UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

DALSIVANIA DA SILVA GARCIA

TÓPICOS INTRODUTÓRIOS DO CORPO DOS REAIS E ALGUMAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS DA RETA

MACAPÁ
2019

DALSIVANIA DA SILVA GARCIA

TÓPICOS INTRODUTÓRIOS DO CORPO DOS REAIS E ALGUMAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS DA RETA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento.

MACAPÁ
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB2/1569

Garcia, Dalsivânia da Silva.
Tópicos introdutórios do corpo dos reais e algumas noções topológicas da reta / Dalsivânia da Silva Garcia; Orientador, Marcel Lucas Picanço Nascimento. – Macapá, 2019.
33 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Conjuntos. 2. Pontos de acumulação. 3. Conjunto de cantor. I. Nascimento, Marcel Lucas Picanço, Orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

511.322 G216t
CDD. 22 ed.

DALSIVANIA DA SILVA GARCIA

TÓPICOS INTRODUTÓRIOS DO CORPO DOS REAIS E ALGUMAS NOÇÕES TOPOLÓGICAS DA RETA

A banca examinadora abaixo relacionada aprova a Monografia defendida à mesma, como parte da exigência para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, na área de concentração em Matemática Pura e linha de Análise Complexa.

Média: 8,5 (X) Aprovado ( ) Reprovado

Macapá, 29 de Novembro de 2019

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento
Orientador - UNIFAP

Welber Aires de Oliveira

Prof. Me. Welber Aires de Oliveira
1º Membro - UNIFAP

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
2º Membro - UNIFAP

AGRADECIMENTOS

Toda honra e glória ao Senhor Jesus, pois foi quem me sustentou ao longo da graduação e deste trabalho de conclusão de curso.

Agradeço em especial ao meu esposo Roberto Picanço e aos meus pais Maria do Socorro Garcia e Elias Garcia por acreditarem em mim.

Também sou grata aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado com amor, carinho e dedicação, não posso esquecer de agradecer a todos os meus professores por seus esforços em compartilhar conosco o seu melhor.

E por fim agradeço ao meu orientador Me. Marcel Lucas Nascimento por toda a sua paciência e dedicação ao decorrer dos anos.

"E, se algum de vós tem falta de sabedoria,
peça-a a Deus, que a todos dá liberalmente
e não lança em rosto; e ser-lhe-á dada."
(Tiago 1:5)

RESUMO

O presente trabalho foi idealizado para o estudo da análise real. Com o objetivo maior de entender o conjunto de Cantor e suas propriedades, como por exemplo este conjunto é compacto (fechado e limitado), não contém intervalos (tem interior vazio) e não contém pontos isolados (todos os seus pontos são pontos de acumulação). Mas para alcançar esses objetivos, fez-se necessário o estudo do conjunto dos números reais pelo qual pode-se compreender as suas propriedades juntamente com as suas consequências; o estudo de sequências em que foi constatado que a partir desse estudo todos os conceitos importantes da Análise, de uma forma ou de outra, reduziam-se a algum tipo de limite; e não mais nem menos importante o estudo de noções topológicas, que é o ramo da matemática em que são estudados, com grande generalidade, as noções de limite, continuidade e as ideias com elas relacionadas. Ainda dentro de noções topológicas foi de extrema importância o entendimento de: Ponto de acumulação, conjuntos abertos, conjuntos fechados e conjuntos compactos. E por fim, uma vez compreendido essas questões o conjunto de Cantor foi utilizado como uma aplicação de noções topológicas na análise real.

Palavras-chave: Conjuntos. Pontos de acumulação. Conjunto de Cantor.

ABSTRACT

The present work was idealized for the study of real analysis. In order to better understand the Cantor set and its properties, as for example this set is compact (closed and limited), contains no gaps (has empty interior) and does not contain isolated points (all its points are accumulation points). But in order to achieve these goals, it was necessary to study the set of real numbers by which one can understand their properties together with their consequences; the study of sequences in which it was found that from this study all the important concepts of analysis in one form or another were reduced to some kind of limit; and not least the study of topological notions, which is the branch of mathematics in which the notions of limits, continuity, and related ideas are studied in great. Still within topological notions was of the utmost importance the understanding of: accumulation point, open sets, closed sets and compact sets. And finally, once these questions are understood, the Cantor set was used as an application of topological notions in real analysis.

Keywords: Sets. Accumulation points. Cantor Set.

Sumário

INTRODUÇÃO 8

1 Números Reais 9
1.1 $\mathbb{R}$ é um corpo . . . 9
1.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado . . . 10
1.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo . . . 11

2 Sequências de Números Reais 14
2.1 Definições e Exemplos . . . 14
2.2 O Teorema de Bolzano-Weierstrass . . . 16

3 Noções Topológicas em $\mathbb{R}$ 20
3.1 Conjuntos Abertos . . . 20
3.2 Conjuntos Fechados . . . 21
3.3 Ponto de Acumulação . . . 23
3.4 Conjuntos Compactos . . . 25

4 Conjunto de Cantor 28

Considerações Finais 31

Referências Bibliográficas 32

A Álgebra dos conjuntos 33

INTRODUÇÃO

Neste trabalho é apresentado o conjunto de Cantor como uma aplicação do estudo de topologia na reta. Na qual foi dividido em quatro capítulos.

Para fim informativo, Cantor era Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, nascido em São Petesburgo (Prússia) em 1845, estudou em Zurique, Berlim e Gottingen. Em 1872 foi nomeado professor assistente de matemática em Halle, assumindo a direção da cadeira no ano de 1879.

No primeiro capítulo foi explanado os conceitos do conjunto dos reais bem como suas propriedades e consequências, o segundo capítulo foi realizado em estudo sobre sequências reais, no terceiro capítulo foi falado sobre noções topológicas, abordando: conjuntos abertos, conjuntos fechados, pontos de acumulação e conjuntos compactos e por fim no quarto capítulo o estudo do conjunto de Cantor, que pelas pesquisas realizadas pode-se afirmar que este conjunto é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$ e possui algumas propriedades interessantes bem como: é compacto, não contém intervalos, tem interior vazio e não contém pontos isolados.

Este trabalho foi realizado através de pesquisa bibliográfica com autores renomados tais como [1], [2], [3], [4].

Capítulo 1

Números Reais

Faremos neste primeiro capítulo um estudo superficial do conjunto dos números reais, abordando suas propriedades, juntamente com algumas consequências, com o objetivo de utilizá-los em capítulos posteriores. Esse conjunto será indicado por $\mathbb{R}$.

1.1 $\mathbb{R}$ é um corpo

$\mathbb{R}$ é um corpo se estão definidas duas operações chamadas adição e multiplicação, cumprindo as seguintes condições:

- A adição: em que faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, sua soma $x + y \in \mathbb{R}$.
- A multiplicação: da mesma forma para $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se o seu produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

Essas operações obedecem os seguintes axiomas:

- Associatividade: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{e} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

- Comutatividade: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

$$x + y = y + x \quad \text{e} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

- Elementos Neutros: existem em $\mathbb{R}$ dois elementos distintos 0 e 1 tais que

$$x + 0 = x \qquad \text{e} \qquad x \cdot 1 = x.$$

- Inversos: todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e se $x \neq 0$, existe um inverso multiplicativo $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

- Distributividade: Para $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se

$$x \cdot (x + y) = x \cdot y + x \cdot z.$$

1.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado

$\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, ou seja, existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos números reais positivos, que cumpre as condições seguintes:

(a) $x, y \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$ (a soma e o produto de números reais positivos são positivos)

(b) Seja $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre

$$\text{ou } x = 0, \quad \text{ou } x \in \mathbb{R}^+, \quad \text{ou } -x \in \mathbb{R}^+.$$

Obs.: Se indicarmos com $\mathbb{R}^-$ o conjunto dos números $-x$ onde $x \in \mathbb{R}^+$, a condição (b) diz que

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

e os conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os números $y \in \mathbb{R}^-$ chamam-se negativos.

Veja que, $y - x \in \mathbb{R}^+$ se, e somente se $y > x$ (diz-se que y é o maior do que x). Se $x > 0$ então $x \in \mathbb{R}^+$.

Para a relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

- Transitividade: Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

- Tricotomia: Dados $x, y \in \mathbb{R}$,exatamente uma das três alternativas ocorrem

$$x = y, \qquad x < y \quad ou \quad y < x.$$

- Monotonicidade da adição: se $x < y$ então para todo $z \in \mathbb{R}$ tem-se $x + z < y + z$.

- Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então para todo $z > 0$ tem-se $x \cdot z < y \cdot z$. Se $z < 0$ então $x < y$ implica $x \cdot z > y \cdot z$.

Obs.: todas essas propriedades citadas até agora, podem ser provados facilmente, usando (a) e (b) da definição de corpo ordenado.

1.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Nesta seção falaremos de uma característica muito importante do corpo dos reais e é o que o torna especial em relação à outros conjuntos. Porém antes será necessário a compreensão do que é supremo e ínfimo de um conjunto.

Definição 1.1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso diz-se que b é uma cota superior de X.

Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Então a chama-se uma cota inferior de X.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado, se ele for limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$. O que é equivalente dizer que existe um número real $K > 0$, tal que

$$|x| \leq K$$

para $x \in X$.

Definição 1.2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se supremo de X denotado por $\sup X$ se b é a menor das cotas superiores de X. Isto é,

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

S2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

Definição 1.3. Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio, limitado inferiormente, um número real a chama-se ínfimo do conjunto X denotado por $\inf X$ se a é a maior das cotas inferiores de X. Isto é,

I1. Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x$;

I2. Se $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$

Agora postularemos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, como sendo um corpo ordenado onde se verifica a propriedade a seguir.

Axioma (Postulado de Dedekind). Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{R}$.

O postulado de Dedekind garante a propriedade da "completeza"de $\mathbb{R}$, por isso é também chamado axioma da completeza.

Mostra-se, usando o Postulado de Dedekind, que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente possui ínfimo.

Vejamos agora algumas consequências da completeza dos $\mathbb{R}$, pois são resultados importantes para o andamento do trabalho.

Teorema 1.1. *(i) O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente.*

(ii) O ínfimo do conjunto $X = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$ é igual a 0.

(iii) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Demonstração. (i) Suponhamos por contradição que o conjunto dos $\mathbb{N}$ é limitado superiormente, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$. Então pelo postulado de Dedekind, $\mathbb{N}$ possui supremo, e fazendo $c = \sup \mathbb{N}$ veja que $c - 1$ não é cota superior para $\mathbb{N}$, pois $c - 1$ seria menor que $c = \sup \mathbb{N}$ (que é a menor das cotas superiores).

Logo existe um número natural n_0 tal que $c - 1 < n_0$. Tem-se que $c < n + 1$, como $n + 1 \in \mathbb{N}$ segue que c não pode ser cota superior para $\mathbb{N}$, contrariando o fato de $c = \sup \mathbb{N}$ ser a menor das cotas superiores. Logo $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

(ii) Veja que $0 < 1$ então $0 < \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$, logo 0 é uma cota inferior para X.

Provaremos que não existe cota inferior de X maior que 0, isto é, que não existe $c > 0$ tal que $c \leq \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Sabendo que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente por (i). Dado $\frac{1}{c}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{c} < n_0$. Daí $\frac{1}{n_0} < c$, e portanto c não é cota inferior de X. Consequentemente $0 = \inf X$.

(iii) Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$ visto em (i) tal que $\frac{b}{a} < n$, logo $\frac{b}{a} < n$, então $b < na$. □

Exemplo 1.1. Considere o conjunto $A = \left\{ 1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$, provaremos que A possui ínfimo e que $\inf A = 1$.

Note que $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos

$$1 + \frac{1}{n} > 0 + 1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{ou seja,}$$

$$1 + \frac{1}{n} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostraremos que nenhum $c > 1$ pode ser cota inferior do conjunto A. Para qualquer real $c > 1$, temos

$$\begin{gathered} c - 1 > 0 \iff \\ \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \\ n(c-1) > 1 \iff \\ c - 1 < \frac{1}{n} \iff \\ c > \frac{1}{n} + 1 \end{gathered}$$

Logo c não é cota inferior de A e portanto concluimos que $1 = \inf A$.

Capítulo 2

Sequências de Números Reais

O estudo que será apresentado agora é o estudo de sequências, que trás junto com ele resultados importantes na análise matemática de funções reais.

2.1 Definições e Exemplos

Definição 2.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência.

Definição 2.2. Uma sequência (x_n) diz-se limitada superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ e inferiormente quando $x_n \geq c$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência x_n é limitada quando ela é limitada superior e inferiormente (ou seja, $\exists\ k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$).

Definição 2.3 (Convergência de sequências reais)**.** Diz-se que o número real a é limite da sequência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$ ou $x_n \to a$ (uma sequência que possui limite diz-se convergente. Caso esse limite não exista diz-se que ela é divergente)

Teorema 2.1 (Unicidade do Limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Mostraremos que o limite de uma sequência (x_n) é único. Caso contrário, teríamos $\lim x_n = l_1$ e $\lim x_n = l_2$, tal que $l_1 \neq l_2$. Tomando $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$, pela definição de limite, existem naturais n_1, n_2 tais que

$$|x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\ n > n_1 \quad \text{e}$$
$$|x_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\ n > n_2.$$

Em particular, se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então para todo $n > n_0$, ocorreria que:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - x_n + x_n - l_2| \leq |l_1 - x_n| + |x_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$|l_1 - x_n| < \varepsilon \tag{2.1}$$

e

$$|x_n - l_2| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Da desigualdade 2.1 todos os $x_n \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$ e da desigualdade 2.2 todos os $x_n \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$, o que seria um absurdo, pois estes intervalos são disjuntos, já que $l_1 \neq l_2$.

Portanto, só podemos ter que $l_1 = l_2$.

□

Definição 2.4. Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma subsequência de x é a restrição da função x a um suconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. E escreve-se (x_{nj}) com $j \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.2. *Se o limite de (x_n) é igual a a então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a.*

Demonstração. Veja que $x_n \to a$ então $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, $\forall\ n > n_0$.

Seja $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ uma subsequência, então existe n_{j_0} tal que $n_{j_0} > n_0$ para todo $n_j > n_{j_0} \Longrightarrow n_j > n_{j_0} > n_0$ o que implica que $|x_{n_j} - a| < \varepsilon$.

Logo toda subsequência de (x_n) também converge para a. □

Uma importante condição necessária de convergência de sequências:

Teorema 2.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente e $a = \lim x_n$, com $a \in \mathbb{R}$.

Assim $\lim x_n = a \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então $|x_n - a| < \varepsilon$.

Tomemos $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Veja que

$$\begin{gathered}
|x_n - a| < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \\
-\frac{1}{2} < x_n - a < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \\
a - \frac{1}{2} < x_n < a + \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \\
x_n \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}) \quad \forall\ n > n_0.
\end{gathered}$$

Agora, veja que para os termos x_n com $n \leq n_0$, basta fazer $M = \max\{|x_i|; i = 1, \ldots, n_0\}$, então se tomarmos $K = \max\{M, |a + \frac{1}{2}|\}$ teremos $x_n \leq K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Portanto x_n é limitada.

$\square$

Contraexemplo: A sequência (2,0,2,0,...), cujo n-ésimo termo é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, é limitada mas não é convergente porque possui duas subsequências constantes, $x_{2n-1} = 2$ e $x_{2n} = 0$, com limites distintos.

Acabamos de ver que a recíproca do teorema 3.3 não é verdadeira através desse contraexemplo, pois pelo teorema 2.2 existem duas subsequências que não convergem para o mesmo limite.

Definição 2.5. Uma sequência x_n chama-se monótona quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (não decrescente) ou então $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n (não crescente).

O teorema a seguir nos dá agora, com sequência monótona, uma condição suficiente para convergência de sequência.

Teorema 2.4. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) monótona (não-decrescente), limitada. Escrevamos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = \sup X$, pelo Postulado de Dedekind. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{no} \leq a$.
Assim, para $n > n_0$ temos $x_n \geq x_{no}$ por hipótese. Daí, $a - \varepsilon < x_{no} \leq x_n \leq a$, o que implica $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, para todo $n \geq x_{no}$. Portanto $x_n \longrightarrow a$.

$\square$

2.2 O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Proposição 2.5. Toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona.

Demonstração. Diremos que um termo x_n da sequência dada é destacado quando $x_n > x_p$ para todo $p > n$.

Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Só podemos ter duas situações:

(i) Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < ... < n_k < ...\}$ então a subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{D}}$ será monótona decrescente, e já teremos o resultado.

(ii) Se D for finito, então existe, $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$ tal que $n \notin D$.

Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} \leq x_{n_2}$. Como $n_2 > n_1$, $n_2 \notin D$, assim x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_3} \geq x_{n_2} \geq x_{n_1}$. Prosseguindo obtemos uma subsequência não-decrescente.

$$x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \ldots \leq x_{n_k} \ldots .$$

Portanto, independente do caso (i) ou (ii) conseguimos uma sequência monótona.

□

Teorema 2.6 (de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência que converge para um número real.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência real limitada, pela proposição anterior, (x_n) possui uma subsequência monótona $(x_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}'}$. Como (x_n) é limitada, então (x_{n_j}) também o é.

Se (x_{n_j}) é monótona não-crescente e como é limitada inferiormente $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq ... \geq k$, então (x_{n_j}) é convergente e seu limite é $inf\left\{(x_{n_j})\right\}$. Portanto (x_{n_j}) converge.

Se (x_{n_j}) é monótona não-decrescente e como é limitada superiormente, então $lim(x_{n_j}) = sup\left\{(x_{n_j})\right\}$.

□

A seguir demonstraremos o critério de Cauchy. Porém antes de demonstrarmos este critério precisamos definir sequência de Cauchy.

Definição 2.6. Uma sequência x_n de números reais é denominada uma sequência de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$, existe n_o tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq n_0$.

Teorema 2.7 (Critério de Cauchy)**.** *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos, primeiramente, que x_n é convergente e seja r seu limite.
Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - r| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n > n_0$.

Logo, se n e m são maiores que n_0 temos, usando a desigualdade triangular

$$|x_n - x_m| = |x_n - r + r - x_m| \leq |x_n - r| + |x_m - r| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\therefore \quad |x_n - x_m| < \varepsilon, \quad para \quad m, n > n_0.$$

($\Longleftarrow$) Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Pela hipótese, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - x_m| < 1, \quad para \quad n, m \geq n_{0.}$$

Logo,

$$|x_n - x_{n_0}| < 1, \quad para \quad n \geq n_0.$$

Da Desigualdade Triangular, segue então

$$|x_n| \leq |x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|, \quad para \quad n \geq n_0.$$

Seja K' o maior dos números

$$|x_1|, \ |x_2|, \ ..., \ |x_{n_0-1}|$$

e seja K o maior dos dois números K' e $1 + |x_{n_0}|$ Portanto

$$|x_n| \leq K, \quad para \quad todo \quad n.$$

Aplicando o Teorema de Bolzano Weierstrass 2.6, segue-se que (x_n) contém uma subsequência convergente $\left(x_{n_j}\right)$, e r seu limite.
Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0' \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|x_{n_j} - r\right| < \varepsilon, \quad para \quad n_j \geq n_0'.$$

Por outro lado, em virtude da hipótese, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0'' \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad para \quad m, n \geq n_0'',$$

pela Desigualdade Triangular

$$|x_m - r| = |x_m - x_n + x_n - r| \leq |x_m - x_n| + |x_n - r|$$

$$|x_m - r| \leq |x_m - x_n| + |x_n - r| \tag{2.3}$$

para quaisquer termos x_n e $x_m \in (x_n)$. Logo se em (1) tomarmos

$$m \geq \max\left(n_0', n_0''\right)$$

e

$$n = n_j \geq \max\left(n_0', n_0''\right)$$

temos

$$|x_m - r| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

o que prova a convergência de (x_n).

$\square$

Capítulo 3

Noções Topológicas em $\mathbb{R}$

A topologia é um ramo da matemática no qual são estudados, com grande generalidade, as noções de limites, de continuidade e as ideias com elas relacionadas. Com isso veremos a partir de agora alguns conceitos topológicos no conjunto dos reais.

3.1 Conjuntos Abertos

Antes de falarmos de conjuntos abertos precisamos compreender o que é um ponto interior e interior de um conjunto X.

Definição 3.1. Diz-se que o ponto a é interior ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X.

Definição 3.2. Interior do conjunto X é o conjunto dos pontos interiores a X, e representado por $int\ X$.

Agora podemos classificar um conjunto aberto em $\mathbb{R}$: é o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A = int\ A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A, ou seja, $A \subset intA$.

Exemplo 3.1. Seja o conjunto (a, b]. Note que (a, b] não é aberto, pois existe um ponto b que pertence a $(a, b]$ e não pertence ao seu interior. Ou seja $b \notin int(a, b]$

Feito isto, trabalharemos o seguinte teorema, que apresenta importantes propriedades de conjuntos abertos.

Teorema 3.1. *a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.*

b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, a união $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração. $a)$ Se $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são conjuntos abertos, logo existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1 \quad \text{e} \quad (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2.$$

Seja ε_0 o menor dos dois números ε_1 e ε_2. Então $(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subset A_2$, logo $(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \subset A_1 \cap A_2$.

Assim todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é ponto interior.

$b)$ Se $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda = A$ então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto $x \in A$ é interior, isto é, A é aberto. $\square$

É importante termos atenção no seguinte:

De $a)$ no teorema 3.1 resulta que a interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

De $b)$ do mesmo teorema resulta que a reunião infinita de conjuntos abertos é um conjunto aberto, porém a interseção infinita de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto.

Por exemplo: Se $A_1 = (-1, 1), A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \ldots, A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \ldots$ então afirmamos que $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \{0\}$. Com efeito, se $x \neq 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > \frac{1}{n}$, logo $x \notin A_n$ pois: $\dfrac{1}{n} < |x| \Longrightarrow -x < \dfrac{1}{n} < x \Longrightarrow x > \dfrac{1}{n}$ e $x > -\dfrac{1}{n}$.

Se $x \notin A_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, x não pode pertencer a interseção.

3.2 Conjuntos Fechados

Primeiro vamos entender o que é um ponto aderente e o que vem a ser o fecho de um conjunto, para poder definir conjunto fechado.

Definição 3.3. Diz-se que um ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$.

Veja que tomando $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é evidente que $a \in X$ é aderente a X. Ou seja,

Exemplo 3.2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado, não vazio. Então $a = \inf X$ e $b = \sup X$ são aderentes a X.

Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in X$ tal que $a \leq x_n \leq a + \frac{1}{n}$, somando $(-a)$

$$a - a \leq x_n - a \leq a + \frac{1}{n} - a \Longrightarrow$$

$$0 \leq x_n - a \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow$$

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$a = \lim x_n,$$

portanto a é ponto aderente de X

Da mesma forma, se b é aderente a X então para todo $n \in \mathbb{N}$ pode se escolher $x_n \in X$. Como $b = SupX$:

$$b - \frac{1}{n} < x_n \leq b, \text{ somando}(-b)$$

$$b - \frac{1}{n} - b < x_n - b \leq b - b \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{n} < x_n - b \leq 0,$$

$$-\frac{1}{n} < x_n - b \leq 0 < \frac{1}{n}$$

Logo existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para b. Portanto b é ponto aderente de X.

Desta forma, vimos que se $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo e ínfimo então eles são pontos aderentes a X.

Definição 3.4. Chama-se fecho de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X.

Assim podemos definir um conjunto fechado.

Definição 3.5. Um conjunto X diz-se fechado quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X, ou seja, $\overline{X} \subset X$.

A partir desses conceitos, veremos alguns teoremas e corolários que envolvem conjuntos abertos e fechados, importantes para uma melhor compreensão.

Antes veja que, em topologia, um subconjunto V de um espaço topológico X diz-se uma vizinhança do ponto $x \in X$ se existir um aberto A tal que $x \in A \subset V$. Com outras palavras V é uma vizinhança de x se x estiver no interior de V.

Teorema 3.2. *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Considere a ponto aderente a X. Veja que, se a é ponto aderente a X então $a = \lim x_n$, tal que $x_n \in X$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Dada uma vizinhança qualquer $V \ni a$, como $a = lim x_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, donde tem-se $|x_n - a| < \varepsilon$ se, e somente se, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$.

($\Longleftarrow$) Se toda vizinhança de a contém pontos de X podemos escolher cada intervalo $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$ como vizinhança de a. Ou seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$, o que implica:

$$a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}.$$

Somando $(-a)$ temos: $-\dfrac{1}{n} < x_n - a < \dfrac{1}{n} \Longleftrightarrow |x_n - a| < \dfrac{1}{n} \Longrightarrow 0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, pelo teorema do confronto, então podemos dizer $\lim |x_n - a| = 0$

□

Teorema 3.3. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja F fechado e $a \in A$, isto é $a \notin F$. Como a não é ponto aderente de F (pois $a \notin F$ e F é fechado), temos pelo teorema 3.2 que existe alguma vizinhança $V \ni a$ e não contém ponto F, isto é $V(a) \subset A$.

($\Longleftarrow$) Se o conjunto A é aberto e a é aderente a $F = \mathbb{R} - A$ (ou seja $a \in F$). Então toda toda vizinhança de a contém pontos de F (pelo teorema 3.2). Logo a não é ponto interior de A, pois toda $V(a) \not\subset A$. Se A é aberto por hipótese então $a \notin A$ (pois a não é ponto interior de A), o que implica $a \in F$. □

Para finalizarmos as nossas ideias a respeito de conjunto fechado, veremos mais um teorema que trabalha álgebra entre fechados.

Teorema 3.4. *a) Se F_1 e F_2 são fechados então $F_1 \cup F_2$ é fechado.*

b) Se $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família qualquer de conjunto fechados então a interseção $F = \bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração:

a) Os conjuntos $A_1 = \mathbb{R} - F_1$ e $A_2 = \mathbb{R} - F_2$ são abertos pelo Teorema 3.3, já que F_1 e F_2 são fechados. Logo pelo Teorema 3.1 $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2)$ é aberto. Novamente pelo teorema 3.3 $F_1 \cup F_2$ é fechado.

b) Para cada $\lambda \in L$, $A_\lambda = \mathbb{R} - F_\lambda$ é aberto pelo Teorema 3.3. Segue-se que $A = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ é aberto pelo teorema 3.1. Mas $A = \mathbb{R} - F$ como A é o complementar de F, logo F é fechado.

3.3 Ponto de Acumulação

Definição 3.6. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a.

De outra forma podemos dizer que: para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$. Para indicarmos o conjunto dos pontos de acumulação de X, usamos a notação X'.

Quando $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, dizemos que a é ponto isolado de X. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ talque $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) = \varnothing$

Analisaremos agora dois Teoremas muito importantes a respeito de pontos de acumulação, que o caracterizam com ideia de limite e infinidade de pontos.

Teorema 3.5. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) *a é um ponto de acumulação de X;*

2) *a é o limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;*

3) *Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Demonstração. **1)$\Longrightarrow$ 2):** Dado $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Supondo que a é ponto de acumulaçao de X temos que toda vizinhança de a contém pontos X.

Tomando a vizinhança $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) = V_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ sempre encontraremos pontos de X nessa vizinhança. Pois em particular:

$$x_1 \in V_1 \setminus \{a\}$$

$$x_2 \in V_2 \setminus \{a\}$$

$$\vdots$$

$$x_n \in V_n \setminus \{a\}$$

$$\vdots$$

e portanto $(x_n) \subset (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$, logo

$$a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n} \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{n} < x_n - a < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow$$

$$0 \leq |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

pelo Teorema do confronto temos $x_n \to a$.

Portanto a é limite de uma sequência $x_n \in X \setminus \{a\}$.

2)$\Longrightarrow$3): Supondo que a seja limite de uma sequência $x_n \in X \setminus \{a\}$, então para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n; n > n_0\}$ é infinito, porque do contrário existiria um termo x_{n1} que se repetiria infinitas vezes, isto é:

$$n = 1 \Rightarrow x_{11}$$

$$n = 2 \Rightarrow x_{12}$$

$$\vdots$$

$$n = n \Rightarrow x_{n1}$$

Daí, obtém-se uma sequência constante com lim $x_{n1} \neq a$, pois $\lim a_n = C$ se a_n é sequência constante.

Portanto dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}:\ n > n_0$ e $|x_n - a| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Assim, todo intervalo aberto de centro a contém infinitos pontos de X.

3)⇒1): Seja o intervalo aberto de centro a e raio ε que contém infinitos pontos de X, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Pela definição a é ponto de acumulação de X, já que toda a sua vizinhança contém pontos de X diferentes de a. □

Teorema 3.6. *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja A um conjunto de números reais infinito e limitado.

Considere uma função

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ & n & \longmapsto & a(n) = a_n, \end{array}$$

com $a_n \neq a_m$, isto é, a é injetiva.

Assim desde que A é limitado, segue-se que a sequência $(a_n) \subset A$ é limitada. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass 2.6 existe uma $(a_{nj}) \subset (a_n)$ tal que $a_{nj} \to L$. Mostraremos que L é ponto de acumulação de A. Assim $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $|a_{nj} - L| < \varepsilon, \forall j \geq j_0$, isto é, $a_{nj} \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, $\forall\ j \geq j_0$. Da injetividade da função a existe $a_{nj} \neq L$ com $a_{nj} \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ mostrando que L é ponto de acumulação de A. □

3.4 Conjuntos Compactos

Definição 3.7. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se compacto quando é limitado e fechado.

Veja as seguintes afirmações:

1) Todo conjunto finito é compacto.

Demonstração. Seja X finito, com n elementos, por exemplo; e $a \notin X$ tal que a é ponto aderente a X. Dado $\varepsilon_1 > 0$, então para $n = 1$ temos: $x_1 \in (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \cap X \neq \varnothing$. Dado $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ temos:

$$x_2 \in (a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \cap X \neq \varnothing.$$

Fazendo esse processo n vezes: tomando $\varepsilon_n > 0$, com $\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1} < \cdots < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, temos

$$x_n \in (a - \varepsilon_n, a + \varepsilon_n) \cap X \neq \varnothing.$$

Se tomarmos agora ε_{n+1} com $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ para $(a - \varepsilon_{n+1}, a + \varepsilon_{n+1})$, veja que não existe ponto de X no intervalo, pois X é finito com só n elementos. Logo todos os pontos de X são pontos aderentes a X. □

2) Um intervalo do tipo $[a, b]$ é um conjunto compacto.

3) $\mathbb{Z}$ não é compacto pois é ilimitado.

Não temos como trabalhar conjuntos compactos sem falarmos de alguns teoremas importantes dentro deste assunto. Por isso vejamos:

Teorema 3.7. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha $X \subset \mathbb{R}$ compacto e $(x_n) \subset X$ uma sequência. Como X é limitado $(x_n) \subset X$ é limitada, logo pelo teorema de Bolzano-Weierstrass 2.6 existe uma $x_{nj} \in (X)$ que converge para a.

Então X sendo compacto temos $X = \overline{X}$ e sendo assim, $a = \lim x_{nj}$ tal que $a \in X$.

($\Longleftarrow$) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $\forall (x_n) \subset X$ possui uma subsequência que converge para um ponto de X.

Devemos mostrar que X é compacto. Para isso, se supormos X não compacto, então.

1º) X não é limitado.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que $\forall (x_n) \subset X$ possui uma subsequência (x_{nj}) que converge para $\bar{a}$ de forma que $a \in X$.

Se X é não limitado, então para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar uma sequência (x_n) de forma que $|x_n| > n$.

Assim se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ilimitada então (x_n) é divergente e consequentemente toda subsequência x_{n_j} é divergente, pois $|x_{n_j}| > n_j$.

2º) X não fechado.

Se X é não fechado, existe $a \notin X$ com $a = \lim x_n$, onde cada $x_n \in X$.

A sequência (x_n) então não possuiria subsequência alguma convergindo para um ponto de X, pois o teorema 2.2 do capítulo 2 de sequência diz que: toda subsequência de (x_n) converge para a. Mas isso contradiz a hipótese de que toda subsequência converge para um ponto de X, pois $a \notin X$.

Portanto concluimos que X é fechado. Sendo X limitado por **1º)** e fechado por **2º)**, podemos concluir que X é compacto. □

Teorema 3.8. *Dado uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \ldots$ de conjuntos compactos não-vazios, existe (pelo menos) um número real que pertence a todos os X_n.*

Demonstração. Definamos uma sequência (x_n) escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X_n$, ou seja,

$$x_1 \in X_1$$

$$x_2 \in X_2$$

$$\vdots$$

$$x_n \in X_n$$

Veja que x_n está no compacto X_1 , pois $X_1 \supset \ldots X_n$. Logo x_n possui uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ convergindo para um ponto $a \in X_1$, já que X_1 é compacto.

Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $x_{n_k} \in X_n$ sempre que $n_k > n$. Como X_n é compacto, segue-se que $a \in X_n$. □

Capítulo 4

Conjunto de Cantor

Neste capítulo será feito uma aplicação de tudo o que foi estudado ao longo deste trabalho. Esta aplicação será realizada em cima do conjunto de Cantor.

O conjunto de Cantor K é um subconjunto fechado do intervalo $[0,1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo.

Por LIMA (2016), "retira-se do intervalo $[0,1]$ seu terço médio aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Sobra então $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quartro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor".

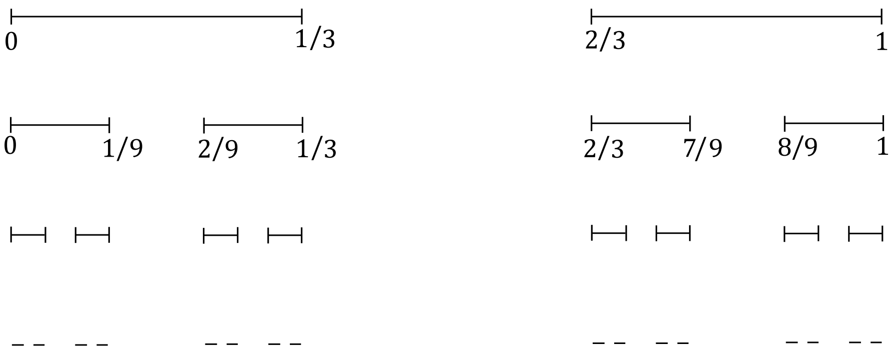

Figura 4.1: Construção do conjunto de Cantor

O conjunto K definido acima, apresenta algumas propriedades que serão agora exibidas e provadas, com o propósito de aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo dessa pesquisa.

1) O conjunto de Cantor é compacto.

Demonstração. Se indicarmos com $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos omitidos, veremos que $\mathrm{F} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ é um conjunto fechado, pois seu complementar é aberto. E $K = [0,1] \cap \mathrm{F}$ é fechado pelo item (b) do Teorema 3.4. É também limitado pois $[0,1] \supset K$.

Portanto K é limitado e fechado então K é compacto. $\square$

2) O conjunto de Cantor não tem intervalos.

Demonstração. Para mostrar que K tem interior vazio, observamos que depois da n-ésima etapa de sua construção restam apenas intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$, ou seja,

$$\frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |J_n| = \frac{1}{3^n},$$

de fato, vejamos por indução

$n = 1$, $\frac{1}{3} = |J_1|$.

Supondo que $n = k$; $|J_k| = \frac{1}{3^k}$ é verdade, vamos provar que se $n = k + 1$ então $|J_{k+1}| = \frac{1}{3^{k+1}}$.

Veja $|J_{k+1}| = |J_k J_1| = \frac{1}{3^k}\frac{1}{3} = \frac{1}{3^{k+1}}$

Portanto, dado qualquer intervalo $J \subset K \subset [0, 1]$ tal que $|J| = c > 0$. Em qualquer etapa da construção do conjunto de K, $|J_n| = \frac{1}{3^n} < c$, pois por exemplo, numa n-ésima etapa temos:

$$\lim \frac{1}{3^n} = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon = c > 0, \text{existe } n_0 \in \mathbb{N}\text{tal que } n > n_0 \Longrightarrow \frac{1}{3^n} < c.$$

Se $J \subset K$, com $|J| = c$, obtemos $|J_n| = \frac{1}{3^n} < c \Longrightarrow J_n \subset J$.

Na $n + 1$ etapa, teremos pontos $x_n \in J_n$ e que não estarão em K, por isso $J \not\subset K$, pois $x_n \in J_n \Longrightarrow x_n \in J$, mas $x_n \notin K$. Logo não pode existir intervalo $J \subset K$. $\square$

3) O conjunto de Cantor tem interior vazio

Demonstração. Visto que K não contém intervalos pelo item (2), então podemos afirmar que K tem interior vazio, uma vez que não existem pontos $a \in K$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ esteja contido em K. Ou seja, k não possui pontos interiores. $\square$

4) O conjunto de Cantor não contém pontos isolados.

Demonstração. Os pontos extremos dos intervalos omitidos nas diversas etapas da construção do conjunto de Cantor, tais como: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}$ etc, pertencem a K, pois em cada etapa são retirados apenas os pontos interiores aos intervalos que restaram na etapa anterior. Eles constituem um conjunto E sem pontos isolados.

Com efeito, seja $c \in k$ extremidade de alguma intervalo, digamos (c, b), omitido de $[0, 1]$ para formar K. Quando (c, b) foi retirado, restou um certo intervalo $[a, c]$.

Na etapa seguinte da construção de K, restarão sempre terços finais de intervalo do tipo $[a_n, c]$, com $a_n \in$ E. O comprimento $c - a_n$ tende a zero, logo $a_n \longrightarrow c$ (ou seja,

$c = \lim x_n \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |x_n - c| < \varepsilon$ e que portanto $c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon)$, logo c não é ponto isolado de E, pois c não é o único ponto de $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap$ E. Portanto as extremidades não são pontos isolados.

A partir de agora suponhamos que $c \in K$ e que c não seja extremo de intervalos retirados de $[0, 1]$ durante a construção de K (Veja que até agora não sabemos se de fato tais pontos existem)

Provaremos que c não é ponto isolado de K.

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo teorema de intervalos encaixados c pertence ao interior de um intervalo $[x_n, y_n]$ que restou depois da n-ésima etapa da construção de K.

Temos que $x_n < c < y_n$ de forma que $x_n, y_n \in K$ e $y_n - x_n = \dfrac{1}{3^n} \Longrightarrow y_n = \dfrac{1}{3^n} + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Calculando o limite

$$\lim y_n = \lim \left(\frac{1}{3^n} + x_n \right).$$

Veja que, $\lim y_n = \lim x_n$. Pelo teorema do confronto, temos que:

$$c = \lim y_n = \lim x_n.$$

Portanto, c é ponto de acumulação de K. Ou seja, c não é ponto isolado. $\square$

Considerações Finais

Durante o planejamento deste trabalho foi-se pensado em utilizar o conjunto de Cantor como uma aplicação dos estudos de Noções Topológicas, com o objetivo de compreender as características deste fantástico conjunto. Na pesquisa bibliográfica feita através de autores importantes para o estudo da análise real pode-se concluir com sucesso o entendimento e a importância em adquirir o conhecimento de noções topológicas e as ideias que com ela se relacionam.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Edgar Blucher, 1998.

[2] FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

[3] LIMA, E. L. **Análise real**: vol. 1. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[4] LIMA, E. L. **Análise Real**: Funções de Uma Variável. vol. 1, 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[5] NEVES, W. A. **Uma Introdução à Análise Real**. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2004.

Apêndice A

Álgebra dos conjuntos

Proposição A.1. Se X e Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$ valem as seguintes propriedades:

(i) $(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$

(ii) $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$

Prova de **i)** Seja $x \in (X \cup Y)^C \Rightarrow x \notin (X \cup Y)$
$\Rightarrow x \notin X$ e $x \notin Y$
$\Rightarrow x \in X^C$ e $x \in Y^C$
$\Rightarrow x \in (X^C \cap Y^C)$

Portanto $(X \cup Y)^C \subset X^C \cap Y^C$

Agora veja que, se tomarmos $x \in (X^C \cap Y^C) \Rightarrow x \notin (X^C \cap Y^C)^C$
$\Rightarrow x \notin (X^C)^C \cup (Y^C)^C$
$\Rightarrow x \notin (X \cup Y)$
$\Rightarrow x \in (X \cup Y)^C$

Portanto $(X^C \cap Y^C) \subset (X \cap Y)^C$

E daí provamos **i)**

ii) é análogo!