



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
COLEGIADO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JONATHA MATHAUS SANTOS DA SILVA

**GEOMETRIA EUCLIDIANA E ESFÉRICA: UMA ABORDAGEM  
COMPARATIVA**

MACAPÁ  
2019

JONATHA MATHAUS SANTOS DA SILVA

**GEOMETRIA EUCLIDIANA E ESFÉRICA: UMA ABORDAGEM  
COMPARATIVA**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao curso de Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura Plena em Matemática, Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP sob orientação da Orientadora: Professora Dr<sup>a</sup> Simone de Almeida Delphim Leal e Co-orientação do Professor Msc. Neylan Leal Dias

MACAPÁ  
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá  
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB2/1569

Silva, Jonatha Mathaus Santos da.

Geometria euclidiana e esférica: uma abordagem comparativa. /  
Jonatha Mathaus Santos da Silva; Orientadora, Simone de Almeida  
Delphim Leal, Coorientador, Neylan Leal Dias. - Macapá, 2019.  
43 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Fundação  
Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de  
Licenciatura em Matemática.

1. Geometria - Ensino. 2. Geometria Euclidiana. 3. Geometria  
Esférica. 4. Geogebra. I. Leal, Simone de Almedia Delphim,  
orientadora. II. Dias, Neylan Leal, coorientador. III. Fundação  
Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

516.22 S586g  
CDD. 22 ed.

JONATHA MATHAUS SANTOS DA SILVA

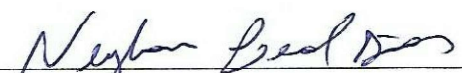
**GEOMETRIA EUCLIDIANA E ESFÉRICA: UMA ABORDAGEM  
COMPARATIVA**


Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao curso de Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura Plena em Matemática, Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP sob orientação da Orientadora: Professora Dr<sup>a</sup> Simone de Almeida Delphim Leal e Co-orientação do Professor Msc. Neylan Leal Dias.

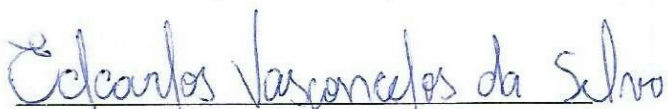
Aprovado em: 29 de novembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr<sup>a</sup>. Simone De Almeida Delphim Leal – UNIFAP  
(Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Msc. Neylan Leal Dias – UNIFAP  
(Coorientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Erasmo Senger – UNIFAP  
(1º Membro)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Msc. Edcarlos Vasconcelos da Silva – UNIFAP  
(2º Membro)

# AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao co-orientador Msc. Neylan Leal Dias, pela paciência, pelas conversas e incentivo, por toda a dedicação e disponibilidade.

A minha orientadora Dr<sup>a</sup>. Simone de Almeida Delphim, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incetivos.

A minha colega e amiga Caroline da Costa Vieira, pelos seus auxílios no Overleaf e incetivo.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

*Tente não. Faça ou não faça. Tentativa não há.*

*Minch Yoda*

## RESUMO

Este trabalho apresenta a geometria dinâmica com o auxílio do GeoGebra e mostrar outros softwares semelhante a ele. Apresenta também a Geometria Esférica para comparar com a Geometria Euclidiana através de conceitos e definições com a utilização do software GeoGebra 2D e GeoGebra 3D. Com esse conteúdo em mãos, apresenta a noção da engenharia didática e suas fases. Por fim, apresentar uma proposta da sequência didática sobre geometria, utilizando a engenharia didática como metodologia de pesquisa. O objetivo é verificar se a utilização do GeoGebra contribui como ferramenta de aprendizagem e aplicar a tal metodologia. Trata-se de uma comparação estruturalista, onde os gráficos obtidos auxiliam na compreensão das principais diferenças entre a Geometria Euclidiana e Esférica. Assim, torna-se uma importante ferramenta para introduzir, em sala de aula ou fora dela, os conceitos iniciais da Geometria Esférica.

**Palavras-chave:** Ensino. Geometria Euclidiana. Geometria Esférica. Geogebra. Engenharia Didática. Sequência de ensino.

## ABSTRACT

This paper presents a geometry compatible with GeoGebra and shows other similar software. It also presents Spherical Geometry to compare with Euclidean Geometry through concepts and definitions using GeoGebra 2D and GeoGebra 3D software. With this content in hand, it presents the notion of didactic engineering and its phases. Finally, present a proposal for the didactic sequence about geometry, using didactic engineering as a research methodology. The objective is to verify if the use of GeoGebra contributes as a learning tool and apply it to such methodology. This is a structuralist comparison, where the obtained graphs help to understand the main differences between Euclidean and Spherical Geometry. Thus, it becomes an important tool for introducing, in the classroom or beyond, the initial concepts of Spherical Geometry.

**Keywords:** Teaching. Euclidean Geometry. Spherical Geometry. Geogebra. Didactic Engineering. Teaching Sequence.



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Janela de visualização do GeoGebra . . . . .	14
1.2	Janela de visualização 3D do GeoGebra . . . . .	15
1.3	Janela principal no ambiente 2D e 3D . . . . .	16
1.4	Ambiente do software Graphmath . . . . .	17
1.5	Interface do software Cinderella . . . . .	18
1.6	Eixo polar . . . . .	19
1.7	Pólos Norte e Sul . . . . .	20
1.8	Representação da Linha do Equador . . . . .	20
1.9	Imagem do monumento Marco Zero do Equador . . . . .	21
1.10	Monumento Marco Zero e o estádio Milton de Souza Corrêa . . . . .	21
1.11	Circunferência não maximizadas . . . . .	22
1.12	Meridiano . . . . .	22
1.13	Exemplo de medição de Ângulo Esférico no triângulo Esférico . . . . .	23
1.14	Exemplo de medição de Ângulo diedro . . . . .	23
1.15	Quinto postulado na Geometria Euclidiana e Geometria Esférica . . . . .	24
1.16	Representação de curvatura na Geometria Euclidiana e Geometria Esférica	25
1.17	Item 1 . . . . .	25
1.18	Item 2 . . . . .	26
1.19	Item 3 . . . . .	26
1.20	Item 4 . . . . .	26
1.21	Item 5 . . . . .	27
1.22	Item 6 . . . . .	27
1.23	Item 7 . . . . .	28
1.24	Item 8 . . . . .	28
1.25	Item 9 . . . . .	28
1.26	Item 10 . . . . .	29
1.27	Item 11 . . . . .	29
1.28	Fases da Engenharia Didática . . . . .	31
1.29	Construção das retas esféricas . . . . .	37
1.30	Representação da trajetória do caçador na Geometria Euclidiana . . . . .	38
1.31	Representação da trajetória do caçador na Geometria Esférica . . . . .	38

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO 1: GEOMETRIA DINÂMICA</b>	<b>12</b>
1.1 GeoGebra . . . . .	12
1.1.1 GeoGebra 2D . . . . .	13
1.1.2 GeoGebra 3D . . . . .	14
1.2 Geometria dinâmica além do Geogebra . . . . .	16
<b>CAPÍTULO 2: CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b>	<b>19</b>
2.1 O quinto postulado de Euclides . . . . .	23
2.2 A curvatura de uma curva . . . . .	24
2.3 Comparação entre as Geometrias . . . . .	25
<b>CAPÍTULO 3: TEORIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA</b>	<b>30</b>
3.1 Análises prévias . . . . .	31
3.2 Concepção e a análise a priori . . . . .	33
3.3 Experimentação . . . . .	33
3.4 Análise a posteriori e validação . . . . .	34
<b>CAPÍTULO 4: PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b>	<b>35</b>
4.1 Fase 1 . . . . .	35
4.2 Fase 2 . . . . .	35
4.3 Fase 3 . . . . .	36
4.4 Fase 4 . . . . .	39
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>40</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>41</b>

# INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana, denominada assim na literatura matemática por estar sistematizada e fundamentada nos postulados de Euclides, é ensinada e aprendida nas escolas brasileiras. Porém, ao analisarmos os conteúdos desenvolvidos nas aulas de geometria, no estado do Amapá, verificamos que em seus planejamentos, grande parte dos professores desconsidera as indicações curriculares oficiais que apontam para a necessidade de se trabalhar noções básicas de Geometrias não – Euclidianas.

No entanto, os assuntos que envolvem geometria usualmente são deixadas para capítulos finais nos livros de Matemática. Além disso, a falta de tempo, poucos professores chegavam ao tema. Assim, ocorre a dificuldade tanto em aprender quanto em ensinar. [11]

A Geometria<sup>1</sup> tem origem provável na agrimensura com a medição de terrenos, segundo o historiador Heródoto (século V a.C.). Trata-se de uma ciência bastante antiga, ou seja, é o ramo da matemática destinado ao estudo de questões relacionados à forma, tamanho, posição relativa entre figuras de espaço.

O surgimento da geometria ocorreu numa época das cheias do rio Nilo. Transbordavam as margens depositando lamas aluviais ricas em nutrientes, tornando o delta do Nilo extremamente fértil. No entanto, estas inundações apagavam as marcas físicas que delimitavam os terrenos. Conseqüentemente, a ausência destas marcas os agricultores e administradores não saberiam os limites dos terrenos de cada produtor para realizarem o plantio e pagarem os impostos devidos. Logo, os antigos faraós passaram a nomear funcionários, os agrimensores, para avaliar os prejuízos das inundações e restabelecer as fronteiras entre diversas posses. Estes agrimensores acabaram a determinar as áreas de lotes de terreno, fazendo a divisão em retângulos e triângulos.

Até então, a Geometria era uma ciência empírica, um conjunto de regras práticas para obter resultados aproximados. Ainda assim, possuindo esse conhecimento, foram utilizados nas construções de pirâmides e templos babilônios e egípcios. A partir de Tales de Mileto (600 a.C.), a Geometria começou a ser estabelecida como teoria dedutiva, ou seja, foi o primeiro a demonstrar proposições geométricas. E o Pitágoras (540 a.C.), o qual já apresentava argumentos geométricos sofisticados como a descoberta do Teorema de Pitágoras. Por volta de 500 a.C. as primeiras academias foram fundadas na Grécia, onde os povos contribuíram para que a Geometria viesse ser entendida como uma ciência e aumentavam a procura por conhecimento sobre essa área. [15]

Euclides (cerca de 325 a.C. a 265 a.C.) foi o primeiro a apresentar, de maneira sistemática, a Matemática, em particular a Geometria, como ciência dedutiva, onde cada

---

<sup>1</sup>O termo "Geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo* = terra, *metrein* = medição).

afirmação deve ser deduzida, de maneira lógica, de outras mais simples, e assim sucessivamente. No começo dessa sequência lógica deveriam haver, evidentemente, algumas afirmações não demonstradas, que Euclides chamou de postulados (aquilo que se pode). Segundo Carmo [9] "Euclides procurou escolher como postulados afirmações que, por sua simplicidade, seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso e que eram, em um certo sentido, evidentes por si mesmas".

Atualmente, os professores enfrentam vários problemas em relação ao ensino da matemática, as aulas contemplam somente o quadro e as explicações verbais. De acordo com Machado [21], esclarece que a ilustração através de figuras é essencial para auxiliar na compreensão do assunto. Para Helena [17], é essencial introduzir tecnologia aos ensinamentos, pois as escolas estão trazendo mídias digitais e métodos alternativos para as aulas.

Logo, é importante aprender a Geometria, utilizando recursos tecnológicos para compreender e facilitar as resoluções de problemas, em consequência, desenvolver uma visualização dimensional.

Nesse sentido, com o objetivo de facilitar o cumprimento das orientações dos parâmetros curriculares Nacionais, este trabalho apresenta uma abordagem comparativa ao propor a compreensão da geometria esférica não como um sistema abstrato, isolado e desconexo, mas a partir da observação de fatos e diferenças conceituais entre as Geometria Euclidiana e Geometrias não-Euclidianas, mais especificamente da esférica. Para tanto, abordaremos como objeto de estudo o sistema axiomático, o espaço a ser abordado e algumas diferenças.

O objetivo deste trabalho é investigar aspectos relativos ao ensino de Geometria Euclidiana e Esférica que podem ser trabalhados com o auxílio do GeoGebra. Além disso, os objetivos específicos são: identificação necessária para a elaboração de uma proposta de ensino sobre a Geometria a partir da Engenharia Didática; utilização do Geogebra para o ensino de Geometria; descrição da estrutura da proposta didática considerando as 4 fases da Engenharia Didática.

O trabalho é organizado da seguintes forma que o Capítulo 1. Apresenta o software GeoGebra, como o surgimento do programa, prêmios internacionais, mostrar o ambiente GeoGebra em 2D e 3D e ilustrar outros softwares além do GepGebra; O Capítulo 2. Apresenta os conceitos básicos da Geometria, tendo destaque definições e diferenças através de figuras entre a Geometria Euclidiana e Esférica; O Capítulo 3. Apresentar a teoria da Engenharia Didática e suas fases, os quais são análises prévias, concepção e análise a priori, experimentação e validação e análise a posteriori; O Capítulo 4. Apresenta a proposta da sequência didática construída pelo autor desse trabalho, o qual seguiria os procedimentos metodológicos das 4 fases.

# CAPÍTULO 1: GEOMETRIA DINÂMICA

A matemática computacional consiste em um misto entre a matemática e a computação, e sua utilização para o ensino tem se tornado muito importante nos últimos anos, devido suas múltiplas aplicações e possibilidades didáticas. Assim é essencial o desenvolvimento de estudos que tenham como objetivo explorar possibilidades de ensino, através da utilização de recursos computacionais. Neste será apresentado a seguir o software Geogebra 3D e suas potencialidades para o ensino de geometria esférica, através de uma comparação com a geometria euclidiana.

## 1.1 GeoGebra

O termo geometria dinâmica é utilizado para especificar a Geometria dentro de um computador. Além disso, permite que os objetos sejam movidos pelo usuário, diferente da geometria tradicional, pois utiliza régua e compasso. Nesse segundo caso, se o aluno deseja analisar uma determinada figura em outra posição, deverá que construir mais uma construção. Um exemplo de software desenvolvido para o uso da geometria dinâmica é o GeoGebra.

O GeoGebra (= Geometria + Álgebra) é um programa gratuito que reúne geometria, tabelas, gráficos, estatística, álgebra e cálculo. De uma forma bem simples, podem ser construído pontos, segmentos de reta, polígonos, circunferências, vetores, gráficos de funções, cônicas e, depois, podem ser dinamicamente modificados com um simples movimento do *mouse*. Pode ser utilizado em dezenas de idiomas, inclusive português.

A cada objeto geométrico constante da área de desenhos corresponde uma expressão algébrica, a qual aparece na janela ao lado. As alterações em cada objeto podem também ser feitas diretamente nas suas equações.

A execução do GeoGebra depende da prévia instalação da linguagem Java. Tudo pode ser copiado gratuitamente a partir do endereço citado em [16].

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica para todos os níveis de ensino. Foi desenvolvido em 2002, pelo professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, na Áustria, e foi objeto de sua tese de doutorado. Sua criação teve o intuito de obter uma ferramenta adequada ao ensino de Matemática, combinando entes geométricos aos algébricos, de forma didática, mesclando características geométricos e algébricos. [5]

O GeoGebra [16] obteve os seguintes prêmios:

- Archimedes 2016 - Prêmio MNU na categoria Matemática (Hamburgo, Alemanha);
- Microsoft Partner of the Year Award 2015 - Finalista, Setor Público: Educação

(Redmond, WA, EUA);

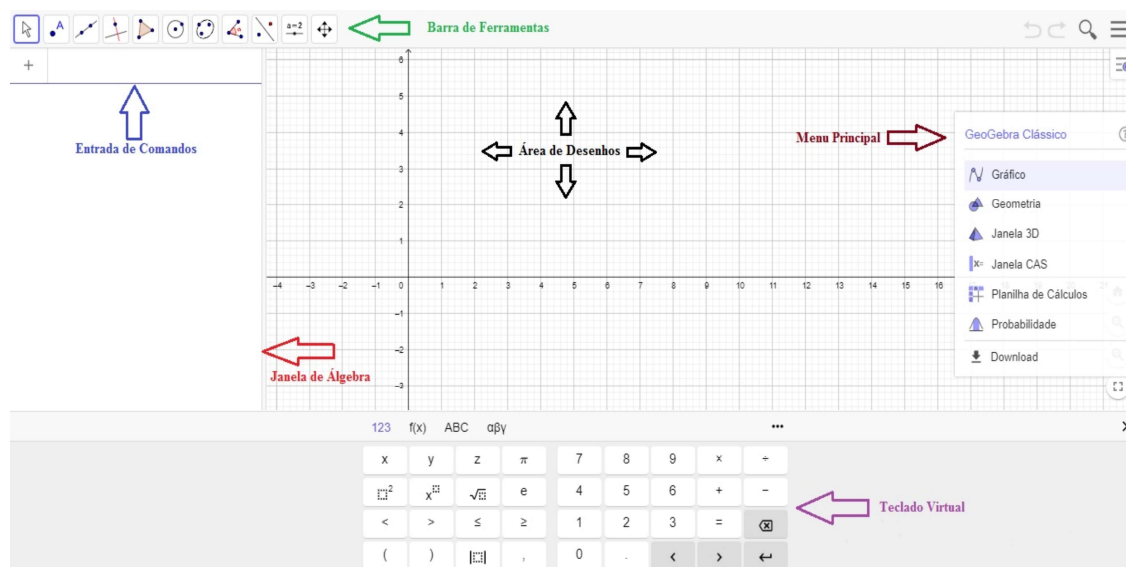
- MERLOT Classics Award 2013 - Recurso Educacional Multimídia para Aprendizagem e Ensino Online (Las Vegas, Nevada, EUA);
- NTLC Award 2010 - Prêmio Nacional de Liderança em Tecnologia (Washington D.C., EUA);
- Tech Award 2009 - Laureado na Categoria Educação (San Jose, Califórnia, EUA);
- BETT Award 2009 - Finalista em Londres pelo Prêmio de Tecnologia Educacional Britânica;
- SourceForge.net Community Choice Awards 2008 - Finalista, Melhor Projeto para Educadores;
- AECT Distinguished Development Award 2008 - Associação para Comunicações Educacionais e Tecnologia (Orlando, EUA);
- Learnie Award 2006 - Prêmio Austríaco de *Software* Educacional (Viena, Áustria);
- Twinning Award 2006 - 1º Prêmio no "Desafio dos Círculos" com GeoGebra (Linz, Áustria);
- Les Trophées du Libre 2005 - Prêmio Internacional de *Software* Livre, categoria Educação (Soisson, França);
- Learnie Award 2005 - *Austrian Educational Software Award* (Viena, Áustria);
- Comenius 2004 - *German Educational Media Award* (Berlim, Alemanha);
- Digita 2004 - *German Educational Software Award* (Colônia, Alemanha);
- Learnie Award 2003 - *Austrian Educational Software Award* (Viena, Áustria);
- EASA 2002 - *European Academic Software Award* (Ronneby, Suécia).

Há Institutos GeoGebra no Brasil, os quais são membros do IGI (International GeoGebra Institutes). Além disso, o objetivo é incentivar interessados no uso do GeoGebra nos processos de ensino e aprendizagem. De acordo com Instituto GeoGebra [19], seu objetivo era "criar uma comunidade aberta que compartilhe seus conhecimentos no treinamento, suporte e desenvolvimento de materiais de apoio para alunos e professores, promovendo a colaboração entre profissionais e pesquisadores. Nossas metas são (1) desenvolver materiais gratuitos no treinamento do GeoGebra como ferramenta para o ensino, a aprendizagem e a divulgação da matemática a todos os públicos, (2) oferecer oficinas (workshops) para professores, certificando-os no uso deste material no Brasil (e, particularmente, no Estado do Rio de Janeiro) e (3) fazer formação presencial e a distância de professores e alunos de licenciaturas em matemática."

### 1.1.1 GeoGebra 2D

Manuseando-se apenas o *mouse*, podemos utilizar a barra de ferramentas que contém 11 ícones. Clicando em uma delas, aparecerão mais comandos para os quais deseja usar. Também surgirá, após o clique em uma das ferramentas, um suporte e ajuda de como deve operar na área de desenho.

Figura 1.1: Janela de visualização do GeoGebra



Fonte: Autor, com o geogebra online

A figura 1.1 é o ambiente do GeoGebra, onde o usuário pode manusear, digitar, arrastar ou clicar. Logo, o indivíduo poderá usar a "Entrada de comandos" da seguinte forma:

**I)** Podemos digitar as coordenadas dos pontos desejado. Por exemplo, digitamos  $A = (3, 4)$  e, depois,  $B = (0, 2)$ . Aparecerão esses pontos na área de desenho.

**II)** Digitamos  $r = \text{reta}(A, B)$  para criar a reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . Assim, surgirá uma reta que passa por esse dois pontos dados. Observe que o nome dos comandos também pode ser em português, se o programa estiver configurado para esta língua. Para ajustar o idioma, basta usar o item "Configurações" do menu e escolher "Idioma [Portuguese/Português(Brasil)]".

**III)** Agora, ela pode ser modificada arrastando-se os pontos com o *mouse* ou dando dois cliques rápidos com o botão esquerdo em cima das equações da janela de Álgebra e redefinindo-os.

Cada objeto definido pode ter sua aparência modificada através do item "Configurações", que aparece depois que for pressionado o botão direito do *mouse* em cima do objeto selecionado. Podem ser alterados a cor, a largura do traço, o tracejado, etc.

Uma vez definidos, os objetos podem ser exportados na forma de página da Internet (formato HTML). Assim, estarão à disposição na grande rede mundial de computadores, podendo ser vistos por qualquer um que tiver a linguagem Java instalada [5].

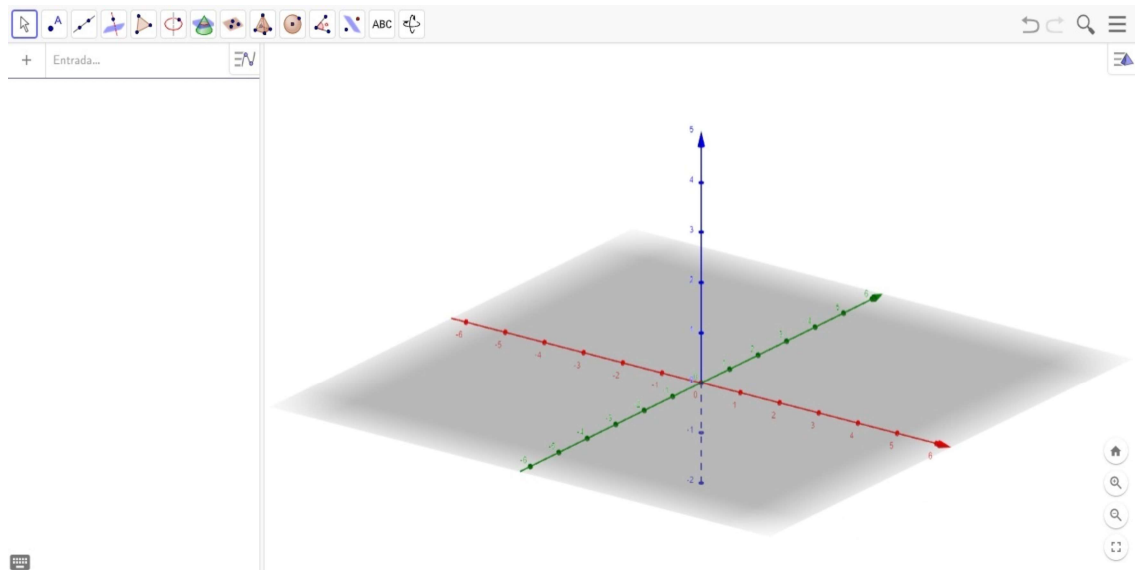
### 1.1.2 GeoGebra 3D

A partir de sua recente versão 6.0.536.0, pode ser usado como uma ferramenta nos estudos de Geometria Espacial. Com ele, diversos sólidos, superfícies e curvas tridimensionais podem ser construídos sem dificuldade, assim como ocorre com o cálculo de seus comprimentos, áreas, volumes e interseções.

Em razão da importância e da disponibilidade desse programa, o presente trabalho fará uma breve explanação sobre o ambiente do *software*. Diversas atividades são propostas e que podem ser realizadas em sala de aula.

No GeoGebra, há várias janelas de visualizações disponíveis. Uma delas é a "Janela de visualização 3D" a qual deve ser usada para visualização de objetos tridimensionais tais como planos, pirâmides, cones, esferas etc. Para abrir essa janela, basta pressionar as teclas **Ctrl Shift 3**, ou ir nas **Configurações** no canto superior direito, clicando na opção **Exibir** → **Janela de Visualização 3D** [6].

Figura 1.2: Janela de visualização 3D do GeoGebra



Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

O GeoGebra permite trabalhar, ao mesmo tempo, com as duas janelas de visualização, ou seja, A interface do programa contempla a interface 2D acrescida da janela de visualização 3D e dos comandos específicos de uso na Geometria Espacial, o que reforça os conceitos e propriedades para que o aluno visualize o que é dito em sala de aula, obtendo conhecimento e tendo um novo olhar para o que lhe é ensinado.

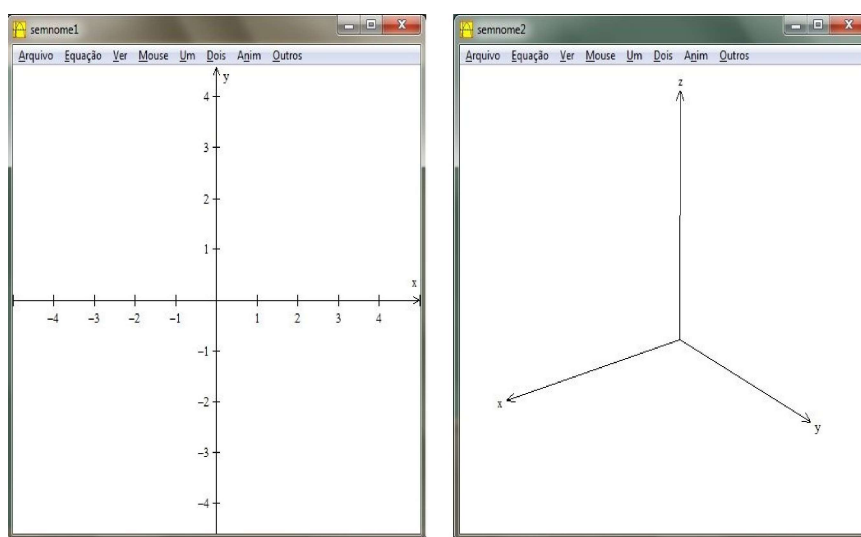


## 1.2 Geometria dinâmica além do Geogebra

Além do GeoGebra existem outros softwares de geometria dinâmica, com diferentes formas de abordar a geometria, o que amplia as possibilidades de criar uma aula diversificada de acordo com o público. Pensando em contribuir com a divulgação destes, listamos alguns que são bem conceituados, que podem servir de suporte no ensino da geometria.

1) **Winplot**: É um software cuja apresentação mais simples, que dispõe de vários recursos para o estudo das funções de uma ou mais variáveis, os seus gráficos e outros conteúdos matemáticos. Desse modo, o software é apropriado tanto ao nível médio como superior de ensino [2].

Figura 1.3: Janela principal no ambiente 2D e 3D

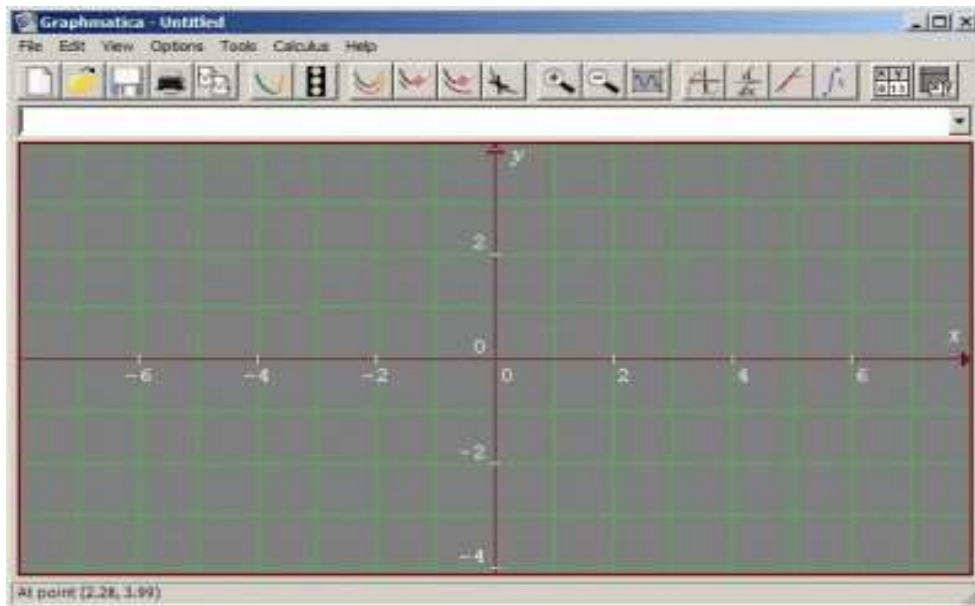


Fonte: Arquivo pessoal

Além disso, também podem ser apresentados em 3D na construção de gráficos. Sua utilização é fácil, pois possui uma janela com a função de ajuda.

2) **Graphmath**: É um software plotador de gráficos de funções 2D, de fácil manuseio, pois a sua tela é semelhante aos programas utilizados no ambiente Windows. Com este aplicativo, é possível construir vários gráficos de equações matemáticas em uma mesma tela, representando equações cartesianas, inequações, paramétricas entre outras funções [18].

Figura 1.4: Ambiente do software Graphmath

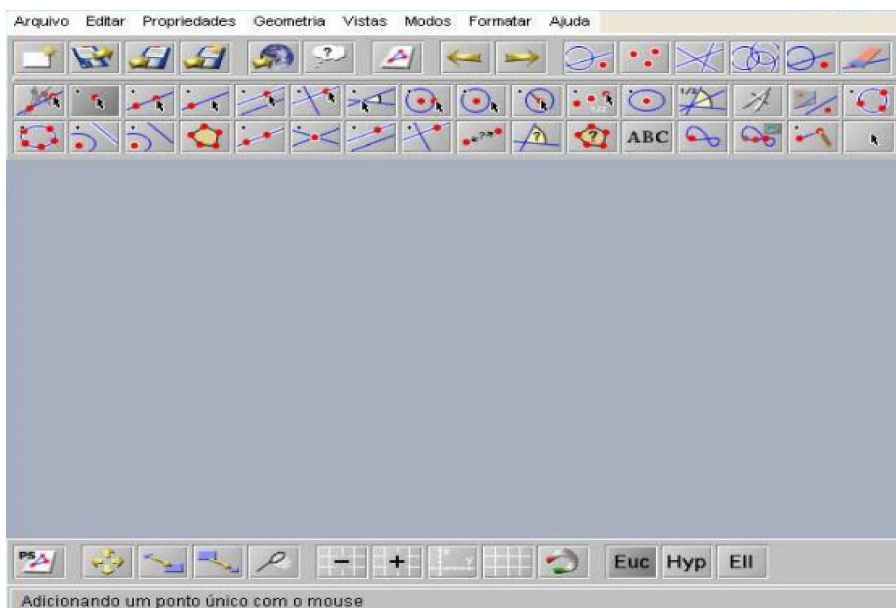


Fonte: Disponível em <http://www.graphmatica.com/>

Esse software pode auxiliar os usuários em vários conteúdos de matemática, tais como trigonometria, no qual possibilita estudar ângulos em graus ou radianos.

3) **Cinderella:** É um software de construção em geometria que nos oferece "régua e compasso eletrônicos". Esse programa permite que o indivíduo trabalhe nas Geometrias euclidiana, hiperbólica e esférica. Além disso, tem a opção de salvar como página da web automaticamente [12].

Figura 1.5: Interface do software Cinderella



Fonte: Disponível em <https://www.cinderella.de/tiki-index.php>

Nesse software podemos facilmente comutar entre a geometria euclidiana, hiperbólica e elíptica. Assim fazendo uma construção euclidiana basta usar a “modalidade esférica” e as construções irão se comportar como elementos do plano esférico.

Os softwares citados permitem a visualização do comportamento dos gráficos na tela, otimizando o tempo em sala de aula.

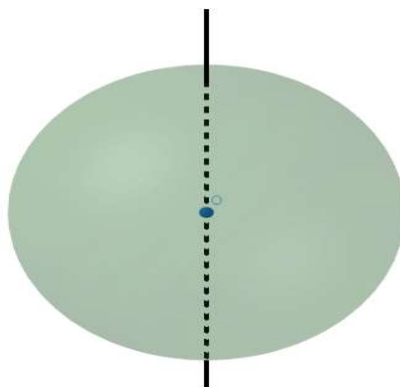
## CAPÍTULO 2: CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Assim, ao se considerar os conceitos fundamentais básicos: ponto e reta, temos que na geometria euclidiana e na esfera, os pontos estão definidos no sentido usual. Entretanto o conceito de reta, na esférica não estão definidas no sentido usual da "linha reta", mas sim no sentido de "a trajetória mais curta entre os pontos", a qual é chamada de geodésica.

A seguir iremos apresentar definições e de seus principais elementos da superfície esférica, permitindo aos que pretenderem trabalhar nessa área, que adquiram o suporte necessário para que o aluno compreenda nesse assunto que serão utilizadas por ocasião das atividades propostas. Assim, iremos estabelecer algumas definições.

**Definição 1 (Eixo Polar):** *É a reta que contém o centro  $O$ .*

Figura 1.6: Eixo polar

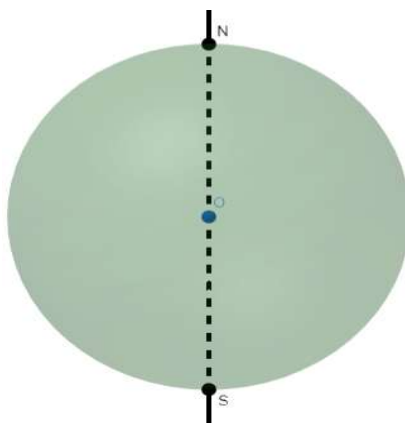


Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

A figura acima apresenta o planeta Terra, o qual efetua movimento de rotação.

**Definição 2 (Pólos):** *São os pontos de interseção do eixo polar com a superfície esférica. Os pontos  $N$  e  $S$  representam os Pólos Norte e Sul, respectivamente.*

Figura 1.7: Pólos Norte e Sul

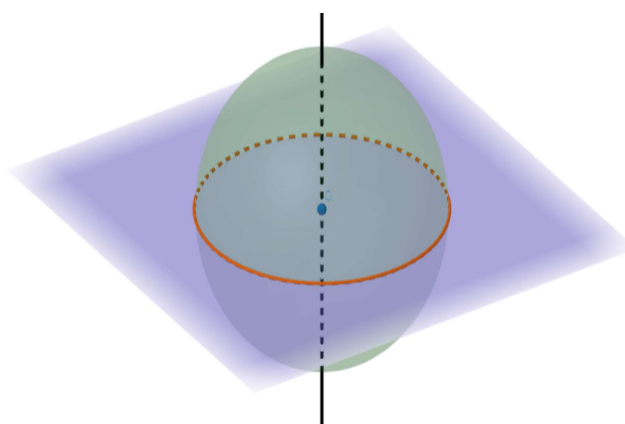


Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

Esses pólos são pontos mais frio da Terra e estão localizados no extremo Norte e Sul do planeta, o que mostra a Figura 1.7. O ponto N representa o pólo Ártico e o ponto S representa o pólo Antártico. Além disso, esses pontos são chamadas de antípodas<sup>2</sup>.

**Definição 3 (Equador):** *É a circunferência máxima situada no plano perpendicular ao eixo polar no ponto O.*

Figura 1.8: Representação da Linha do Equador



Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

Ainda fazendo uma relação do planeta Terra, o Equador é uma linha imaginária o qual divide em dois hemisférios: Norte e Sul. Além disso, a única capital, no Brasil, que divide estes hemisférios fica em Macapá (AP), onde há um monumento do equinócio.

---

<sup>2</sup>São pontos diametralmente opostas.

Figura 1.9: Imagem do monumento Marco Zero do Equador



Fonte: <https://www.wwf.org.br/?uNewsID=34394>

Utilizando dispositivos de GPS, a linha do equador também passa pelo estádio Zerão, onde o campo é dividido em dois hemisférios.

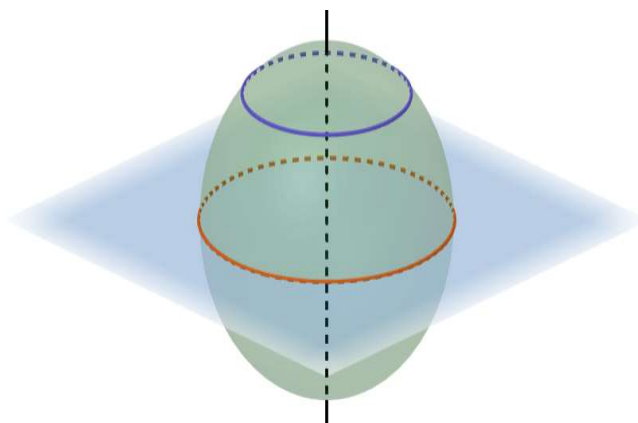
Figura 1.10: Monumento Marco Zero e o estádio Milton de Souza Corrêa



Fonte: <https://bancada.pt/futebol/grandefutebol/zerao-o-estadio-no-brasil-e-situa-em-dois-hemisferios>

**Definição 4 (Paralelos):** *São circunferências situadas em planos perpendiculares ao eixo polar e paralelas ao plano do equador.*

Figura 1.11: Circunferência não maximizadas

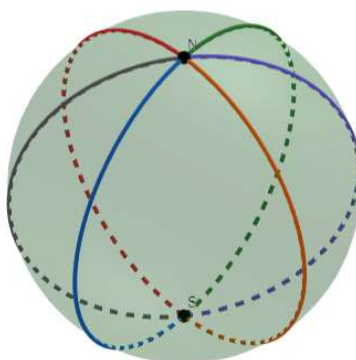


Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

A circunferência menor é a interseção entre a superfície esférica e o plano paralelo ao plano equador. São exemplos os círculos menores: Trópico de Câncer e Trópico de Capricórnio.

**Definição 5 (Meridianos):** *São semicircunferências formadas a partir de círculos máximos que contém os Pólos.*

Figura 1.12: Meridiano



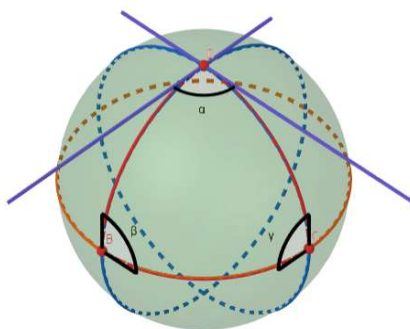
Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

A Figura 1.12 contém infinitas retas ligadas aos pontos antípodas. Ainda geograficamente, a linha imaginária que divide hemisfério ocidental e hemisfério oriental é chamado de Meridiano de Greenwich.

Para a realizar comparação neste trabalho, é necessário definir e medir ângulos na superfície esférica. Na esfera, existem duas formas de definir a medida do ângulos entre duas retas.

O primeiro é o Coutinho [13], que define ângulo esférico como sendo a interseção de duas retas e sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes à superfície esférica pelo ponto de interseção. Na Figura 1.13 o ângulo esférico tem igual medida ao ângulo plano formado pelas duas retas tangentes à superfície esférica.

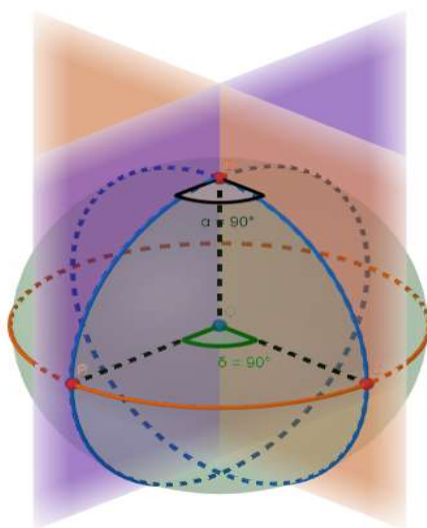
Figura 1.13: Exemplo de medição de Ângulo Esférico no triângulo Esférico



Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

Segundo Santos [28], outra forma de definir ângulos na superfície esférica é o ângulo diedral entre os semi-planos que contém as semi-circunferências máximas. A Figura 1.14, o ângulo diedral é o ângulo formado pela intersecção de dois semi-planos com a mesma origem.

Figura 1.14: Exemplo de medição de Ângulo diedro



Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

## 2.1 O quinto postulado de Euclides

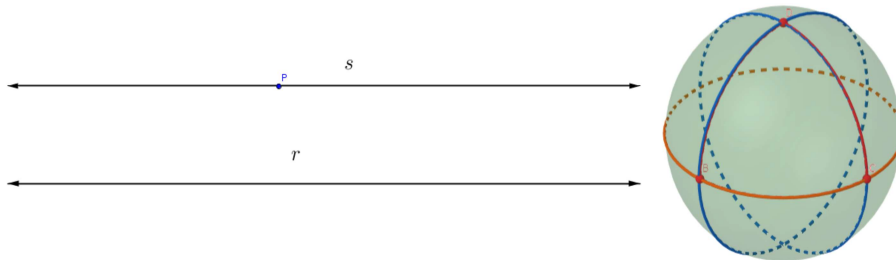
De acordo com Davis e Hersh [14] “uma Geometria Não Euclidiana é aquela que possui axiomas diferentes dos de Euclides”, muitas destas diferenças são oriundas do 5º postulado de Euclides.

Temos na Geometria Euclidiana que “Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , existe uma única reta  $s$  que passa pelo ponto  $P$  e é paralela a  $r$ ”. Em contrapartida, na Geometria Esférica “Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro”, pois no postulado de Riemann afirma que “Por um ponto  $P$  qualquer, fora de uma reta  $r$ , nenhuma reta que passa por  $P$  é paralela a ela”. [25]



A Figura 1.15 apresenta uma representação gráfica destas afirmações considerando os modelos usuais de ambas geometrias.

Figura 1.15: Quinto postulado na Geometria Euclidiana e Geometria Esférica



Fonte: Autor, com o geogebra online

Considerando os modelos como representações das superfícies plana e esférica e a seguinte definição de reta:

**Definição 6** *Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , o segmento  $\overline{AB}$  é o conjunto cujos elementos são os pontos  $A$  e  $B$ , e todos os pontos que se encontram na reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e que estão entre  $A$  e  $B$  [27].*

Pode-se observar que o conceito de reta contido na Definição 6 destaca outra divergência pois na Geometria Esférica, criada por Bernhard Riemann, a reta é uma circunferência máxima e portanto os pontos na superfície podem determinar mais de uma reta. Além disso, a reta é ilimitada, porém tem comprimento finito [1].

## 2.2 A curvatura de uma curva

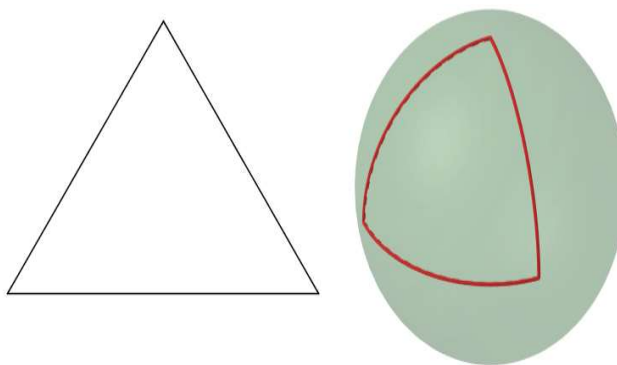
Tomando os modelos usuais para as geometrias euclidiana e esférica, para Minhós [23] procura, intuitivamente, uma medida da curvatura de uma curva. Essa medida deverá levar em consideração as seguintes propriedades:

- 1) A curvatura de uma linha reta deve ser zero;
- 2) A curvatura de uma circunferência deve ser constante, e inversamente proporcional ao seu raio.

A partir do item 2, podemos entender que uma circunferência muito grande, assim como o raio, teremos uma curvatura tendendo a zero. Em contrapartida, quanto menor o raio da circunferência, maior será a curvatura.

Assim, a Geometria Euclidiana é denominada geometria de curvatura zero e a Esférica é a geometria de curvatura maior que zero [20], o que nos leva a uma percepção bastante diferenciada de ambas.

Figura 1.16: Representação de curvatura na Geometria Euclidiana e Geometria Esférica



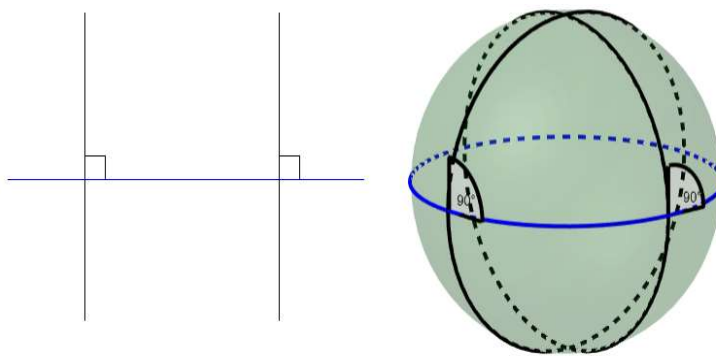
Fonte: Autor, com o geogebra online

## 2.3 Comparação entre as Geometrias

Por fim, pode-se levar através da percepção espacial abordada anteriormente. A seguir iremos apresentar alguns conteúdos matemáticos, na superfície esférica, os quais alunos visualizam e entendem as diferenças entre as duas geometrias:

1) **Paralelismo** Figura 1.17: Na euclidiana duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si. Na esférica as duas retas não são paralelas, porém são concorrentes entre si.

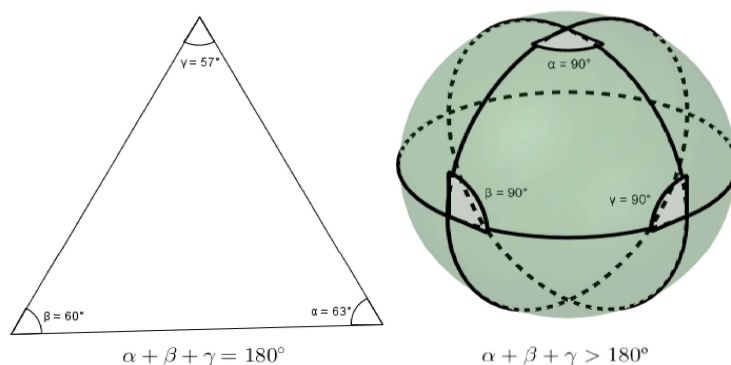
Figura 1.17: Item 1



Fonte: Autor, com o geogebra online

2) **Soma dos ângulos internos** Figura 1.18: Na euclidiana a soma dos ângulos internos é igual a  $180^\circ$  e na esférica pode ultrapassar este valor.

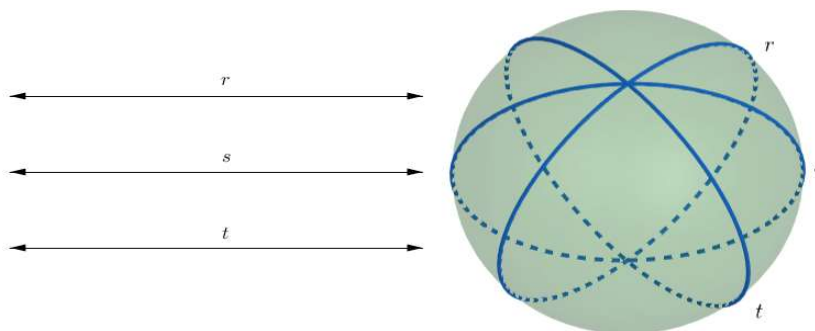
Figura 1.18: Item 2



Fonte: Autor, com o geogebra online

3) **Retas paralelas:** A Figura 1.19 são retas equidistantes na Geometria Euclidiana. Quanto à Geometria Esférica as paralelas não existem.

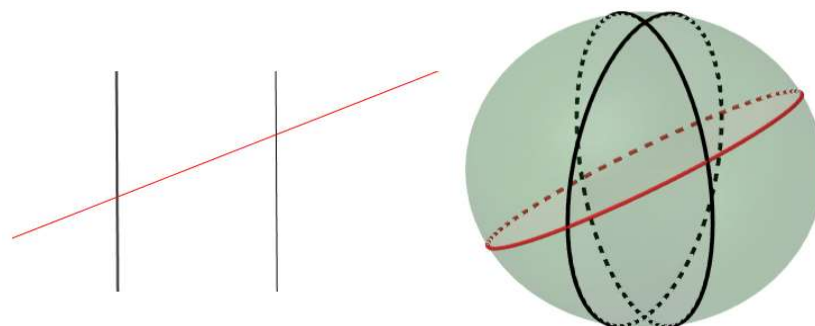
Figura 1.19: Item 3



Fonte: Autor, com o geogebra online

4) **Uma reta intercepta uma de duas paralelas** Figura 1.20: Podemos observar que a terceira reta intercepta as duas retas, as quais são paralelas. Como não há paralela na Geometria Esférica, não irá ocorrer.

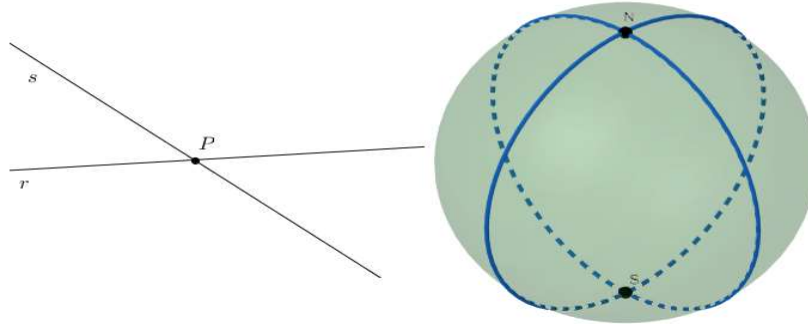
Figura 1.20: Item 4



Fonte: Autor, com o geogebra online

5) **Interseção** Figura 1.21: Duas retas distintas podem ter um ponto em comum na Geometria Euclidiana. O caso da Geometria Esférica também ocorre, porém haverá dois pontos em comum (pontos antípodas).

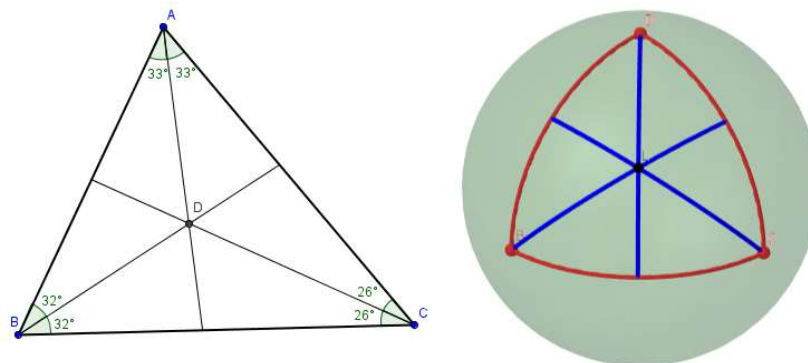
Figura 1.21: Item 5



Fonte: Autor, com o geogebra online

6) **Bissetriz** Figura 1.22: São semi-retas que dividem o ângulo pela metade e possuem três delas. Na Geometria Esférica são três círculos máximos.

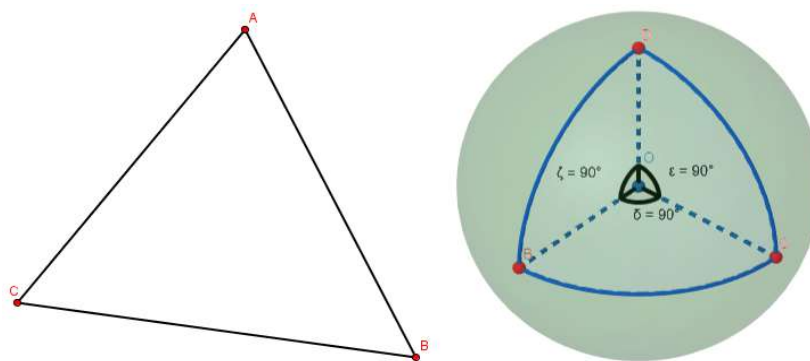
Figura 1.22: Item 6



Fonte: Autor, com o geogebra online

7) **Lados de um Triângulo** Figura 1.23: Os lados desse triângulo representam segmentos de retas. Já na geometria esférica, os lados são ângulos com vértice no centro da esfera.

Figura 1.23: Item 7

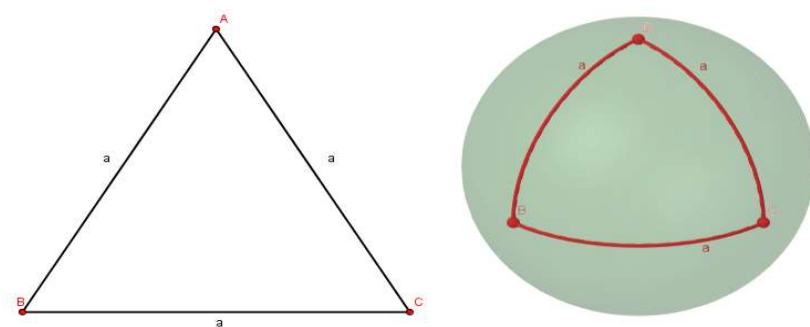


Fonte: Autor, com o geogebra online

Classificação quanto ao lado de um triângulo:

8) **Equilátero:** Esse triângulo plano possui três lados iguais e três ângulos também iguais. Na esfera é possível que esse triângulo tenha três ângulos retos.

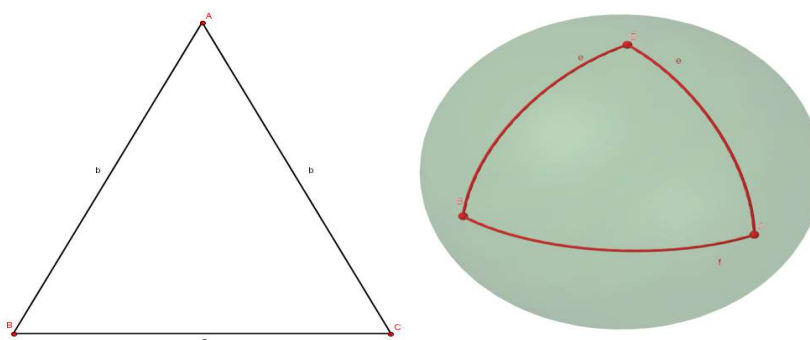
Figura 1.24: Item 8



Fonte: Autor, com o geogebra online

9) **Isósceles:** Dois lados desse triângulo possuirão medidas iguais e dois ângulos serão congruentes. Na esfera o triângulos isósceles poderá ter dois ângulos de 90°.

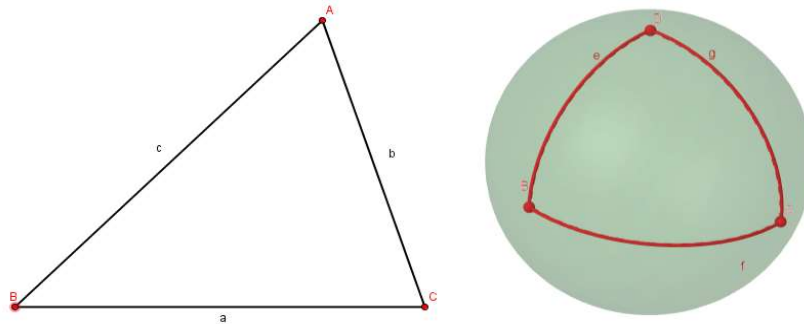
Figura 1.25: Item 9



Fonte: Autor, com o geogebra online

10) **Escaleno:** Nenhuma dos lados e ângulos serão congruentes. Na esfera ocorrerá o mesmo.

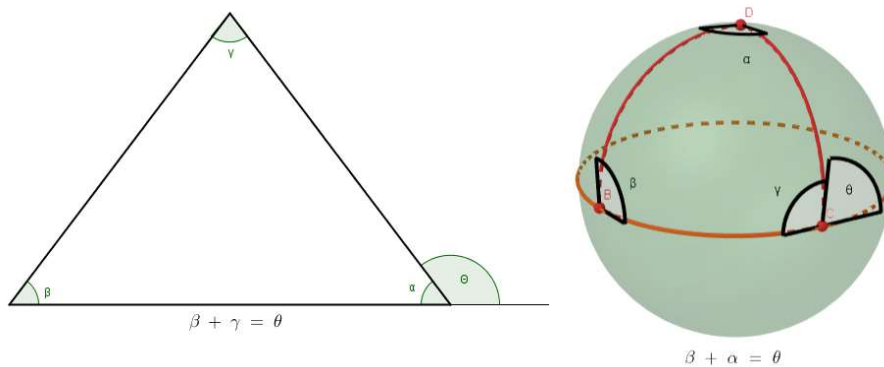
Figura 1.26: Item 10



Fonte: Autor, com o geogebra online

11) **Teorema do ângulo Externo:** Na geometria plana o teorema é válido, pois a soma dos ângulos internos não adjacentes é igual à  $180^\circ$ . Na Geometria Esférica o teorema falha, porque varia entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ , ou seja, ultrapassa os  $180^\circ$ .

Figura 1.27: Item 11



Fonte: Autor, com o geogebra online

## CAPÍTULO 3: TEORIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA

O termo Engenharia Didática surgiu na Didática da Matemática nos anos 80. Essa denominação, segundo Artigue [7], constitui em um trabalho didático comparável a atividade desenvolvida por um engenheiro que para desenvolver um projeto se apoia em conhecimentos científicos de forma a solucionar problemas complexos. No caso de um educador, que prepara um projeto de ensino (ou de pesquisa) para ser desenvolvida no contexto da sala de aula. Essa comparação de um trabalho do engenheiro está relacionada à concepção, planejamento e execução de um projeto, que se fundamenta em conhecimentos científicos.

A Engenharia Didática é vista como uma metodologia de pesquisa, que contempla desde a dimensão teórica até a dimensão experimental. Uma das vantagens em conduzir a pesquisa por essa metodologia é a capacidade de interligar a investigação (ou plano teórico) com a ação (ou plano experimental) da prática educativa. Porém, para Pais [24] destaca a comparação entre didática e o trabalho do engenheiro, exige-se evidenciar que o modelo teórico não é capaz de dar conta de todos os desafios relativos à complexidade do objeto educacional.

Com essa metodologia, que baseia em realizações didáticas em sala de aula, Artigue [7] destaca algumas características, os quais baseiam em concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. Neste sentido, Machado [22] distingue os dois níveis da Engenharia Didática, que são necessários e complementares. O primeiro é microengenharia, que está relacionada às pesquisas que têm por objeto de estudo um determinado assunto. Estas pesquisas são realizadas de forma local e consideram principalmente a complexidade dos fenômenos de sala de aula. O segundo é macroengenharia, nos quais são pesquisas que possibilitam constituir a complexidade dos estudos da microengenharia e os fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem. Esses tipos de pesquisa se complementam e por isso são indispensáveis. Caracteriza-se também, ainda destaca Artigue [7], como pesquisa experimental pelo registro dos estudos realizados no qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão associados. Para esta autora, a validação é realizada no confronto entre a análise a priori, que se apoia no quadro teórico e análise a posteriori, sendo considerada uma validação interna. Esse tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, sem necessidade de aplicação de um pre-teste ou pós-teste.

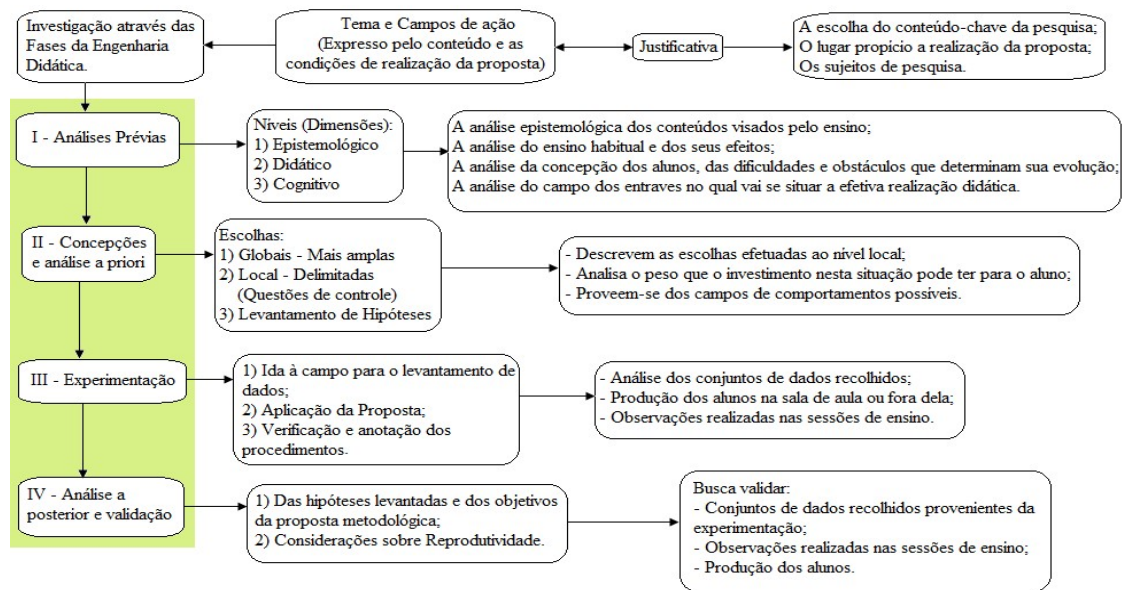
Este capítulo caracteriza-se como teórico conceitual sobre a engenharia didática, pois apresenta a organização coerente de ideias sobre esse assunto. A seguir, será mostrada o processo experimental da metodologia da engenharia didática, o qual é constituído por quatro fases:

- 1ª fase: Análises prévias (ou preliminares);
- 2ª fase: Concepção e a análise a priori;
- 3ª fase: Experimentação (ou implementação);
- 4ª fase: Análise a posteriori e validação.

Veremos a seguir com mais detalhes cada uma dessas fases e para uma melhor compreensão de seus objetivos e da relação entre elas, foi elaborado um mapa.

Este mapa tem como objetivo permitir o entendimento geral de cada uma das quatro fases da Engenharia Didática.

Figura 1.28: Fases da Engenharia Didática



Fonte: Adaptado de Carneiro [10]

A figura 1.28 mostra a necessidade de readequação e de replanejamento de cada etapa durante o processo, desde a análise prévia até a análise a posteriori e a validação da experiência. Também mostra o confronto da análise prévia com a análise a posteriori.

### 3.1 Análises prévias

Essa primeira fase tem o objetivo de conhecer o funcionamento do ensino habitual de um determinado assunto para poder propor uma intervenção que modifique para melhor dentro de sala de aula ou fora dela. Artigue [7] sugere que essa análise inclua a diferença entre as três dimensões:

- 1) Dimensão epistemológica: Está associada às características do saber em questão, ou seja, desde o contexto histórico até a abordagem atual;
- 2) Dimensão didática: Está relacionada às características do sistema de ensino, ou seja, como o conteúdo deverá ser transmitido aos estudantes;



3) Dimensão Cognitiva: Diz respeito às características do público que está dirigido o ensino, ou seja, como será o comportamento dos alunos em sala de aula quando fala do processo de ensino-aprendizagem.

Nas análises prévias, Machado [22] entende que são feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão. Ele analisa os seguintes pontos:

- A análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;
- A análise do ensino atual e dos seus efeitos;
- A análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução;
- A análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática.

Para Artigue [7] coloca que essa fase não deve se basear apenas em um quadro teórico e no que se conhece com relação ao campo de estudo. A pesquisadora observa que essa primeira fase devem ser feitas análises considerando os seguintes pontos:

- A análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- A análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
- A análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- A análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
- E, naturalmente, tende em conta os objetivos específicos da investigação.

Já os autores Almouloud e Coutinho [4] acrescentam mais um ponto para poder levar em consideração nesta primeira fase:

- Epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- Do ensino habitual e dos seus efeitos;
- Das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- Das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- A consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- O estudo da transpiração didática do saber considerando o sistema educativa no qual insere-se o trabalho.

Ao serem analisados esses pontos, é na análise prévia que vai fundamentar a construção da engenharia didática, pois Artigue [7] relata que nessa fase podem ser retomados nas outras fases da metodologia conforme apareçam as necessidades.

## 3.2 Concepção e a análise a priori

Na segunda fase o professor/pesquisador deverá decidir sobre que variáveis (didáticas) irá trabalhar, já que é orientado pelas análises prévias. A ideia é agir sobre as variáveis que presumem serem importantes ao problema da pesquisa e também sobre as variáveis que podem conduzir a caminhos ou soluções para o problema.

Artigue [7] descreve a distinção dos tipos de variáveis de comando para serem observados nesta fase e manipulada pelo pesquisador:

- As variáveis macro-didática ou globais, que dizem respeito à organização global da engenharia;
- As variáveis micro-didática ou locais, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase.

Para Machado [22], esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou de ordem específica, ou seja, depende do conteúdo matemático estudado.

Para Artigue [7], o objetivo da segunda fase é determinar como as escolhas feitas permitem controlar o comportamento dos alunos e explicar seu sentido. Assim, na análise a priori o pesquisador deve:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida;
- Analisar a importância dessa situação para o aluno. Particularmente, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Com isso, após avaliar essas variáveis, a segunda fase poderá ocorrer se uma situação pode ser vivida como adidática, pois o professor terá a concepção da situação de aprendizagem para o conteúdo, podendo influenciar na terceira fase.

## 3.3 Experimentação

Na terceira fase é o planejamento em prática, tendo contanto com os alunos e o que irá trabalhar o conteúdo matemático.

Segundo Machado [22], é a fase da realização da engenharia com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que dá o contato pesquisador/professor/observador com a população de alunos objeto da investigação. Destaca, ainda a autora, que a experimentação supõe:

- A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- O estabelecimento do contrato didático;
- Aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- Registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).

Quanto ao último item, Pais [24] nota que é necessário atentar para o maior possível de informações que podem colaborar no desenvolvimento do fenômeno pesquisado.

Nesse sentido, deve-se recolher dados durante a experimentação, fazendo observações sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. O que pode determinar essa escolha são as variáveis priorizadas na segunda fase.

### **3.4 Análise a posteriori e validação**

Por fim, a quarta e última fase deve analisar as produções dos alunos, as observações realizadas quanto ao comportamento deles durante o desenvolvimento da sequência didática e também os dados construídos no decorrer da experimentação.

Para Pais [24], a quarta fase tende a se valorizar quando complementa os dados obtidos por meios de outras técnicas (metodologia externa), como questionário, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, entre outras. Esses podem ser úteis para uma melhor compreensão do fenômeno. Machado [22] compreende que nesta fase são realizadas tanto durante a experimentação quanto no final dela, isto é, as fases 3 e 4 não são excludentes.

Com isso, deve-se observar as expectativas declaradas na segunda fase. Artigue [7] compara as fases 2 e 4 se elas validam, ou não, as hipóteses levantadas no início da pesquisa.

# CAPÍTULO 4: PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Sequência Didática é um termo em educação para definir um procedimento encadeado de passos, ou etapas ligadas entre si para tornar mais eficiente o processo de aprendizado. São planejadas e desenvolvidas para a realização de determinados objetivos educacionais, com início e fim conhecidos tanto pelos professores, quanto pelos alunos.

Neste capítulo, o objetivo é propor uma sequência didática utilizando engenharia didática como metodologia, já que o tema escolhido é a geometria esférica. A justificativa está vinculada a existência de situações simples entendimento que envolve triângulos, curvas, circunferências, esferas, os quais apresentam a importância do ensino de geometria aos estudantes.

Logo, essa proposta será seguida pelas 4 fases da engenharia didática e organizada nos próximos subcapítulos.

## 4.1 Fase 1

O pesquisador deve fazer uma análise dos livros didáticos, pois deve verificar o que eles abordam sobre Geometria, com a finalidade de fazer uma avaliação diagnóstica, já que deve basear em concepção, realização, observação e análise da sequência didática. Isso é para obter um mapeamento do conhecimento prévio dos alunos sobre o conteúdo, ou seja, deve incluir as três dimensões, fazendo uma revisão, onde ocorrerá a pesquisa e público-alvo deverá escolher.

## 4.2 Fase 2

Essa fase funciona como mecanismos de orientação para o desenvolvimento da fase 3 desta metodologia. O professor deve determinar as escolhas quanto às variáveis em sala, permite controlar os alunos de forma comportamental e explicar os sentidos desse comportamento. Logo, serão descritas como serão os encontros:

- 1) O professor poderá abordar o aspecto histórico da geometria aos alunos e investigar conceitos básicos da Geometria Plana;
- 2) Fazer com que os estudantes possam explorar os recursos do software GeoGebra e desenvolver algumas habilidades utilizando ferramentas do programa, tanto em 2D

quanto em 3D;

3) Os alunos irão construir polígonos regulares por meio de suas respectivas propriedades com o auxílio do GeoGebra 2D. Já em 3D, seria identificar as concepções desses estudantes em relação à geometria terrestre. Isso é para reconhecer a existência da Geometria Esférica.

4) O docente aplicará uma atividade para o aprofundamento de conceitos elementares referentes a Geometria Esférica.

5) Propor desafios que exigem a mobilização de conhecimentos adquiridos durante o desenvolvimento da sequência de ensino e de conhecimento geométrico.

Para cada encontro, destaca-se a importância de realizar uma análise posteriori, pois deve verificar se é necessário fazer uma correção na elaboração do encontro seguinte. O importante é determinar o objetivo, avaliar as variáveis de comando (didáticas) envolvidas e prever as estratégias de resolução.

### 4.3 Fase 3

Nesta fase seria a apresentação do projeto previsto para o encontro, é o momento em que o professor/pesquisador apresenta aos alunos as tarefas e os estudos que irão realizar. Nesse caso, também apresenta a análise a priori. Para certos encontros, o professor poderá utilizar situações-problemas e, para melhorar a comunicação entre estudantes, será a realização de atividades em dupla.

Para Almouloud [3], a fase 3 permite ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo novos conhecimentos. Nesse sentido o professor será como mediador e orientador, aplicando exercícios que contêm interpretação. Nesta etapa é aplicação dos instrumentos de pesquisa e relatar, de forma escrita, a cada desses encontros. Para tais efeitos, serão descrito como vai ser esses encontros:

#### Encontro 1

Cabariti [8] cita alguns estudos e práticas docentes a partir do levantamento de alguns aspectos que destacam o interesse de uma proposta de aprofundamento da Geometria Euclidiana, cujos conceitos são objetos de ensino na Educação Básica, afirmam que a riqueza da história da Geometria proporcionaria um estudo sobre Geometria Esférica.

Nesse sentido, o pesquisador irá fazer uma abordagem histórica da geometria e a sua importância no cotidiano. Explorar, juntamente com os alunos, os conceitos básicos da Geometria Plana, que são os pontos, as retas e os planos.

#### Encontro 2

Apresenta-se a geometria dinâmica, no caso o GeoGebra, aos estudantes. O encontro 1 os alunos chegaram a ver os conceitos básicos da geometria de forma tradicional. Neste encontro aprenderão a utilizar as ferramentas básica do GeoGebra, criando ponto, retas, interseções, retas perpendiculares, retas paralelas, dentre outros. Assim como em

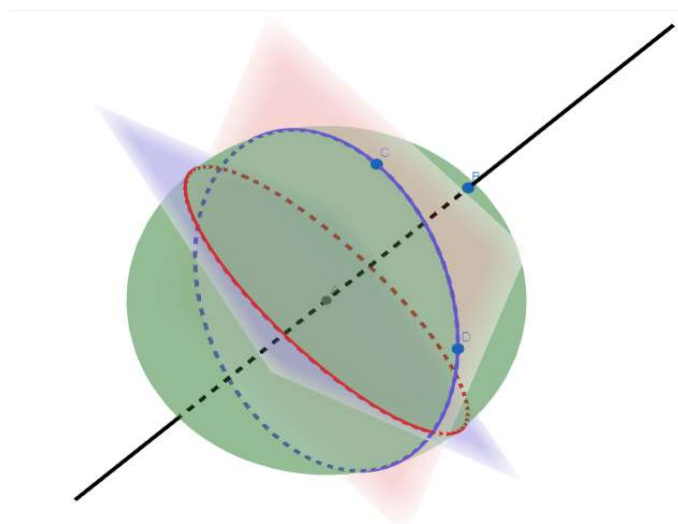
GeoGebra 3D, a diferença é a utilização das ferramentas que não contém no GeoGebra 2D, como a interseção de superfícies, prismas e, principalmente, esférica.

### Encontro 3

Com a experiência adquiridos no encontro anterior, os discentes construirão polígonos utilizando o GeoGebra para que eles tenham uma visualização dimensional e, através das figuras construídas, deverão construir fórmulas matemáticos de suas respectivas figuras.

No GeoGebra 3D os alunos irão construir retas esféricas dado um dos pólos e também retas esféricas dados dois pontos não antípodas. O passo a passo dessa construção está disponível em [www.geogebra.org/m/zxhsdxdg](http://www.geogebra.org/m/zxhsdxdg). A ilustração da figura irá parecer da seguinte forma:

Figura 1.29: Construção das retas esféricas



Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

O pesquisador deverá prever que os alunos percebam as limitações da Geometria Euclidiana, como por exemplo a Figura 1.29, pois mostra a diferença entre as duas geometrias. Assim o docente irá fazer a busca das soluções utilizando conceitos de Geometria Esférica e também a busca da solução em uma superfície esférica.

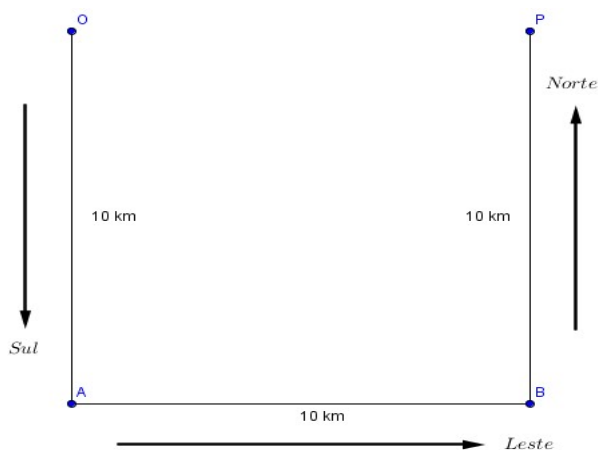
### Encontro 4

O professor apresentará a seguinte situação-problema, adaptada de Silva [26]:

Partindo de um certo ponto da Terra, um caçador andou 10 quilômetros para o sul, 10 quilômetros para o leste e 10 quilômetros para o norte, voltando ao ponto de partida. Ali encontrou um urso. De que cor era o urso?

O primeiro ponto é que o professor deverá estar ciente de que os alunos irão representar a trajetória do caçador da seguinte forma:

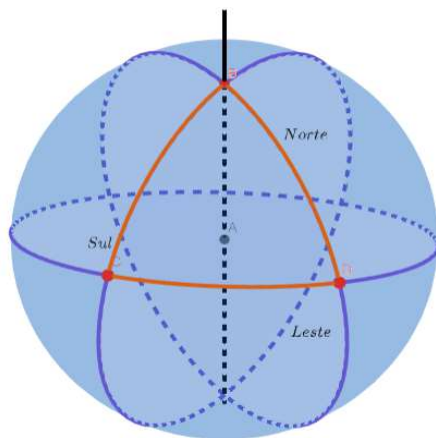
Figura 1.30: Representação da trajetória do caçador na Geometria Euclidiana



Fonte: Autor, com o geogebra online

Propositalmente, os estudantes irão representar a trajetória no GeoGebra. Espera-se que entendam que no plano é impossível o caçador voltar ao ponto de partida, portanto, não há solução. Logo, a resolução dessa atividade seria pelo GeoGebra 3D e novamente os alunos irão construir a tal trajetória do caçador em uma superfície esférica. A Figura 1.31 será representada dessa forma na visão do docente:

Figura 1.31: Representação da trajetória do caçador na Geometria Esférica



Fonte: Autor, com o geogebra 3D online

Nesse momento, espera-se que os alunos percebam que estamos tratando de uma superfície esférica, que o caçador partiu do Polo Norte. Para a resposta da cor do urso, ele é branco e o trajeto formado pelo caçador é um triângulo esférico. Porém, através da Geometria Euclidiana não se consegue a resolução correta deste problema e para isso precisamos recorrer a outras geometrias, no caso a esférica.

## Encontro 5

Nesse encontro o docente deverá entender que não é um pós-teste, já que é uma das

características da engenharia didática. Para isso, o professor irá aplicar exercícios com a utilização do GeoGebra 3D, aprofundando conceitos elementares referentes à Geometria Esférica. Nesse sentido, a atividade proposta seria as construções vistas na seção 2.3, onde mostra alguns conteúdos matemáticos que envolve a geometria esférica.

Ainda na fase de experimentação, o professor deve aplicar um questionário no final da sequência. Seria este:

- 1) Nome;
- 2) Idade;
- 3) Gênero;
- 4) Você gostou de ter trabalhado com estas atividades?;
- 5) O que achou dessa experiência?;
- 6) Teve dificuldade em utilizar o GeoGebra?;
- 7) Gostaria de trabalhar outros assuntos da matemática de forma semelhante? Por quê?;
- 8) Quanto ao grau de dificuldade nas resoluções das atividades ou compreensão dos conteúdos relacionados.

#### **4.4 Fase 4**

Por fim, o professor deve analisar as fases 2 e 4 se esta metodologia ocorreu como esperado. A cada encontro, os alunos devem registrar por escrito os procedimentos, mesmo considerando algo errado para solução. Assim, permite ao professor a leitura dos caminhos percorridos pelos discentes para resolução das atividades.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste trabalho, percebe-se que a geometria é um dos ramos mais antigos da matemática. Ela é tão ligada ao ser humano que não se pode imaginar uma pessoa sem sua presença no cotidiano. Os estudantes muitas vezes não conseguem identificar noções relevantes em suas vidas.

Com a realização deste trabalho, foi possível observar de perto as principais diferenças entre as geometrias Euclidiana e Esférica, através de gráficos gerados com o *Software* Geogebra 2D, Geogebra 3D e definições. Além disso, o GeoGebra não é a única geometria dinâmica para se trabalhar com alunos, vai além dele. Isso contribui significativamente para construção do conhecimento.

Outro ponto é a escolha da engenharia didática como metodologia de pesquisa, já que o foco é a importância para o planejamento da sequência didática. Ao seguir o processo de suas fases, percebe-se que o pesquisador deverá prever as dificuldades que podem ser enfrentado no decorrer da metodologia.

Portanto, espera-se que este trabalho sirva como referência para professores de Matemática. Além disso, acreditamos que a partir da proposta, o pesquisador interessado possa estender e fazer adaptações por muitos outros caminhos dentro da Matemática e também fora dela sem grandes dificuldades.

# REFERÊNCIAS

- [1] ABREU, S. M. **Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas a astronomia de posição**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João Del-Rei, [Ouro Branco], 2015.
- [2] ALLEVATO, N. S. G. Utilizando animação computacional no estudo de funções. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. São Paulo, v.1, n.2, p. 111-125, jul./dez. 2010.
- [3] ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2001.
- [4] ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: característica e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, p. 62-77, UFSC, 2008.
- [5] ANDRADE, L. N. Geometria dinâmica com o Geogebra. **XX Semana de Matemática da UFRN**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.
- [6] ANDRADE, L. N. Geometria espacial com GeoGebra. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 87, p. 36–41, 2º quadrimestre 2015.
- [7] ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.
- [8] CABARITI, E. A geometria hiperbólica na formação docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do cabri-géomètre. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo, SP, 2006.
- [9] CARMO, M. P. Geometrias Não-Euclidianas. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 6, 25-48, dez de 1987.
- [10] CARNEIRO, V. C. G. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, v. 13, n. 23, p. 87-119, 2005.
- [11] CARVALHO, G. S. **Geometrias não euclidianas: Uma proposta de inserção da geometria esférica no ensino básico**, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, UFV, 2017.

- [12] CONSTANTINO, R. **O ensino da geometria no ambiente Cinderella**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2006.
- [13] COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2001.
- [14] DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.
- [15] DUELI, L. J. **Geometria Esférica: Proposta de sequência didáticas interdisciplinares**, Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Juiz de Fora, 2013.
- [16] GEOGEBRA HOMEPAGE, disponível em: <<https://www.geogebra.org>>
- [17] HELENA, R. F. S.; FACHIN, M. P. G. **Uma proposta para o ensino de geometria na educação de jovens e adultos com o uso de mídias digitais**. 2015. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134455/000985934.pdf?sequence=1>> Acesso em: 11 de julho de 2019.
- [18] HERTZER, K.; NÉRI, C. I. **Software Graphmatica versão 2.4**. Edison, New Jersey (USA): KSoft Systems Inc., 2014. Disponível em: <<http://http://www.graphmatica.com/>>. Acesso em: 27 de novembro de 2019.
- [19] INSTITUTO GEOGEBRA. Disponível em: <<http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>> acessado em 06 de junho de 2019.
- [20] KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática e imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos**, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.
- [21] MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**, Belo Horizonte. CAED-UFGM. 2012. Disponível em: <[http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/Fundamentos\\_de\\_geometria\\_plana.pdf](http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf)>. Acesso em: 11 de julho de 2019
- [22] MACHADO, S. D. A. **Engenharia Didática**. In: **Educação Matemática: Uma nova introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC 2010.
- [23] MINHÓS, F. **Análise matemática III**. 2011. Disponível em: <[https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4270/1/Ap\\_AMIII\\_2010-2011.pdf](https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4270/1/Ap_AMIII_2010-2011.pdf)>. Acesso em: 06 de dezembro de 2019.
- [24] PAIS, L. C. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa**, 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- [25] PRESTES, I. C. R. **Geometria Esférica: Uma conexão com a Geografia**, Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PUC/SP, 2006.

- [26] SILVA, K. B. R. **Noções de geometrias não euclidianas:** hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. 1<sup>a</sup> ed. Curitiba, PR: CRV, 2011.
- [27] SILVA, W. D. **Uma introdução à geometria esférica**, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.
- [28] SANTOS, J. C. A. P. **Uma proposta de geometria não euclidiana para sala de aula**. São Paulo: IME - USP; Projeto de ensino de matemática, 2009.