois se aplicarmos teríamos algo deste tipo:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = c\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - \frac{c}{K}\mathcal{L}\left\{f(t)f(t-\tau)\right\}$$

E se no caso o caro aluno queira exprimi-la por meio de uma solução recursiva, o caro aluno terá que fazer um estudo sobre a teoria das *Equações Integro-Diferenciais*, pois a resolução desta equação logística com atraso, tem uma ligação com a *Função peso*, ou seja, com a função Delta de Dirac. Pois se formos fazer esta relação teremos:

$$u'(t) = u(t) \int_0^{+\infty} w(\tau) c \left[1 - \frac{(t-\tau)}{K} \right] d\tau \tag{19}$$

em que w é uma função peso que dá a contribuição da população no tempo $(t-\tau)$ sobre a disponibilidade de recursos disponíveis.

Sendo assim, fica como uma forma de incentivo ao aluno dar continuidade apartir deste ponto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de conclusão de curso, fizemos um estudo sobre a transformada de laplace aplicada na resolução de alguns problemas ligados à equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais com retardo. Sabendo que a transformada de laplace é um campo muito extenso para o estudo, alguns pontos sobre o assunto foram omitidos neste trabalho, devido fugirem do objetivo central deste, como por exemplo, o estudo em relação a transformada bilateral de laplace, muito usada quando nus deparamos com problemas que apresentam a ausência de condição inicial de contorno. Aqui centramos somente na transformada unilateral de laplace; a transformada integral inversa de laplace, que pode ser definida para funções de valores complexos, e aqui nos limitamos somente para funções de valores reais.

Com intenção de deixar a escrita deste trabalho direcionada para alunos de graduação; este foi escrito de forma mais explicativa possivel, com demonstrações claras, tabela, figuras com observações que muitas vezes o aluno não atenta para pequenos detalhes contidos na imagem.

Podemos destacar também como o método de resolução via transformada de laplace é muito importante, até mesmo para modelos comportamentais não lineares; importante também para resolver problemas que envolvam funções contínuas por partes como por exemplo a função degrau unitário e a função peso. Temos que citar também, que a transformada de laplace pode ser trabalhada como meio de resolução de equações diferenciais parciais e que esta não é o único tipo de transformada existente dentro do campo funcional matemático, existem outras, como exemplo: a transformada de fourier e a transformada Z, que são importantes para a resolução de equações diferenciais e modelos que se moldam via EDO's, EDR's, EDP's e outras mais.

REFERÊNCIAS

[1] BOYCER, Willian E. **Equações Diferenciais Elementares e Problema de Valor de Contorno**. 9. ed. Volume único LTC – Livros Técnicos e Científicos, editora S.A.

[2] COUTINHO, Renato M. **Equações Diferenciais com Retardo em Biologia de Populações** . Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual paulista; 2010.

[3] HALE, Jack K., **Theory of functional differential equations.**: vol.3. Springer-Verlag, 1976.

[4] J,D, Murray, **Mathematical biology. I. An introduction**: vol.17. 3ª. ed. Spinger, 2002.

[5] DIAS, Neylan L.; De QUEIROZ, Julie Anne S. **Modelagem Matemática de problemas Biológicos**: TCC.Universidade Federal do Amapá, 2013.

[6] MATTOS, P, Marivaldo **Séries e Equações Diferenciais**: vol.4. 5. ed. Prentice Hall, 2002.

[7] MAY, R. M.; SIMON A. **A note on difference-delay Equations Theorical Population Biology,**: vol.9. 2ª ed., p. 178-186, 1976.

[8] MURRAY R. SPIEGEL, **Ecuaciones Diferenciales Aplicadas**. 3ª ed., Prentice Hall, 1994.

[9] STEWART, James. **Cálculo**. volume 1. São Paulo: Pioneira Tomson Learning, 2006.

[10] STEWART, James. **Cálculo**. volume 2. São Paulo: Pioneira Tomson Learning, 2006.

[11] ZILL, Dennis G; MICHAEL R. Cullen. **Equações Diferenciais**. volume 1. 3ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.