



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

ELIAQUIM NABIN SAMPAIO MATIAS

# **MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO MANEJO DE RECURSOS RENOVÁVEIS**

MACAPÁ

2019



ELIAQUIM NABIN SAMPAIO MATIAS

# MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO MANEJO DE RECURSOS RENOVÁVEIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática - Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para a obtenção do título de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientadora: **Dr<sup>a</sup>. Simone de Almeida Delphim Leal**

MACAPÁ

2019

*“Louvai ao SENHOR, porque ele é bom;  
porque a sua benignidade dura para sempre”.  
(Salmos 136:1).”*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá  
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB2/1569

2019 Matias, Eliaquim Nabin Sampaio.

Modelagem matemática aplicada ao manejo de recursos renováveis; Orientadora, Simone de Almeida Delphim Leal. – Macapá, 2019.  
66 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Crescimento populacional. 2. Modelos matemáticos. 3. Recursos renováveis. I. Leal, Simone de Almeida Delphim, Orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

510.7 M433m

CDD. 22 ed

# MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO MANEJO DE RECURSOS RENOVÁVEIS

por

**Eliaquim Nabin sampaio Matias**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Colegiado de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

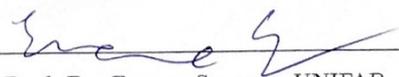
**Área de Concentração: Matemática Aplicada.**

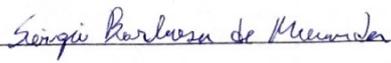
**Aprovada em 29 de Novembro de 2019.**

**Banca Examinadora:**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr<sup>a</sup>. Simone De Almeida Delphim Leal – UNIFAP  
(Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Msc. Neylan Leal Dias – UNIFAP  
(Coorientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Erasmo Senger – UNIFAP  
(Examinador 1)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Msc. Sérgio Barbosa de Miranda – UNIFAP  
(Examinador 2)

*Dedico esse trabalho primeiramente à Deus, aos meus pais Elias Matias e Maria Sampaio e por fim aos meus amigos.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me concedido mais essa conquista e por sempre me dar renovo e força para permanecer firme nesse caminho tão difícil.

Aos meus pais Elias Matias Antunes e Maria Valdenise Sampaio Matias e a minha irmã Eliadima Matias que nunca me deixaram desistir do curso e sempre lutaram para me dar o melhor enquanto cursava a graduação.

Aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado, em especial a minha amiga Michele Alessandra Silva da Silva, a qual foi a pessoa que mais me ajudou no curso e foi minha dupla de trabalho durante quatro anos. Aos meus amigos Ana Karolina, Daniel Reis, Matheus Lustosa que me ajudaram muito neste último semestre. Aos meus amigos e amigas Adrielle Marques, Amanda Thais, André Carvalho, Antony Gabriel, Aynan Del Tetto, Daiana Learte, Edson Parafita, Fernanda Guedes, Gabriela Moraes, Ianca Lima, Isabela Prata, Jardel Sousa, Katiana, Lucas Lima, Lucio Gabriel, Mateus Carvalho, Maria Odenice, Maria Rodrigues, Nazaré Farias, Natany dos Santos, Ney Santos, Nilza Edimaria, Priscila dos Santos, Rafael Rodrigues, Rodrigo Souza, Ruane Barbosa, Tainá Picanço, Thainara Borges, Vanessa Silva, Vanuzia, Vivian Ramos por tudo que fizeram por mim até aqui.

Aos excelente corpo docente que o colegiado de matemática possui. Agradeço especialmente ao professor Italo Duarte e ao professor Welber Aires por sempre me aconselharem a nunca desistir do caminho que devo andar.

Ao meu coorientador Neylan Dias que muito me ajudou nessa última caminhada que é o TCC sempre me aconselhando e incentivando. Agradeço em especial a minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Simone Leal que foi uma segunda mãe durante esses 4anos, que sempre acreditou em meu potencial mesmo quando eu mesmo não acreditava, por isso serei eternamente grato a ela.

Por fim agradeço a todos que fiz amizade até o presente momento, pelos momentos compartilhados. Só tenho a dizer que foram os melhores anos da minha vida.

# Resumo

Este trabalho mostra os principais modelos que analisam a dinâmica de recursos naturais renováveis como os peixes. A ciência das pescas requer dados muitas vezes complexos de obter sobre a biologia das espécies e tecnologias usadas. Esses modelos buscam uma captura ótima para a extração desse tipo de recurso. Aqui será realizado um estudo qualitativo e analítico dos modelos matemáticos simples de exploração de recursos renováveis tais como o Modelo de Malthus, Modelo de Verhulst, Modelo Logístico de Shaeffer e Modelo de Gordon-Shaeffer com o objetivo de investigar o crescimento populacional de uma determinada população, pois são modelos que podem ser descritos por equações diferenciais autônomas, já que descrevem a variação de populações. O presente foi realizado a partir de uma pesquisa bibliográfica, para que fosse feita uma modelagem matemática de problemas que envolvam crescimento populacional de peixes. Entretanto, visando um melhor entendimento dos modelos populacionais, foi necessário antes de mais nada um estudo breve e introdutório de conceitos já conhecidos de equações diferenciais quanto a classificação, e alguns teoremas e resultados importantes sobre a existência e unicidade de soluções.

**Palavras-chave:** Crescimento populacional, Modelos matemáticos, Recursos renováveis.

# Abstract

This paper shows the main models that analyze the dynamics of renewable natural resources such as fish. Fisheries science requires often complex data to obtain about the biology of species and technologies used. These models seek an optimal capture for the extraction of this type of resource. A qualitative and analytical study of simple mathematical models of renewable resource exploration such as the Malthus Model, Verhulst Model, Shaeffer Logistic Model and Gordon-Shaeffer Model will be conducted to investigate the population growth of a given population, because they are models that can be described by autonomous differential equations, since they describe the variation of populations. The present was carried out from a bibliographical research, so that a mathematical modeling of problems involving fish population growth was made. However, in order to better understand population models, it was necessary first of all a brief and introductory study of known concepts of differential equations regarding classification, and some important theorems and results about the existence and uniqueness of solutions.

**Keywords:** Population growth, Mathematical models, Renewable resources.

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Crescimento exponencial: $\frac{dy}{dt} = ay$ . . . . .   | 44 |
| 3.2 | Crescimento Logístico: $\frac{dy}{dt} = a \left(1 - \frac{y}{k}\right) y$ . . . . .                             | 48 |
| 3.3 | $f(y)$ em função de $y$ para $\frac{dy}{dt} = a \left(1 - \frac{y}{k}\right) y$ . . . . .                       | 49 |
| 3.4 | Curva do crescimento de estoque . . . . .   | 51 |
| 3.5 | Varição x Estoque . . . . .   | 52 |
| 3.6 | Campo de Direções . . . . .   | 53 |
| 4.1 | Tabela da Curva logística . . . . .   | 58 |
| 4.2 | Crescimento populacional para a equação $y(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) e^{-at}}$ . . . . . | 59 |
| 4.3 | Crescimento Logístico no Modelo de Schaefer . . . . .   | 61 |
| 4.4 | Crescimento Logístico de Schaefer com a Varição do Estoque com $h = 621,25$ . . . . .                           | 61 |
| 4.5 | Curva do crescimento de estoque . . . . .   | 62 |
| 4.6 | Crescimento Logístico de Gordon-Schaefer . . . . .  | 63 |

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>  | <b>13</b> |
| <b>1 Equações Diferenciais</b>                                   | <b>15</b> |
| 1.1 Classificação das Equações Diferenciais . . . . .            | 15        |
| 1.1.1 Por Tipo . . . . .   | 15        |
| 1.1.2 Por Ordem . . . . .  | 16        |
| 1.1.3 Quanto a sua linearidade . . . . .                         | 17        |
| 1.2 Problema de valor Inicial (PVI) . . . . .                    | 18        |
| 1.3 Existência e unicidade de solução do PVI . . . . .           | 18        |
| <b>2 Métodos Numéricos Para Equações Diferenciais Ordinárias</b> | <b>36</b> |
| 2.1 Método de Euler . . . . .                                    | 36        |
| 2.2 Método de Taylor . . . . .                                   | 37        |
| 2.3 Método de Runge-Kutta . . . . .                              | 38        |
| 2.4 Runge-Kutta 2ª Ordem . . . . .                               | 38        |
| 2.5 Runge-Kutta 4ª Ordem . . . . .                               | 40        |
| <b>3 Modelagem Matemática de Dinâmica Populacional</b>           | <b>42</b> |
| 3.1 Modelo de Malthus . . . . .                                  | 42        |
| 3.2 Modelo de Verhulst . . . . .                                 | 45        |
| 3.3 Modelo de Logístico de Schaefer . . . . .                    | 49        |
| 3.4 Modelo de Gordon-Schaefer . . . . .                          | 51        |
| <b>4 Manejo de Recursos Renováveis</b>                           | <b>54</b> |
| <b>Considerações Finais</b>                                      | <b>64</b> |



# INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o estudo sobre a complexidade de fenômenos, os avanços nas ciências físicas, químicas, biológicas e nas engenharias passaram a ser abordados de forma mais frequente por enfoques matemáticos, por meio da utilização de técnicas matemáticas mais sofisticadas como dinâmico não linear, equações diferenciais autônomas, matemática computacional, entre outros...

Durante o trabalho será feita uma interação entre a matemática e biologia duas ciências que vem cooperando muito entre si nos últimos anos. A Biologia populacional é o estudo de biológicas onde uma população é qualquer grupo de organismos de uma mesma espécie que ocupa um lugar específico. E esse grupo funciona como parte de uma comunidade biótica, pois são indivíduos que podem interagir entre si num mesmo ecossistema.

Populações possuem peculiaridades bem específicas, entre elas temos a taxa de nascimento, taxa de mortalidade, distribuição etárias, densidade, pois assim como um indivíduo ganha massa, uma população que cresce ganha indivíduos. E esse estudo do número de indivíduos se denomina de dinâmica populacional. Para compreender, explicar e prever a dinâmica de populações biológicas utilizamos os modelos matemáticos.

Nos últimos anos surgiram um grande número de modelos populacionais, aplicados a várias áreas como ecologia, física, epidemiologia, imunologia, entre outras. Estes modelos descrevem o crescimento populacional de indivíduos que podem ser vírus, bactérias, moléculas, insetos, animais, infinitos organismos que podem se multiplicar. E isso motivou a escolha do Trabalho sobre a Modelagem Matemática Aplicada ao Controle Biológico, pois muitos modelos populacionais se apresentam na forma de equações diferenciais ordinárias autônomas por descreverem uma variação que depende do tempo.

O trabalho, está dividido em cinco capítulos. No *Capítulo 1* será feita uma breve revisão sobre alguns conceitos de Equações diferenciais quanto a sua classificação pelo tipo, ordem e Linearidade. Nele também é analisado o Problema de valor inicial (PVI) e

---

Existência e unicidade de soluções para o caso linear e não linear no qual são utilizados muitos resultados para a suas demonstrações. No *Capítulo 2* estão os Modelos Numéricos para equações Diferenciais Ordinárias. No *Capítulo 3* temos a Modelagem Matemática de Dinâmica populacional de modelos de exploração de recursos renováveis, tais modelos são baseados em equações diferenciais ordinárias. No *Capítulo 4* temos a explicação de manejo de recursos Renováveis e a utilização do modelo logístico de Verhulst e Gordon-Schaefer em uma aplicação. E por fim, no último *Capítulo* é apresentado as considerações finais e estudos futuros.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais

Segundo Dennis G. Zill, equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia. Nelas modelos matemáticos são desenvolvidos para auxiliar na compreensão de fenômenos físicos. Estes modelos frequentemente geram uma equação que contém algumas derivadas de uma função desconhecida. Tal equação é chamada de equação diferencial. A partir deste conceito, pode-se diferenciar uma equação algébrica que é uma equação em que as incógnitas são números da equação diferencial aonde as incógnitas são funções e cuja a equação envolve derivadas destas funções. Tem-se ainda que numa equação diferencial em que a incógnita é uma função  $y(x)$ ,  $x$  é a variável independente e  $y$  é a variável dependente.

### 1.1 Classificação das Equações Diferenciais

Sempre que um modelo matemático envolve a taxa de mudança de uma variável com relação a outra, uma equação diferencial tende a surgir e são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

#### 1.1.1 Por Tipo

Considerando o tipo, uma equação diferencial pode ser classificada em ordinária ou parcial. É equação diferencial ordinária (EDO) se as suas funções incógnitas  $y = y(x)$  forem funções de somente uma variável independente. É uma equação que pode ser escrita

na forma  $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$  ou  $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ . Por exemplo,

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x$$

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$t^3 \frac{dx}{dt} = t^3 + x$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = x^3$$

Já uma **equação diferencial parcial (EDP)** é uma equação que contém uma ou mais funções desconhecidas de duas ou mais variáveis e as suas derivadas parciais em relação a essas variáveis. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Variáveis independentes } x, y, z)$$

$$a \frac{\partial w}{\partial a} + b \frac{\partial w}{\partial b} = w \quad (\text{Variáveis independentes } a, b)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial y} \quad (\text{Variáveis independentes } x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial z} = s - 2z \quad (\text{Variáveis independentes } s, z)$$

### 1.1.2 Por Ordem

Quanto a ordem, uma equação diferencial pode ser de primeira, de segunda, ..., de  $n$ -ésima ordem dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  é uma equação que pode ser escrita ou representada na forma,  $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ . Por exemplo,

$$y' + x = e^x \quad \text{é uma equação diferencial de primeira ordem;}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - 3 \frac{ds}{dt} + 2s = t^2 \quad \text{é uma equação diferencial de segunda ordem;}$$

$\frac{d^4x}{dt^4} = xt$  é uma equação diferencial de quarta ordem;

$y^{(9)} - xy'' = x^2$  é uma equação diferencial de nona ordem;

### 1.1.3 Quanto a sua linearidade

Uma **equação diferencial linear** é aquela em que a variável dependente  $y$  e suas derivadas aparecem em combinações aditivas de suas primeiras potências.

Uma equação diferencial é dita linear se ela tiver o formato:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x) \quad (1.1)$$

As equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- (i) A variável  $y$  e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto significa que a potência de cada termo envolvendo  $y$  é 1.
- (ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente  $x$ .

**Exemplo 1.1.** A equação diferencial ordinária de primeira ordem  $\frac{dy}{dt} - 5y = 1$  é um exemplo de uma equação diferencial ordinária linear.

**Exemplo 1.2.** A equação diferencial ordinária de segunda  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = x^3$  é um exemplo de equação linear.

Uma equação diferencial ordinária é chamada de **não-linear**, se:

- (i) A variável dependente  $y$  e pelo menos uma de suas derivadas tem grau maior que 1, isto é, a potência de pelo menos um termo envolvendo  $y$  é maior que 1.
- (ii) Pelo menos um de seus coeficientes não depende da variável independente  $x$ .

**Exemplo 1.3.** A equação diferencial ordinária  $\frac{d^3y}{dt^3} + 2e^t + y \frac{dy}{dt} = 0$  é uma equação diferencial não-linear porque envolve o produto de  $y$  por  $\frac{dy}{dt}$ .

**Exemplo 1.4.** A equação diferencial ordinária  $\frac{d^3y}{dx^3} + y^2$  é dita não-linear porque a potência de  $y \neq 1$ .

**Exemplo 1.5.** A equação de Verhulst ou como é usualmente conhecida equação logística  $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$ ; que será o objeto de estudo deste trabalho, também é um exemplo de equação diferencial não-linear.

**Exemplo 1.6.** A equação diferencial  $\frac{d^2y}{dx^2} + y^3 = 0$  é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear por causa do termo  $y^3$ .

As soluções de equações diferenciais é uma função que não contém derivadas nem diferenciais e que satisfaz a equação dada (ou seja, a função que, substituída na equação dada, a transforma em uma identidade).

## 1.2 Problema de valor Inicial (PVI)

Em uma equação diferencial há um conjunto de soluções. E para se obter apenas uma solução é necessário ser imposto algumas condições. O número de condições deve coincidir com a ordem da EDO, isto significa, que se tivermos uma Edo de quarta ordem, será necessário que se tenha quatro condições com o intuito de se obter apenas uma única solução. Dada uma equação e suas condições e se essas condições referem-se a um único ponto, teremos um problema de valor inicial.

Para a melhor compreensão dos métodos analíticos, é necessário que se tenha em mente alguns resultados. Então será feita um breve revisão para um melhor entendimento da teoria matemática sobre a existência e unicidade de soluções.

## 1.3 Existência e unicidade de solução do PVI

### Caso Linear

Dada uma equação diferencial linear  $y' + p(x)y = g(x)$  a sua solução existe e é única em qualquer intervalo em torno do ponto de  $x = x_0$  na qual as funções  $p$  e  $g$  sejam contínuas.

**Definição 1.1.** Seja  $f$  uma função definida em um intervalo  $I$  e  $x_0$  um elemento de  $I$ . Chama-se de derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  o limite,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

se este existir e for finito (Iezzi, Murakami, e Machado, 1993). Assim a derivada de uma função e a aproximação se da através da reta tangente no ponto  $x_0$

**Teorema 1.1.** *Se as funções  $p$  e  $q$  são contínuas em um intervalo aberto  $I : \alpha < t < \beta$  contendo um ponto  $t = t_0$ , então existe uma única função  $y = \phi(t)$  que satisfaz a equação diferencial,*

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{1.2}$$

para cada  $x$  em  $I$  e que satisfaz à condição inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.3}$$

onde  $y_0$  é um valor inicial arbitrário.

*Demonstração.* Para demonstrar este teorema, deve-se primeiro demonstrar as seguintes equações:

$$y = \frac{\int \mu(x) g(x) dx + c}{\mu(x)} \tag{1.4}$$

onde,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{1.5}$$

Considere a equação diferencial linear (1.2) em forma integrável.

Para tal, a equação (1.2) será multiplicada em ambos os lados por uma função  $\mu(x)$ , ainda desconhecida. Então Temos,

$$\mu(x) y' + \mu(x) p(x) y = \mu(x) g(x) \tag{1.6}$$

Com isso fica claro o que desejamos, queremos que o lado esquerdo da equação (1.6) seja a derivada de alguma função. O fato de existir dois termos e um desses termos ser  $\mu(x) y'$  nos evidencia que o lado esquerdo da equação (1.6) fica a cara da derivada do produto de  $\mu(x) y$ . Porém, par que isto seja de fato verdade, o seu segundo termo do lado esquerdo da equação (1.6)  $\mu(x) p(x) y$ , deve ser igual a  $\mu'(x) y$ .

$$\mu'(x) y = \mu(x) p(x) y \tag{1.7}$$

Isto significa que  $\mu(x)$  deve satisfazer à equação diferencial

$$\mu'(x) = \mu(x)p(x) \quad (1.8)$$

admitindo que  $\mu(x)$  seja positiva, podemos rescrever a equação (1.8) como

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x) \quad (1.9)$$

Ou no formato já conhecido como,

$$\frac{d}{dx} \ln \mu(x) = p(x) \quad (1.10)$$

então integrando em ambos os lados da equação (1.10), temos

$$\ln \mu(x) = \int p(x) dx + k \quad (1.11)$$

considerando  $k = 0$ , e aplicando a função exponencial teremos,

$$\ln \mu(x) = \int p(x) dx \quad (1.12)$$

assim encontramos o fator integrante  $\mu(x)$ . Visto que  $p$  é contínua para  $\alpha < x < \beta$ , segue-se  $\mu$  está definida nesse intervalo, e é uma função derivável não nula.

Multiplicando a equação (1.2) por  $\mu(x)$  obteremos

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x) \quad (1.13)$$

como  $\mu$  e  $g$  são funções contínuas, o produto dessas funções  $\mu g$  é integrável, logo temos

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)dx + c_1 \quad (1.14)$$

dividindo toda a equação acima por  $\mu(x)$ , teremos

$$y = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + c}{\mu(x)} \quad (1.15)$$

Além disso, a integral de  $\mu g$  é diferenciável, de maneira que  $y$ , dado pela equação

(1.15) existe e é diferencial no intervalo  $\alpha < x < \beta$ .

Fazendo a substituição de  $y$  dado pela equação (1.15) na equação (1.2), conseguimos verificar que a expressão satisfaz à equação diferencial no intervalo  $\alpha < x < \beta$ .

Enfim, a condição inicial (1.3) estabelece a constante  $c$  univocamente, de forma que somente exista uma única solução para o PVI, o que conclui a nossa demonstração.  $\square$

### Caso Não Linear

Para que a demonstração de existência e unicidade do problema de valor inicial no caso não linear seja feita, faz-se necessário, antes de mais nada, que se tenha em mente alguns resultados e teoremas importantes.

**Corolário 1.1** (Weierstrass): Toda função contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida num compacto  $X$  é limitada e atinge seus extremos (isto é, existem  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  para todo  $x \in X$ ).

*Demonstração.* Com efeito,  $f(X)$ , sendo compacto, é limitado e fechado. Logo  $\sup f(X) \in f(X)$  e  $\inf f(X) \in f(X)$ . Portanto  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $\inf f(X) = f(x_1)$  e  $\sup f(X) = f(x_2)$   $\square$

**Teorema 1.2** (Rolle). *Se  $f$  é uma função contínua num intervalo  $[a, b]$ , derivável nos pontos internos, com  $f(a) = f(b)$ , então sua derivada se anula em algum ponto interno, isto é,  $f'(c) = 0$  para algum  $c \in (a, b)$ .*

*Demonstração.* Se  $f$  é constante em  $[a, b]$  então  $f'(c) = 0$  para todo  $c \in (a, b)$ . Caso contrário,  $f$  atingirá seu mínimo  $m$  ou seu máximo  $M$  num ponto interior  $c \in (a, b)$ , pois se ambos fossem atingidos nas extremidades, teríamos  $m = M$  e  $f$  seria constante.

Como  $a \in X \cap X'$  e  $f$  é derivável em  $a$ , então  $f'(c) = 0$ .

Daí, pela continuidade de  $f$  no compacto  $[a, b]$ , o corolário de Weierstrass nos garante que  $f$  atinge seus extremos.  $\square$

**Teorema 1.3** (Teorema do valor Médio - TVM). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Então existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ou} \quad f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

## 1. Equações Diferenciais

---

*Demonstração.* Considere a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  onde,

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Como  $f(x)$  e  $(x - a)$  são contínuas em  $[a, b]$  e deriváveis em  $(a, b)$ , e além disso,

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \quad \implies \quad g(a) = 0$$

e para  $x = b$  teremos,

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) =$$

$$f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0 \quad \implies \quad g(b) = 0$$

Logo  $g(b) = 0 = g(a)$ . Como  $g(x)$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , podemos então aplicar o teorema de Rolle em  $g(x)$  : existe  $x_0 \in (a, b)$

Como,

$$g'(x_0) = \left( f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)'$$

$$f'(x) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$

$$\therefore g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Portanto,  $g'(x_0) = 0$ . Logo,  $f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ .

$$\therefore f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

**Teorema 1.4** (Teorema Fundamental do Cálculo - T.F.C ). (*Parte 01*)

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

## 1. Equações Diferenciais

---

$x \in [a, b]$  é derivável e é uma primitiva de  $f$

$$F'(x) = f(x).$$

*Demonstração.* Seja  $x \in [a, b]$  e  $h \in \mathbb{R}$  tal que  $(x + h) \in [a, b]$ . Então

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Como  $f$  é contínua em  $[x, x + h]$  se  $h > 0$  (ou  $[x + h, x]$  se  $h < 0$ ) podemos aplicar o T.V.M para integrais: existe  $C(h) \in [x, x + h]$ , tal que

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}, \quad \text{quando } h \rightarrow 0 \quad e \quad C(h) \rightarrow x.$$

Logo o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(C_h) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Pela definição de diferenciabilidade.

Portanto  $F(x)$  é derivável em  $[a, b]$ , e ainda  $F'(x) = f(x)$ , ou seja,  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ .

Como vimos que  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , se  $G(x)$  é outra primitiva de  $f(x)$ , então:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \implies F'(x) = f(x)$$
$$G'(x) = f(x),$$

e portanto,

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Provou-se, como consequência do T.V.M (derivada):

$$(G - F)(x) \implies G(x) = F(x) + C$$

$$\therefore G(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Portanto  $G$  e  $F$  diferem por uma constante  $c \in \mathbb{R}$ . □

**Corolário 1.2:** Se  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são primitivas de uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  então  $F(x) - G(x) = C$ , com  $C \in \mathbb{R}$  constantes arbitrárias.

Agora temos o resultado clássico de T.F.C.

**Teorema 1.5** (Teorema Fundamental do Cálculo - T.F.C ). *(Parte 02)*

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva de  $f(x)$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

*Demonstração.* Como  $f(x)$  é contínua em  $[a, b]$ , então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitiva de  $f(x)$  pelo teorema 1.

Considerando  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma (outra) primitiva de  $f(x)$ , pelo corolário visto, então:

$$F(x) - G(x) = C, \text{ para } C \in \mathbb{R} \text{ arbitrário.}$$

Então, para  $x = a$ , obtemos:  $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$  (por convenção), e portanto,  $F(a) - G(a) = C \Rightarrow G(a) = -C$ , assim,  $F(x) = G(x) - G(a)$ .

Além disso, para  $x = b$ , obtemos:

$$F(x) = G(x) - G(a), \text{ e portanto, como } F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) - G(a)$$

Como  $G(x) = F(x) - C$ , logo,

$$\begin{cases} G(a) = F(a) - C \\ G(b) = F(b) - C \end{cases}$$

Nos resulta que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - C - (F(a) - C)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Conclusão: Pelo T.F.C.,

$$\int_a^b f(x)dx = \left( \int f(x) \Big|_{x=b} - \int f(x) \Big|_{x=a} \right).$$

□

**Lema 1.1:** Seja a equação  $y' = f(x, y)$  onde  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua no aberto  $\Omega$ . Seja  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Nestas condições,  $y = y(x)$ ,  $x \in I$ , será uma solução satisfazendo a condição inicial  $y(x_0) = y_0$ , com  $x_0$  no intervalo  $I$ , se, e somente se,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$$

para todo  $x \in I$ .

*Demonstração.* Se  $y = y(x)$ ,  $x \in I$ , é solução de  $y' = f(x, y)$ , logo

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

em todo  $x$  em  $I$ .

Considerando que  $y(x_0) = y_0$ , segue que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$$

para todo  $x$  em  $I$ . Reciprocamente, usando a equação descrita acima teremos

$$y(x_0) = y_0$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$y'(x) = f(x, y(x)), x \in I.$$

□

**Lema 1.2:** Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aberto, uma função contínua e tal que  $\frac{df}{dy}$  seja, contínua em  $\Omega$ . Seja  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Sendo  $\Omega$  aberto, existem  $a > 0$  e  $b > 0$  tais que o retângulo

$$Q = \{(x, y) \mid x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

está contido em  $\Omega$ . Nestas condições, existe uma constante  $k > 0$  tal que

$$|f(x, x_1) - f(x, x_2)| \leq k |y_1 - y_2|$$

quaisquer que seja  $(x, y_1)$  e  $(x, y_2)$  no retângulo  $Q$ .

*Demonstração.* Como  $\frac{df}{dy}$  é contínua em  $\Omega$ , segue que  $\frac{df}{dy}$  é contínua em  $Q$ , pois  $Q \subset \Omega$ , e pelo corolário de Weierstrass, existe uma constante  $k > 0$  tal que

$$\left| \frac{df}{dy}(x, y) \right| \leq K$$

para todo  $(x, y)$  em  $Q$ . Considere  $(x, y_1)$  e  $(x, y_2)$  dois pontos quaisquer de  $Q$ . Temos, pelo Teorema do valor Médio (T.V.M)

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{df}{dy}(x, s)(y_1 - x, y_2)$$

para algum  $s$  que fica entre o intervalo  $y_1$  e  $y_2$ . Deste modo, temos,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|.$$

□

**Lema 1.3:** Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aberto contínua e seja  $(x_0, y_0) \in \omega$ . Sejam  $a > 0$  e  $b > 0$  tais que o retângulo

$$Q = \{(x, y) | x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

esteja contido em  $\Omega$ . Seja  $M > 0$  tal que

$$|f(x, y)| \leq M, \text{ em } Q$$

(Tal  $M$  existe, pois  $f$  é contínua em  $Q$ ). Seja  $r > 0$ , tal que

$$r \leq a \wedge Mr \leq b.$$

## 1. Equações Diferenciais

---

Seja  $y_{n-1} = y_{n-1}(x)$ ,  $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$ , contínua e cujo gráfico contido em  $Q$ ; seja

$$y_n = y_n(x), x_0 - r \leq x \leq x_0 + r,$$

dada por

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

Nestas condições, o gráfico de  $y_n = y_n(x)$  também está contido em  $Q$ .

*Demonstração.* Queremos provar que o gráfico de  $y_n$  está contido em  $Q$ , para isto é suficiente mostrar que

$$|y_n(x) - y_0| \leq b$$

para todo  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ .

Temos, para todo  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ ,

$$y_n - y_0 = \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

e portanto,

$$|y_n - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \right|$$

para todo  $s \in [x_0 - r, x_0 + r]$ , temos

$$(s, y_{n-1}(s)) \in Q$$

isso resulta

$$|f(s, y_{n-1}(s))| \leq M$$

para todo  $s \in [x_0 - r, x_0 + r]$ . Logo

$$|y_n - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x M ds \right|$$

para todo  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ . Daí,

$$|y_n - y_0| \leq M|x - x_0|$$

e, portanto

$$|y_n - y_0| \leq Mr \leq b.$$

Além dos resultados apresentados, o Método iterativo de Picard ou também conhecido como o método das aproximações sucessivas permite obter a solução analítica para o problema de valor inicial.

□

### Método Iterativo de Picard

Dado o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.16)$$

Este método consiste na construção de uma sequência de funções  $y_n$  de tal modo que  $y_n \rightarrow y$ .

Para definir o primeiro elemento é muito natural se usar a condição inicial e escrever  $y(x_0) = y_0$ . Isto significa dizer que estamos nos aproximando da solução do PVI por meio de uma função constante que irá satisfazer a condição inicial.

Considerando a equação diferencial (1.16) e integrando-se ambos os membros entre os instantes  $x = x_0$  e  $x = x$ . Obtemos

$$\int_{x_0}^x y' ds = \int_{x_0}^x f(s, y) ds$$

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_{x_0}^x y' ds = y(x) - y_0$$

segue,

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(s, y) ds$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y) ds$$

A primeira aproximação é:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) ds$$

Da mesma maneira se obtém  $y_2$  a partir de  $y_1$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds$$

e geralmente conseguimos obter

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

Logo, é possível gerar uma sequência de funções  $y_n = y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  obtidas por meio do processo iterativo, o qual converge para a solução do PVI. E o interessante desse Método de Interação de Picard é que ele pode ser aplicado em qualquer equação diferencial.

### Existência e Unicidade do PVI (caso não linear)

**Teorema 1.6.** *Suponhamos que as funções  $f(x, y)$  e sua derivada  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em algum retângulo*

$$\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < x < \beta, \delta < y < \gamma\}$$

*contendo o ponto  $(x_0, y_0)$ . Então, em algum intervalo  $x_0 - h < x < x_0 + h$  contido em  $\alpha < x < \beta$  existe uma única solução do problema de valor inicial,*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.17}$$

**Demonstração (Existência):** De acordo com o Método Iterativo de Picard podemos definir a sequência de funções  $y_n(t)$  por

$$y_0(t) = y_0 \quad e \quad y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

## 1. Equações Diferenciais

---

Como  $f(t, y)$  é contínua no retângulo  $\mathbf{R}$ , então existe uma constante  $b > 0$  tal que,

$$|f(t, y)| \leq b, \quad \forall (t, y) \in \mathbf{R}$$

Deste modo, pelo Teorema do Valor Médio concluí-se que:

$$|y_1(t) - y_0| \leq b |t - t_0| \quad \text{para } \alpha < t < \beta.$$

Como a derivada  $\frac{df}{dy}$  é contínua no retângulo  $\mathbf{R}$ , existe uma constante  $a > 0$  tal que,

$$|f(t, y) - f(t, w)| \leq a |y - w| \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, w < \gamma$$

Obs: a variável  $w$  é um ponto que foi obtido por meio de uma aproximação.

Pelo Método Iterativo de Picard temos:

$$\varphi(t)_1 = y_0 + \int_{t_0}^t f[s, \varphi_0(s)] ds$$

considerando  $y(t) = \varphi_1(t)$  teremos:

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f[s, y_0(s)] ds$$

segue

$$|y_1(t)| = \left| y_0 + \int_{t_0}^t f[s, y_0(s)] ds \right|$$

aplicando a desigualdade triangular na equação acima temos

$$|y_1(t)| \leq |y_0| + \left| \int_{t_0}^t f[s, y_0(s)] ds \right|$$

assim

$$|y_1(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t f[s, y_0(s)] ds \right|$$

pelo mesmo argumento podemos concluir que

$$|y_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t f[s, y_1(s)] ds \right|$$

então fazendo a diferença

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t f[s, y_1(s)] ds - \int_{t_0}^t f[s, y_0(s)] ds \right|$$

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))) ds \right|$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio existe uma constante  $a > 0$  tal que

$$\int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \leq a \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0(s)| ds$$

como

$$|y_1(t) - y_0| \leq b |t - t_0|$$

então

$$\begin{aligned} a \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0(s)| ds &\leq a \int_{t_0}^t b |s - t_0| ds = ab \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \\ &= ab \left[ \int_{t_0}^t s ds - \int_{t_0}^t t_0 ds \right] = ab \left[ \frac{s^2}{2} - t_0 s \right]_{t_0}^t \\ &= ab \left[ \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} \right) - (t_0 t - t_0^2) \right] = ab \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} - t_0 t + t_0^2 \right] \\ &= ab \left[ \frac{-t_0^2 + 2t_0^2}{2} + \frac{t^2 + 2t_0 t}{2} \right] \\ &= ab \left[ \frac{-t_0^2 + 2t_0^2 + t^2 - 2t_0 t}{2} \right] = ab \left[ \frac{t_0^2 + t^2 - 2t_0 t}{2} \right] \\ &= ab \frac{|t - t_0|^2}{2} \end{aligned}$$

Dessa mesma maneira pode-se obter que,

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \leq a \int_{t_0}^t |y_2(s) - y_1(s)| ds$$

Então por indução podemos presumir que,

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2}b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

Então

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \leq a \int_{t_0}^t |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds \\ &\leq a^{n-1}b \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = a^{n-1}b \frac{|t - t_0|^n}{n!} \end{aligned}$$

Como estas desigualdades são validas para intervalos maiores como  $\alpha < t < \beta$ , logo também terão validades para um intervalo  $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$  em que  $\alpha'$  e  $\beta'$  são menores, tais que  $\delta < y_n(t) < \gamma$  sempre que  $\alpha' < t < \beta'$ .

Segue da última igualdade dada que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

que é convergente. Assim como temos que

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

então  $y_n(t)$  é convergente. Consideremos então,

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$$

como

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{n+1}^m \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}$$

então passando o limite quando  $m$  tende ao infinito obteremos que

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}.$$

Daí dado um  $\epsilon > 0$ , para um  $n$  suficientemente grande,  $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$ , para

$\alpha' < t < \beta'$ . Assim  $y(t)$  é contínua, pois dado um  $\epsilon > 0$ , para um  $s$  suficientemente próximo de  $t$ , temos que  $|y(t) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}$  e para  $n$  suficientemente

$$|y(t) - y_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad e \quad |y(s) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3},$$

o que implica em

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Além do mais, para  $\alpha' < t < \beta'$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f\left(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(s)\right) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

pois como

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}.$$

temos que,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_n(s) - y(s)| ds \leq ab(t - t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}, \end{aligned}$$

que tende a zero quando  $n$  tende ao infinito. Logo,

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

$$y_0 + \int_{t_0}^t f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)\right) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Derivando em relação a  $t$  esta equação vemos que  $y(t)$  é solução do problema de valor inicial.

### Unicidade :

Vamos supor que  $y(t)$  e  $z(t)$  seja m soluções do problema de valor inicial. Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds$$

Como

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

e

$$z(t) = \int_{t_0}^t z'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds,$$

então

$$\begin{aligned} u'(t) &= |y(s) - z(s)| \leq \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds \\ &= \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \leq a \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(t) \leq au(t)$$

Subtraindo-se  $au(t)$  teremos:

$$u'(t) - au(t) \leq au(t) - au(t)$$

$$u'(t) - au(t) \leq 0$$

multiplicando por  $e^{-at}$

$$(u'(t) - au(t))e^{-at} \leq 0$$

observe que a equação acima equivale a derivada do produto, então

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) \leq 0, \text{ com } u(t_0) = 0$$

Isto implica que  $e^{-at}u(t) = 0$ , pois  $u(t) \geq 0$ . Segue então que  $u(t) = 0$ , para todo  $t$ . Logo,  $y(t) = z(t)$ , para todo  $t$ .

O desenvolvimento das soluções de determinadas equações diferenciais ainda continua como objeto de pesquisa, com problemas atrativos e importantes ainda não resolvidos. Para muitos matemáticos, conhecer seus resultados básicos e aplicações de equações diferenciais ordinárias é de extrema importância para quem pretende prosseguir seus estudos nessa área da Matemática. Como as equações diferenciais parciais não são o enfoque

## 1. Equações Diferenciais

---

deste trabalho, utilizaremos apenas equações diferenciais ordinárias. Os casos que envolvem equações diferenciais parciais fica a cargo do leitor para um estudo posterior em EDPs.

## Capítulo 2

# Métodos Numéricos Para Equações Diferenciais Ordinárias

Apesar de existirem vários métodos para se resolver analiticamente uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), estas não tem necessariamente uma solução, e mesmo que possua nem sempre é possível exibi-la. Existem ainda situações nas quais conseguir uma solução analítica se torna muito complicado. Por esse motivo, os métodos numéricos são uma saída viável para se encontrar uma solução tão aproximada quanto se queira. Neste capítulo serão apresentados alguns métodos numéricos para solução de EDO e para isto, são apresentados alguns resultados e conceitos iniciais.

O método de Euler ou método das tangentes é uma ferramenta numérica que aproxima valores para soluções de equações diferenciais.

### 2.1 Método de Euler

Suponha que queiramos aproximar a solução do problema de valor inicial para equações de primeira ordem consistindo na equação diferencial (1.3).

Vamos supor que as funções  $f$  e  $f_y$  são contínuas em algum retângulo no plano  $ty$  contendo o ponto  $(t_0, y_0)$ . Então, pelo Teorema 1.11 existe uma única solução  $y = \phi(t)$  do problema dado em algum intervalo em torno de  $t_0$ . Se a equação  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  for não linear, então o intervalo de existência da solução pode ser difícil de ser determinado e pode não ter uma relação simples com a função  $f$ . Porém, será suposto, que existe uma única solução do problema de valor inicial (1.3).

O objetivo do método de Euler é obter uma aproximação para a solução do problema de valor inicial abaixo:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

Na realidade, não será obtida uma aproximação no contínuo para a solução  $y(t)$ . Em vez disso, aproximações de  $y$  serão geradas em vários valores, chamados pontos de malha, no intervalo  $[a, b]$ . Uma vez que a solução aproximada seja obtida nos pontos, a solução aproximada em outros pontos no intervalo é encontrada por meio da interpolação.

A primeira derivada fornece uma estimativa direta da inclinação em  $t_i$ :

$$\phi = f(t_i, y_i)$$

Onde  $f(t_i, y_i)$  é a equação diferencial calculada em  $t_i$  e  $y_i$ . Portanto a fórmula abaixo é conhecida como Método de Euler (ou Euler-Cauchy ou ponto-inclinação).

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Um novo valor de  $y$  é previsto usando a inclinação para extrapolar linearmente sobre um tamanho de passo  $h$ .

## 2.2 Método de Taylor

O método de Euler é o método de série de Taylor de ordem 1. Similarmente, no método de série de Taylor de ordem 2 obtemos:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_i, y_i)f_i(t_i, y_i)f(t_i, y_i))$$

Obtemos erro local menores considerando métodos de série de Taylor de ordem maior. Contudo, temos que calcular derivadas parciais de  $f$ , que pode ser dispensado usando uma técnica que leva aos métodos de Runge-Kutta.

## 2.3 Método de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta (RK) alcançam a acurácia de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior. Há muitas variações, mas todas podem ser postas na forma geral:

$$y_{n+1} = y_n + \phi h$$

Onde  $\phi$  é chamada função incremento, a qual pode ser interpretada como representativa da inclinação em um intervalo. A função incremento pode ser escrita na forma geral:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$

## 2.4 Runge-Kutta 2ª Ordem

O método de Runge-Kutta de 2ª Ordem, de modo geral, possui a seguinte forma geral:

$$y_{n+1} = y_n + (ak_1 + bk_2)h \quad (2.1)$$

Onde,

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + ph, y_i + qhf(x_i, y_i)) = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$$

Expandindo  $k_2$  em série de Taylor:

$$k_2 = f(x_i + ph, y_i + qhf(x_i, y_i)) = f(x_i, y_i) + phf_x(x_i, y_i) + qhf(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i) + O(h^2) \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1)

$$y_{i+1} = y_i + h[af(x_i, y_i) + bf(x_i, y_i)] + h^2[bpf_x(x_i, y_i) + bqf(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i)] + O(h^3) \quad (2.3)$$

## 2. Métodos Numéricos Para Equações Diferenciais Ordinárias

---

Expandindo  $y(x)$  em  $x_i$  usando série de Taylor:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y(x_i)) + \frac{h^3}{3!} f''(\xi, y(\xi)) =$$

$$y(x_i) + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3y}{dx^3}(\xi) \quad (2.4)$$

Lembrando que:

$$f'(x_i, y(x_i)) = f_x(x_i, y(x_i)) + f_y(x_i, y(x_i)) f(x_i, y(x_i)) \quad (\text{regra da cadeia})$$

Igualando os termos de mesma potência em  $h$  das equações (2.3) e (2.4), tem-se:

| Potência de $h$ | expansão de $y(x)$ em Taylor                                       | algoritmo de Runge-Kutta                            |
|-----------------|--|---|
| 0               | $y(x_i)$   | $y_i$   |
| 1               | $f(x_i, y(x_i))$   | $(a + b) f(x_i, y(x_i))$                            |
| 2               | $\frac{1}{2} [f_x(x_i, y(x_i)) + f_y(x_i, y(x_i)) f(x_i, y(x_i))]$ | $[bp f_x(x_i, y_i) + bq f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)]$ |

assumindo:  $y_i = y(x_i)$

$$a + b = 1 \Rightarrow a = 1 - b$$

$$bp = \frac{1}{2} \quad e \quad bq = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p = q = \frac{1}{2b}$$

família de métodos de segunda ordem.

Escolhendo  $b = \frac{1}{2} \Rightarrow p = q = 1$  e  $a = \frac{1}{2}$  (Método de Heun)

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1)$$

então:

$$y_i = y_i + h \left( \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right)$$

fazendo  $b = 1 \Rightarrow a = 0$  e  $p = q = \frac{1}{2}$

$$y_{i+1} = y_i + hk_2$$

onde,

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad e \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

isto pode ser interpretado da seguinte forma:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2}\right) \quad \text{onde} \quad y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)$$

Este modelo é chamado de Método de Euler Modificado.

Os valores para  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  e  $q_{11}$  são calculados igualando-se a sua forma geral à expansão em série de Taylor até os termos de 2º grau, podendo ser resolvidas simultaneamente por:

$$a_1 = 1 - a_2$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

Como podemos escolher um número infinito de valores para  $a_2$ , existe um número infinito de métodos RK de segunda ordem. Cada versão fornece exatamente o mesmo resultado se a solução da EDO for quadrática, linear ou constante.

Entretanto, elas fornecem resultados diferentes quando a solução é mais complicada. Logo o método possui diferentes versões, como o Método de Heun sem iteração, Método do ponto médio e o Método de Ralston.

## 2.5 Runge-Kutta 4ª Ordem

O procedimento de Runge-Kutta de quarta ordem consiste em encontrar constantes apropriadas coincidindo com o polinômio de Taylor de grau quatro. A forma seguinte é a usada, de modo geral, e, assim, a chamamos de Método RK de quarta ordem clássico:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Apesar dos métodos de Runge-Kutta corrigirem um problema que é o cálculo de derivadas, eles não são perfeitos. Temos a desvantagem de não existir uma maneira simples de estimarmos o erro, portanto pode ser difícil escolher um  $h$ .

Os fatores 1,2,2,1 definem o peso para os termos  $k_1, k_2, k_3, k_4$  respectivamente. Com este método consegue-se atingir uma precisão bem melhor se comparado ao método de Euler, porém conseqüentemente o método utiliza uma capacidade computacional maior, e sendo assim é mais demorado para chegar ao ponto final. Todavia isso pode ser contornado com o uso de computadores de bom desempenho.

## Capítulo 3

# Modelagem Matemática de Dinâmica Populacional

Quando se fala em populações temos que ter em mente que as mesmas possuem diversas características próprias, mensuráveis. Os modelos populacionais tratam das variações das densidades e tamanhos populacionais.

Cada membro de uma população pode nascer, crescer e morrer, mas somente uma população como um todo possui taxas de natalidade e de crescimento específicas, além de possuir um padrão de dispersão no tempo e no espaço. Uma população muda constantemente com o tempo, logo suas características específicas também mudarão.

Eles objetivam o melhor entendimento da variação da quantidade de indivíduos de uma determinada população e também os fatores que as influenciam. O interesse em se modelar comportamentos populacionais se originou com a necessidade de entender diversos tipos de problemas, como crescimentos de tumores, de tomates, prever epidemias, analisar a disponibilidade dos recursos renováveis do planeta em relação ao crescimento da população humana (MALTHUS, 1798), entre outros.

Os modelos matemáticos que melhor descrevem o crescimento de populações de espécies costumam ser descritos por equações diferenciais autônomas.

### 3.1 Modelo de Malthus

O estudo de dinâmica populacional surgiu em 1798, através do economista Thomas Robert Malthus (BEVILACQUA ET AL., 2003). Ele foi o primeiro estudioso a divulgar

um trabalho nessa área, que se intitulava como "An Essay on the Principle of population as it Affect the Future Improvement of Society" (MALTHUSS, 1798). Seu modelo previa o crescimento da população em progressão geométrica não considerando que vivemos em um sistema ecológico fechado e limitado a restrições de alimentos, água, ar e espaço.

O modelo de Malthus, também é conhecido como modelo exponencial, então segundo (Boyce e Diprima, 2005) seja  $y = \phi(t)$  a população de uma espécie dada no instante  $t$ . A hipótese mais simples sobre a variação da população é que a taxa de variação de  $y$  é proporcional ao valor atual de  $y$ , isto é

$$\frac{dy}{dt} = ay \tag{3.1}$$

O parametro  $y$  representa o número de indivíduos da população e  $a$  é a chamada taxa de crescimento instantânea ou declínio, dependendo se é positiva ou negativa. Essa taxa de crescimento é definida como a diferença entre a taxa de natalidade ( $b$ ) e a taxa de mortalidade ( $d$ ), ou seja,  $a = b - d$ . Vamos supor aqui que  $a > 0$ , de modo que a população está crescendo.

A solução da EDO pode ser obtida usando o método de separação de variáveis que é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = ay \Rightarrow \frac{dy}{y} = a dt$$

integrando ambos os membros da igualdade temos:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int a dt$$

$$\ln |y| = at$$

$$e^{\ln |y|} = e^{at}$$

Como a população é um número positivo a solução é:

$$y(t) = Ce^{at}$$

Se no instante  $t = 0$ , a população tem  $y_0$  indivíduos, então a constante  $C$  pode ser tomada

como  $C = y_0$ , deste modo a solução é:

$$y(t) = y_0 e^{at}$$

Então resolvendo a equação (3.1) sujeita à condição inicial

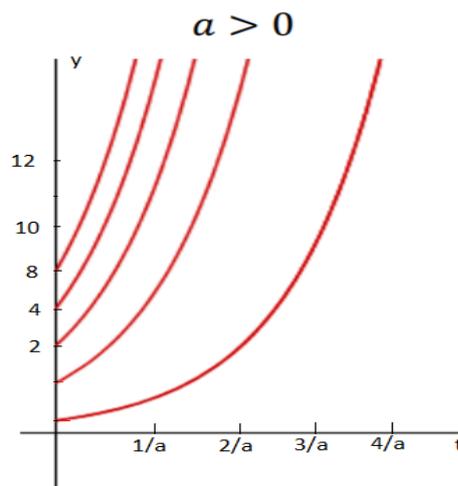
$$y(0) = y_0, \tag{3.2}$$

se obtém,

$$y = y_0 e^{at} \tag{3.3}$$

Logo, o modelo matemático que consiste no problema de valor inicial (3.2), (3.3) com  $a > 0$  diz que a população crescerá exponencialmente sempre, como mostrado na figura 3.1 para diversos valores de  $y_0$ . Sob condições ideais, foi observado que a equação (3.3) é razoavelmente precisa para muitas populações, pelo menos em um curto período de tempo. Porém, é claro que não podem perdurar por muito tempo, pois é sabido que os recursos da natureza são limitados, uma hora as limitações sobre o espaço, suprimento de comida ou outros recursos reduzirá a taxa de crescimento dessa população e acabará inibindo o seu crescimento exponencial.

Figura 3.1: Crescimento exponencial:  $\frac{dy}{dt} = ay$ .



Fonte: Autor, 2019, com o aplicativo geogebra.

Verhust reformulou o modelo de Malthus acrescentando uma constante que leva em consideração as condições do meio.

## 3.2 Modelo de Verhulst

O primeiro modelo que atende à variação da taxa de crescimento foi formulado por Pierre François Verhulst (1804-1849), um matemático belga em 1837, é um modelo de dinâmica populacional de espécie única que supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor. A equação  $\frac{dy}{dt} = (a - by)y$  foi introduzida como um modelo para o crescimento populacional humano em 1838. Ele se referiu a esse crescimento como crescimento logístico; por isso, a equação é chamada muitas vezes, de equação logística.

A equação logística,

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \quad (3.4)$$

é uma equação autônoma, pois pode ser posta na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad (3.5)$$

e representa o crescimento logístico, pois (3.4) é dada da forma:

$$\frac{dy}{dt} = h(y).y \quad (3.6)$$

A função mais simples que tem essas propriedades é  $h(y) = a - by$  onde  $a$  é, também, uma constante positiva. Usando essa função na equação (3.6), obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = (a - by)y \quad (3.7)$$

A equação logística pode ser apresentada na sua forma equivalente. Colocando  $a$  em evidência:

$$\frac{dy}{dt} = a. \left(1 - \frac{b}{a}y\right) y \quad (3.8)$$

$$\frac{dy}{dt} = a. \left(1 - \frac{y}{\frac{a}{b}}\right) \quad (3.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) y \quad (3.10)$$

onde  $k = \frac{a}{b}$  é o nível de saturação ou a capacidade de suporte do ambiente, ou seja, é o número máximo que o ambiente permite.

A equação (3.10) é uma EDO não-linear autônoma e para resolvê-la usamos o método de separação de variáveis, se quisermos ter uma descrição mais detalhada sobre o crescimento logístico, por exemplo, e quisermos saber o valor da população em algum instante particular, então precisamos resolver a equação (3.10) sujeita a condição inicial  $y(0) = y_0$ . Se  $y \neq 0$  e  $y \neq k$ , podemos escrever a equação (3.10) na forma:

$$\frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{k}\right) y} = a dt \quad (3.11)$$

usando a decomposição em frações parciais, temos:

$$\frac{1}{y \left(1 - \frac{y}{k}\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{\left(1 - \frac{y}{k}\right)} \quad (3.12)$$

$$A \left(1 - \frac{y}{k}\right) + B y = 1 \quad (3.13)$$

$$A - A \left(\frac{y}{k}\right) + B y = 1 \quad (3.14)$$

$$y \left(B - \frac{A}{k}\right) + A = 1 + 0 \cdot y \quad (3.15)$$

Temos que  $A = 1$  e  $B - \frac{A}{k} = 0$ , isto implica que  $B = \frac{1}{k}$ , logo:

$$\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1 - \frac{y}{k}}\right)\right] dy = a dt \quad (3.16)$$

Integrando ambos os membros da igualdade,

$$\int \frac{1}{y} dy + \frac{1}{k} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{k}\right)} dy = \int a dt \quad (3.17)$$

$$\ln(y) - \ln\left(1 - \frac{y}{k}\right) = at + C \quad (3.18)$$

$$\ln\left(\frac{y}{1 - \frac{y}{k}}\right) = at + C \quad (3.19)$$

$y = y(t)$  e tomando  $t = 0$ , segue  $y(0) = y_0$  e obtemos:

$$C = \ln\left(\frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{k}}\right) \quad (3.20)$$

Substituindo  $C$  em (3.19) segue:

$$\ln\left(\frac{y(t)}{1 - \frac{y(t)}{k}}\right) = at + \ln\left(\frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{k}}\right) \quad (3.21)$$

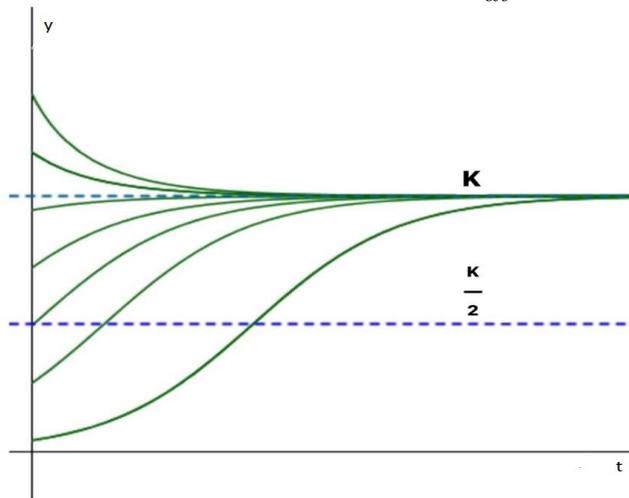
$$\frac{y(t)}{1 - \frac{y(t)}{k}} = e^{at} \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{k}} \quad (3.22)$$

explicitando  $y(t)$  temos:

$$y(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) e^{-at}} \quad (3.23)$$

O gráfico das soluções da equação (3.23) é apresentado na figura 3.2.

Figura 3.2: Crescimento Logístico:  $\frac{dy}{dt} = a \left(1 - \frac{y}{k}\right) y$



Fonte: Autor, 2019, com o aplicativo Paint.

Esse tipo de equação admite o que é chamado de solução estacionária ou solução de equilíbrio. Esse tipo de solução acontece quando não existe mais dinâmica na variável dependente, ou seja, quando  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Também é observado que a equação (3.10) possui dois pontos de equilíbrio.

Então, igualando  $\frac{-1y^2}{k} + ay = 0$  obteremos seus pontos de equilíbrio.

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2}}{\frac{-2a}{k}} = \frac{a \pm a}{\frac{-2a}{k}} =$$

$$\implies y_1 = \frac{-a + a}{\frac{-2a}{k}} = \frac{0}{\frac{-2a}{k}} = 0$$

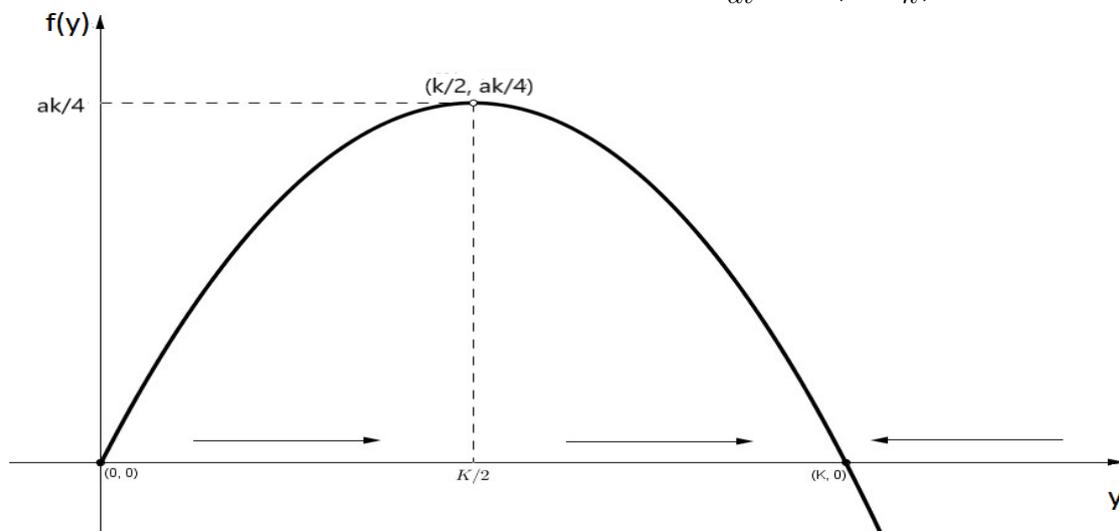
$$\implies y_2 = \frac{-a - a}{\frac{-2a}{k}} = \frac{-2ak}{-2a} = k$$

No caso da equação (3.10) o gráfico é a parábola ilustrada na figura 3.3. As interseções com os eixos são  $(0, 0)$  e  $(k, 0)$ , correspondendo aos pontos críticos da equação (3.10), e o vértice da parábola está em  $\left(\frac{k}{2}, \frac{ak}{4}\right)$ .

Ao analisar a figura 3.3 pode-se concluir que:

1.  $0 < y < k$ , nós temos  $\frac{dy}{dt} > 0$  (crescente).
2. para  $y > k$  nós temos  $\frac{dy}{dt} < 0$  (Decrescente).

Figura 3.3:  $f(y)$  em função de  $y$  para  $\frac{dy}{dt} = a \left(1 - \frac{y}{k}\right) y$



Fonte: Autor, 2019, com o aplicativo Paint.

Portanto, as setas apontadas para a direita na figura 3.3 indicam que  $y$  é crescente sempre que  $0 < y < k$  e a seta apontada para esquerda aponta que  $y$  é decrescente quando  $y > k$ . O que nos permite concluir que  $k$  é um ponto de equilíbrio estável, ou mais precisamente,  $k$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para  $x > 0$ , no sentido que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k \quad \text{para} \quad x(0) > 0$$

Assim, analisando a solução obtemos, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $y(t)$  tende para  $k$ .

1. Se  $0 < y_0 < k$ , então  $c > 0$  e assim  $y(t)$  tende para  $k$  por valores menores que  $k$ .
2. Se  $y_0 > k$ , então  $c < 0$ ,  $y(t)$  tende para  $k$  por valores maiores que  $k$ .

### 3.3 Modelo de Logístico de Schaefer

O modelo de Schaefer (1948) aplicado as populações de peixes é obtido fazendo uma pequena modificação na equação de Verhulst dada por,

$$\frac{dy}{dt} = ay \left(1 - \frac{y}{k}\right), \tag{3.24}$$

onde  $a$  é a taxa de crescimento dessa população. A equação de Verhulst (3.24) não leva em conta a taxa de captura. Então uma forma para obter-se essa captura, foi considerar

uma extração subtraindo uma constante positiva  $h$  na equação (3.24), assim teremos

$$\frac{dy}{dt} = ay \left(1 - \frac{y}{k}\right) - h \quad (3.25)$$

onde a constante positiva  $h$ , representa a taxa de captura constante mensal. Igualando a equação (3.25) a zero acharemos as raízes, então:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a - (-a) \pm \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{4h}{ka}\right)}}{\frac{2a}{k}} = \frac{k}{2a} \left[ a \pm \left( a \sqrt{1 - \frac{4h}{ka}} \right) \right] = \\ &= \frac{ka}{2a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4h}{ka}} \right) = \frac{k}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4h}{ka}} \right) \end{aligned}$$

Logo as soluções de equilíbrio da equação (3.25) são os zeros triviais de  $y' = f(y) = ay \left(1 - \frac{y}{k}\right) - h$ . São eles:

$$y_1 = \frac{k}{2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4h}{ka}} \right] \quad e \quad y_2 = \frac{k}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4h}{ka}} \right] \quad (3.26)$$

Então sempre que essa minha constante de captura  $h \leq \frac{ak}{4}$ . A solução analítica da equação (3.25) tem a forma

$$y(t) = \frac{k}{2} + \tanh \left( \frac{\sqrt{a^2 k^2 - 4hak}(t + c_0)}{2k} \right) \left( \frac{\sqrt{a^2 k^2 - 4hka}}{2a} \right) \quad (3.27)$$

A análise do parâmetro  $h$  na equação logística de Schaefer nos leva as seguintes propriedades:

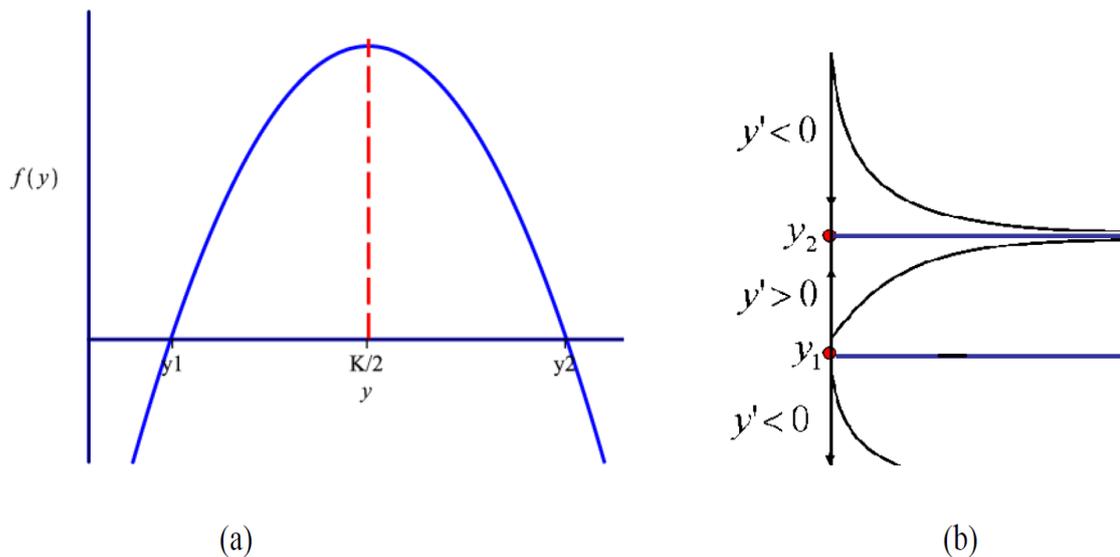
1. Se  $h = \frac{ak}{4}$  em (3.25), então existe um único ponto de equilíbrio (duplo)  $y_s = \frac{k}{2}$ . Neste caso a derivada  $y' = f(y) = -a(2y - k)^2 < 0$  é sempre decrescente, isso significa que independente da biomassa inicial, a população de peixes sempre tende a diminuir. Assim o equilíbrio  $y_s(t) = \frac{k}{2}$  é semi-estável.
2. Agora se  $h < \frac{ak}{4}$ , resultam em dois pontos de equilíbrio, dados pelas expressões (3.26) e neste caso a função  $f$  pode ser escrita como  $f(y) = (y - y_1)(y - y_2)$ . Como o sinal da função  $f$  determina o sinal da taxa de crescimento figura 3.4 segue que:

- a)  $y' < 0$  quando  $0 < y < y_1$ ;

- b)  $y' > 0$  quando  $y_1 < y < y_2$  e por fim;
- c)  $y' < 0$  quando tivermos  $y_2 < y$ .

Logo a solução de equilíbrio  $y_1$  é instável, isto é, a população decresce para biomassas iniciais menores que  $y_1$ ; cresce aproximando-se de  $y_2$  quando ela estiver variando entre  $y_1$  e  $y_2$ ; decresce aproximando-se de  $y_2$  para biomassas superiores a  $y_2$ . Desse modo se a captura for constante com  $y_0 < y_1$  e desde que  $y = 0$  não é uma solução assintótica a população e extinguirá em um tempo finito  $t$ . Portanto a pesca será sustentável se  $h < \left(\frac{ak}{4}\right)$  e  $y_1 < y_0 < y_2$  ou  $y_2 < y_0$ .

Figura 3.4: Curva do crescimento de estoque



Fonte: Araujo, Cadernos do IME Série Matemática, v. 5, p. 133-143, 2011.

### 3.4 Modelo de Gordon-Schaefer

O modelo dado na equação (3.25) serve para descrever o comportamento de pesca de um determinado 'banco' de peixe, desse modo, para ser mais realístico, o modelo deve considerar a taxa de captura  $Ey(t)$ , onde  $E$  representa o esforço de pesca, ( $E > 0$ ) com unidades em inverso de tempo. É razoável admitir que a taxa de captura seja proporcional ao tamanho da população, portanto a taxa de captura é dependente da população  $y$ . Desse modo, fazendo uma pequena modificação da equação (3.25) resulta o modelo de Gordon-Schaefer dada por

$$\frac{dy}{dt} = a \left(1 - \frac{y}{k}\right) y - Ey \tag{3.28}$$

### 3. Modelagem Matemática de Dinâmica Populacional

---

Resolvendo a equação (3.28) acharemos as suas raízes, então temos:

$$y = \frac{-(E - a) \pm \sqrt{(E - a)^2}}{\frac{2a}{k}} = \frac{k}{2a} [-E + a \pm E - a]$$

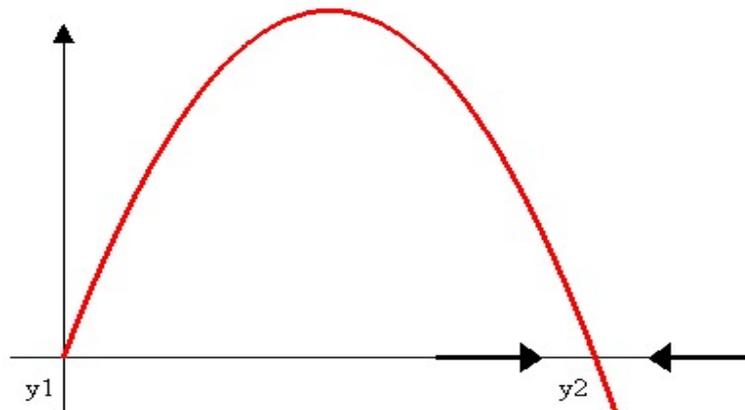
Logo os pontos de equilíbrio ou soluções triviais dessa equação são:

$$y_1 = \frac{k}{2a} [-E + a + (E - a)] = \frac{k}{2a} [-E + a + E - a] = \frac{k}{2a} (0) = 0.$$

e

$$y_2 = \frac{k}{2a} [-E + a - (E - a)] = \frac{k}{2a} [-E + a - E + a] = k \left[ \frac{2(a - E)}{2a} \right] = k \left[ \frac{a - E}{a} \right].$$

Figura 3.5: Variação x Estoque



Fonte: Boyce, Capítulo 2, Seção 2.5.

Da figura 3.5 percebe-se que, se  $y_1 < y < y_2$ , então  $F(y) > 0$  e portanto a derivada  $y' = F(y)$  é também positiva. Logo, a população  $y$  aumenta, afastando-se de  $y_1$  e aproximando-se de  $y_2$ .

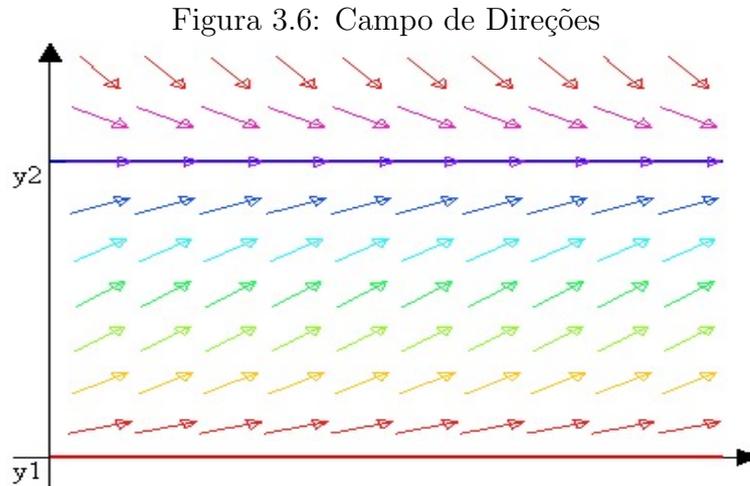
A solução analítica da equação (3.28) é da forma

$$y(t) = \frac{k(E - a)}{ck e^{(E-a)t}(E - a) - a}$$

Admitiremos que  $E < a$  para que  $y(t)$  venha ser positivo. Então observe que:

$$\begin{cases} y' > 0 & \text{se } 0 < y < y_2 \\ y' < 0 & \text{se } y_2 < y \end{cases}$$

Portanto, como mostrado na Figura 3.5, o ponto de equilíbrio  $y_2 = k \left( \frac{a - E}{a} \right)$  é assintoticamente estável, enquanto o ponto  $y_1 = 0$  é instável .



Fonte: Boyce, Capítulo 2, Seção 2.5.

Por outro lado, se  $y > y_2$ , então  $F(y) < 0$  e portanto a derivada  $y' = F(y)$  é também negativa. Logo, a população diminui, aproximando-se de  $y_2$ . Essas observações estão ilustradas no campo de direções na figura 3.6. Dessa análise segue-se que  $y_1$  é uma solução de equilíbrio assintoticamente instável, enquanto que  $y_2$  é estável.

O produto de esforço de pesca  $E$  pela solução assintoticamente estável  $Ey_2$  é chamada produção sustentável, denotada por  $P_s$ , que é a taxa nas quais os peixes podem ser capturados indefinidamente em termos de equação teremos:

$$P_s = Ey_2 = kE \left( 1 - \frac{E}{a} \right) = kE - \left( \frac{k}{a} \right) E^2 \quad (3.29)$$

## Capítulo 4

# Manejo de Recursos Renováveis

Segundo o Grupo de proteção ambiental do Brasil (GPA), recursos naturais renováveis são aqueles que existindo em abundância podem ser recolocados na natureza e sua renovação deve ter o ritmo maior ou igual ao consumo humano. Os recursos naturais renováveis incluem organismos vivos como peixes, plantas, árvores, mas também sistemas inanimados como a água e o ar. E algo que vai em contra partida a isso é a sobre-exploração que por diversas vezes causa a extinção ou exaustão econômica de recursos naturais. Este conceito de exaustão de recursos de livre acesso tem afetado, por exemplo, a indústria pesqueira em todo o Mundo. O conhecimento da dinâmica populacional e monitorização das espécies exploradas é indispensável para a sua conservação pelo uso sensato.

O manejo de recursos naturais tem sido utilizado como uma importante ferramenta para a conservação das espécies. Assim, o manejo de todo e qualquer recurso natural deve englobar um conjunto de procedimentos e técnicas que assegurem a sua capacidade de regeneração natural, capacidade de sustentabilidade, a estimulação da diversificação produtiva como um estímulo à segurança alimentar e geração de renda.

Muitas espécies têm sido reintroduzidas na natureza graças à execução de práticas adequadas de manejo dos recursos naturais. Nos dias de hoje, o manejo dos recursos naturais tem recebido muita atenção, especialmente por parte de organizações ambientalistas, devido sobretudo ao avançado estado de degradação ambiental.

Ocorre porém, que a interferência humana em ecossistemas pode levar a um desequilíbrio gerando o surto de determinadas espécies nocivas a biodiversidade ou ao ser humano denominadas pragas. Usualmente, reduzir os impactos causados pelas pragas são

introduzidas técnicas de controle.

O Controle Biológico que é uma técnica utilizada para diminuir pragas em determinadas populações. Esta técnica tem se destacado recentemente no Brasil em função da sua eficiência e por envolver apenas meios naturais. Apesar de ser um mercado em expansão, ainda opta-se pelo controle químico, o Brasil está no ranking dos maiores consumidores de agrotóxicos do mundo [4]. Um dos fatores que contribui para isso é que muitos lavradores ainda não fazem o controle biológico de pragas pelo fato de não conseguirem perceber o efeito benéfico da presença deles na lavoura, já que os inimigos naturais são muito pequenos, difíceis de serem visualizados. Comparando as duas técnicas citadas, o controle biológico tem menor impacto ambiental, por ser uma técnica que promove o equilíbrio entre as pragas e seus inimigos naturais, não deixa resíduos tóxicos nas lavouras, nas águas, ou no solo e, por consequência, também não causa intoxicação no agricultor [4].

Da poluição dos lagos que foi detectado em comunidades ribeirinhas do Estado do Amapá que há um crescimento significativo de plantas aquáticas, tais como a aninga (*Montrichardia Linifera*). Cujo crescimento populacional pode ser representado pelo modelo de Verhulst [9]:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2; \quad (4.1)$$

onde  $y = y(t)$  representa a densidade populacional da espécie (Aninga) no tempo  $t$ .

Uma estratégia de controle populacional viável, consiste no recolhimento frequente da planta, assim a equação diferencial (4.1) pode ser alterada para incluir a função de controle  $u(t)$  que representa a densidade de plantas extraídas:

O problema de controle pode ser formulado da seguinte forma: Para o sistema (4.2), com a condição inicial (4.3), encontrar a função de controle  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  satisfazendo as limitações (4.4) que maximize a remoção da espécie.

$$\frac{dy}{dt} = a(y - u) - b(y - u)^2 - ku; \quad (4.2)$$

$$y(0) = y_0; \quad (4.3)$$

$$0 \leq u(t) \leq y(t); \quad (4.4)$$

o coeficiente  $k$  caracteriza a capacidade técnica de recolhimento de plantas.

Com base no exposto podemos concluir que o controle de Aningas deve ser aplicado quando a sua densidade populacional supera a metade do valor da capacidade máxima de crescimento no lago. Assim, é possível determinar a quantidade de plantas necessária para maximizar a remoção de Aningas, e a estratégia ótima para mantê-la neste nível.

Como exemplo da aplicação desta técnica pode-se modelar a situação apresentada anteriormente, apesar de expor a modelagem de um controle biológico simplificado, para sua correta solução exige-se o aprofundamento em princípios e técnicas que seguem além do propósito desta pesquisa, mas, cuja compreensão inicial será feita pela análise do manejo de população e peixes.

A situação apresentada anteriormente, apesar de expor a modelagem de um controle biológico simplificado

A população de peixes, como as demais populações, obedecem à equação diferencial ordinária:

$$\frac{dy}{dt} = F(y) - h(y, t) \quad (4.5)$$

onde  $\frac{dy}{dt}$  é a variação da população no tempo  $t$ ;  $F(y)$  é a função que representa o parâmetro de crescimento natural da população  $y$ ; e  $h(y, t)$  representa a taxa da colheita em relação ao tempo.

#### **Caso I: O Modelo Logístico com $h = 0$ .**

Consideremos, como um exemplo sem captura onde  $h = 0$  que um cardume de atum do Pacífico é modelado pela equação diferencial  $\frac{dy}{dt} = 0,08y \left(1 - \frac{y}{1000}\right)$ , em que  $y$  é a população total do cardume e 1000 é a capacidade sustentável estimada para a região observada. O tamanho dessa população de atum satisfaz a equação logística com  $a = 0,08$  por mês considerando que a população no início da observação era de 100 atuns.

Para a solução analítica desse problema será utilizada a equação (3.23).

$$y(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) e^{-at}}$$

sabemos que:

$y$  = População;

$k = 1000$  (capacidade de suporte sustentável);

$a = 0,08$  (constante de crescimento natural da população);

Substituindo os valores dados temos:

$$y(t) = \frac{1000}{1 + \left(\frac{1000}{100} - 1\right) e^{-0,08t}} = \frac{1000}{1 + (10 - 1) e^{-0,08t}}$$

$$y(t) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0,08t}}$$

Como  $y$  é a população, pode estipular o tempo necessário para que a população atinja um nível desejado específico tal como  $y(t) = 900$ .

$$900 = \frac{1000}{1 + 9e^{-0,08t}} \implies 1 + 9e^{-0,08t} = \frac{1000}{900}$$

$$1 + 9e^{-0,08t} = \frac{10}{9} \implies 9e^{-0,08t} = \frac{10}{9} - 1 \implies 9e^{-0,08t} = \frac{1}{9}$$

$$e^{-0,08t} = \frac{1}{81}$$

passando  $\ln$  na igualdade temos:

$$\ln(e^{-0,08t}) = \ln\left(\frac{1}{81}\right) \implies -0,08t = \ln(1) - \ln(81)$$

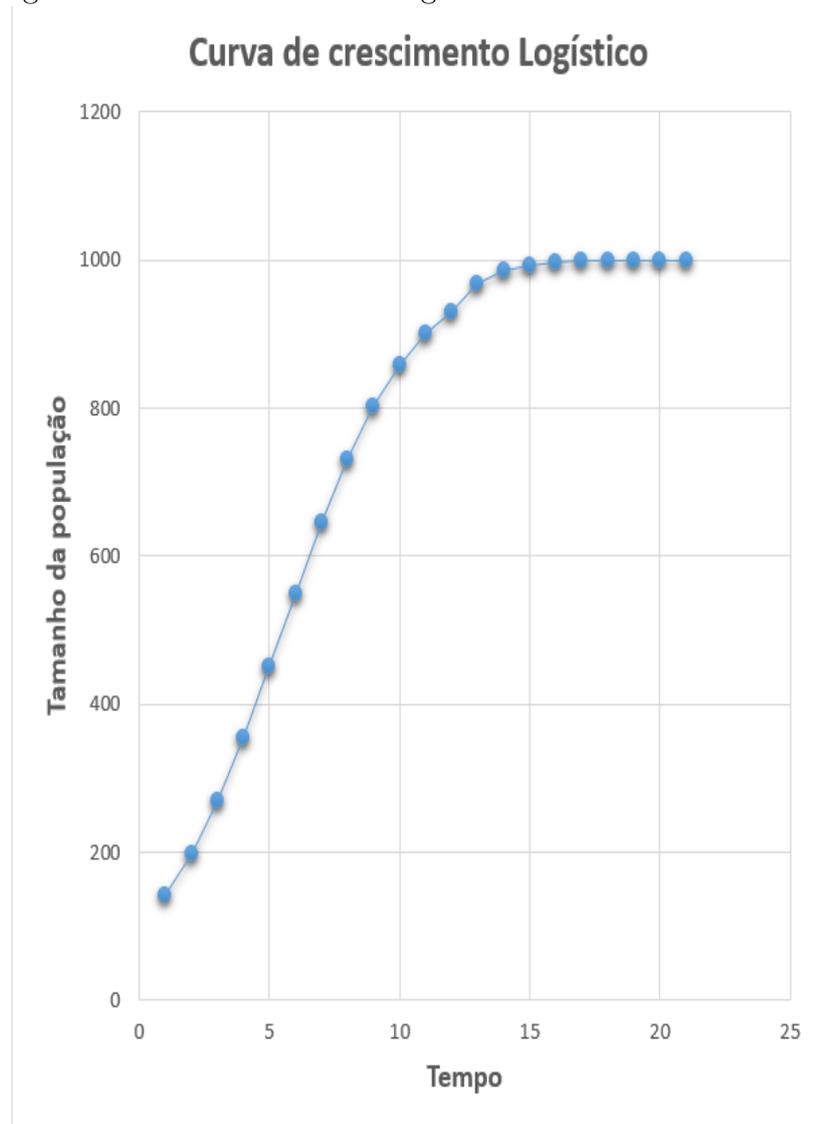
$$-0,08t = -4,39 \implies t = \frac{-4,39}{-0,08}$$

$$t \cong 54,87 \text{ meses.}$$

Portanto a população de 900 atuns será alcançada em aproximadamente 54,87 meses como ilustrado na figura 4.1.

| População de atum |           |
|-------------------|-----------|
| t                 | y(t)      |
| 5                 | 142,18925 |
| 10                | 198,2569  |
| 15                | 269,48745 |
| 20                | 354,97892 |
| 25                | 450,85306 |
| 30                | 550,52086 |
| 35                | 646,29102 |
| 40                | 731,60391 |
| 45                | 802,62394 |
| 50                | 858,48645 |
| 54,93             | 899,99558 |
| 55                | 900,49847 |
| 60                | 931,03999 |
| 70                | 967,79116 |
| 80                | 985,26631 |
| 90                | 993,32558 |
| 100               | 996,98992 |
| 110               | 998,64524 |
| 120               | 999,39081 |
| 130               | 999,72618 |
| 140               | 999,87695 |
| 150               | 999,94471 |
| 160               | 999,97515 |
| 260               | 999,99999 |
| 269               | 1000      |

Figura 4.1: Tabela da Curva logística



Fonte: Autor, 2019, com o software Excel.

Ainda pode-se observar no gráfico da figura 4.1 que a população está convergindo para assintota  $y = k$ . Com base nisso ao analisarmos a figura 4.2 podemos concluir as seguintes análises:

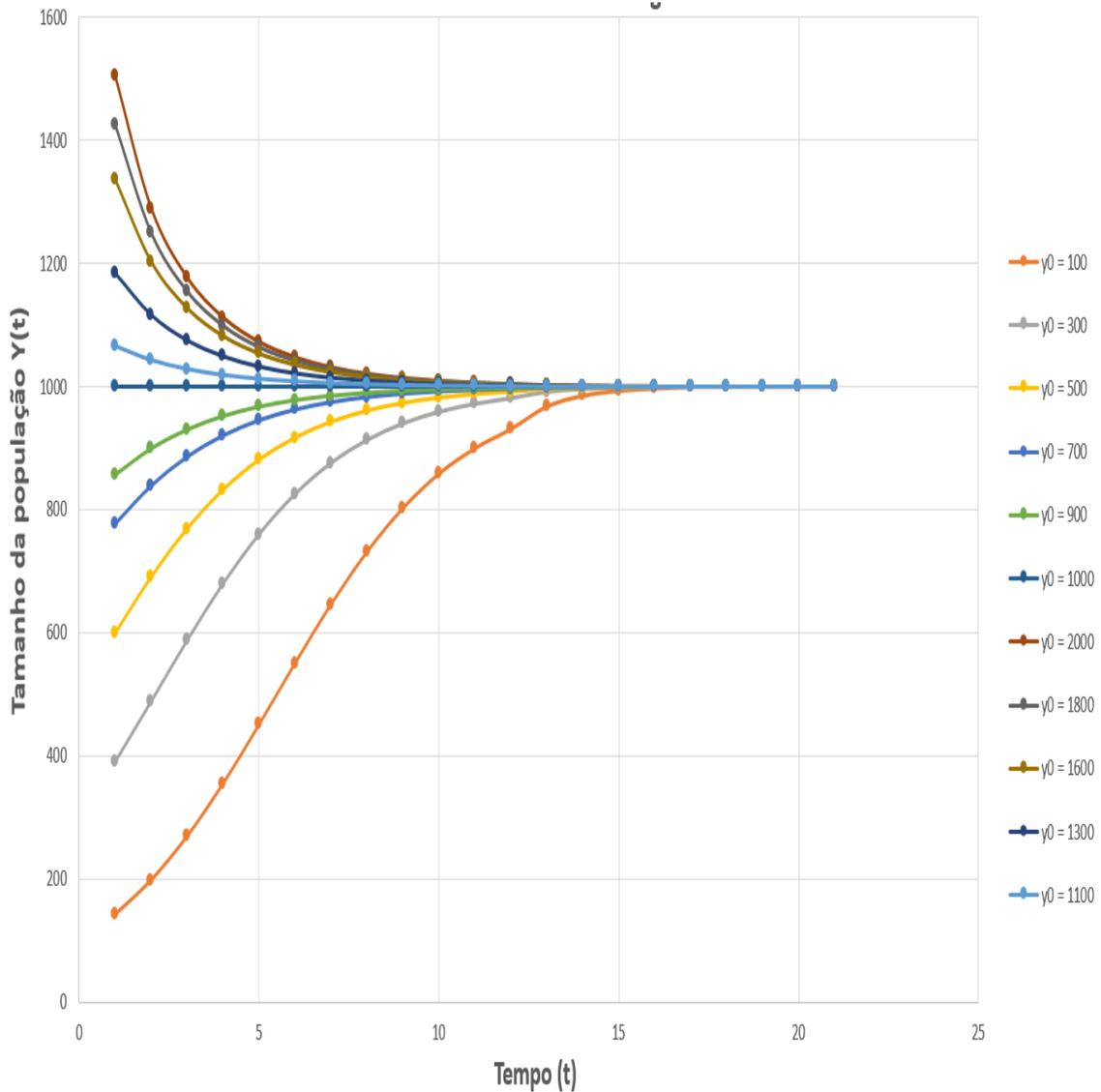
1. Como os valores  $y_0 < k$  a curva está convergindo de forma crescente para a assintota onde  $y = k$ .
2. Conforme descrito no capítulo 3, para valores onde  $y_0 > k$  a população converge de forma decrescente para a assintota  $y = k$

Então não importa o valor inicial, a população convergirá para a capacidade de suporte sustentável  $k$ . A explicação plausível para isso é o fator limitador que o Modelo de Verhulst

#### 4. Manejo de Recursos Renováveis

fornece, de que uma dada população deverá crescer até um limite máximo sustentável, ou seja, sua população tende a se estabilizar em determinado momento seja ele por falta de espaço, comida, oxigênio, entre muitos outros fatores. Na figura 4.2 tal fato fica bastante evidente.

Figura 4.2: Crescimento populacional para a equação  $y(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right) e^{-at}}$ .



Fonte: Autor, 2019, com o software Excel.

**Caso II: O Modelo Logístico de Schaefer com  $h$ =Constante.**

Considerando agora uma população de linguado com parâmetros populacionais fornecidos na Tabela 4.1

Tabela 4.1: Parâmetro de dados

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| <b>Biomassa</b>                | $y_0 = \frac{nk}{10}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 10$ |
| <b>Taxa de Crescimento</b>     | $a = 0,71/ano$                                      |
| <b>Esforço máximo</b>          | $E = \frac{a}{2}$                                   |
| <b>Capacidade de saturação</b> | $k = 3500kg$  |

Fonte: Autor,2019.

A partir do modelo populacional proposto por Shaefer pode-se observar as propriedades apresentadas no capítulo 3, ou seja:

1. Se na equação (3.25)

$$h = \frac{ak}{4} = \frac{0,71 * 3500}{4} = 621,25.$$

Então, como apresentado na Figura 4.3 existe um único ponto de equilíbrio (duplo)  $y_s = \frac{k}{2} = 1750$ . Neste caso a população de peixes sempre tende a diminuir.

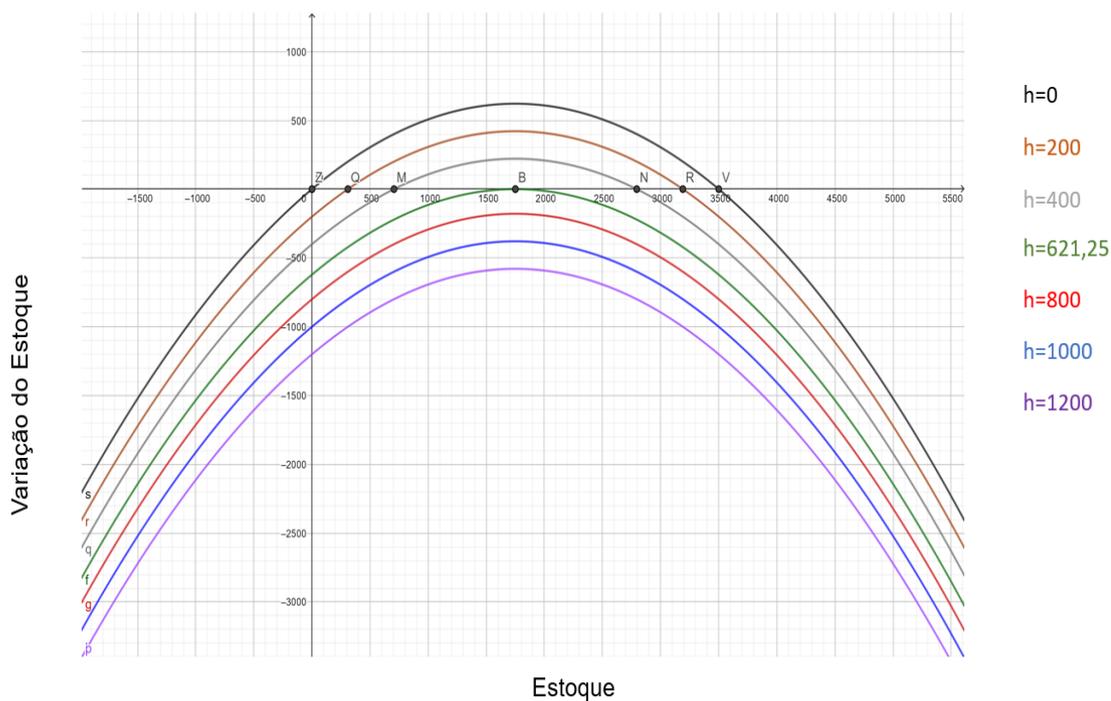
2. Por outro lado, se  $h < 621,25$ , resultam em dois pontos de equilíbrio.

A obtenção da figura 4.3 se deu por meio da substituição dos dados da tabela 4.1 na equação 3.25 com a nossa taxa de captura  $h$  variando.

Em virtude da forma da solução analítica explícita deste modelo e da acurácia dos métodos numéricos propostos no capítulo 2, a partir daqui, na obtenção de gráficos que apresentem a evolução do estoque em função do tempo, utilizam-se os o método de Euler com passo  $\Delta t = 1$  como ilustrado na figura 4.4.

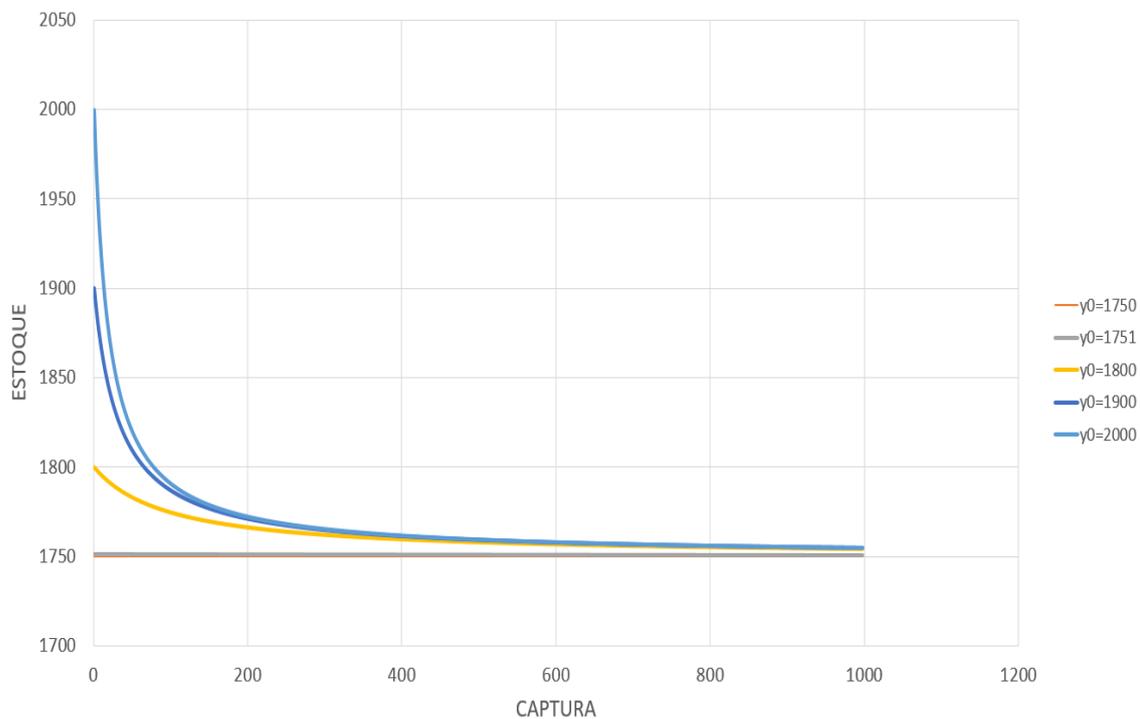
Portanto a pesca será sustentável se  $h < \left(\frac{ak}{4}\right)$  e  $y_1 < y_0 < y_2$  ou  $y_2 < y_0$ .

Figura 4.3: Crescimento Logístico no Modelo de Schaefer



Fonte: Autor, 2019, com o software geogebra.

Figura 4.4: Crescimento Logístico de Schaefer com a Variação do Estoque com  $h = 621,25$



Fonte: Autor, 2019, com o software Excel.

**Caso III: Modelo de Gordon-Schaefer**  $h = Ey$ 

Para este caso, é necessário a inclusão do seguinte dado apresentado na tabela 4.2

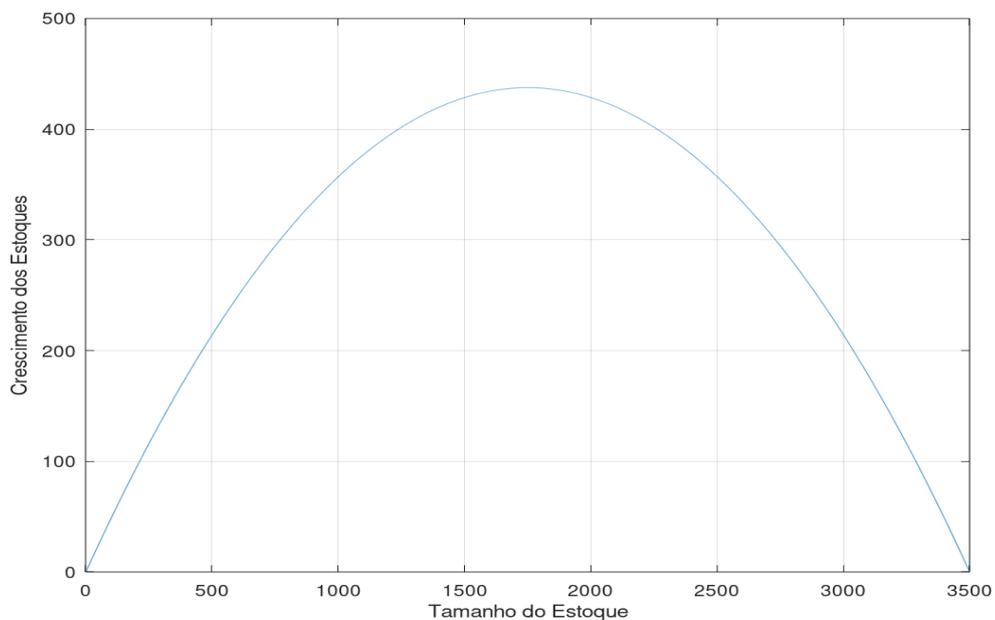
Tabela 4.2: Parâmetro de dados

|                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| <b>Esforço máximo</b> | $E = \frac{a}{2}$ |
|-----------------------|-------------------|

Fonte: Autor, 2019.

Observe que o crescimento  $\frac{dy}{dt}$  depende do estoque e portanto, quando o tamanho do estoque é baixo, o crescimento também é baixo. Ou seja, nesta situação, apesar de haver muitos recursos ecológicos para apoiar o crescimento de estoques (uma vez que há relativamente pouca concorrência devido ao baixo tamanho do estoque), o crescimento é pequeno, pois não há biomassa suficiente para levar ao crescimento mais rápido. Por outro lado, quando os estoques estão altos (próximo de  $k = 3500$ ), as restrições ecológicas inviabilizam o crescimento rápido das populações, apesar de haver um grande número de indivíduos capazes de criar nova biomassa.

Figura 4.5: Curva do crescimento de estoque



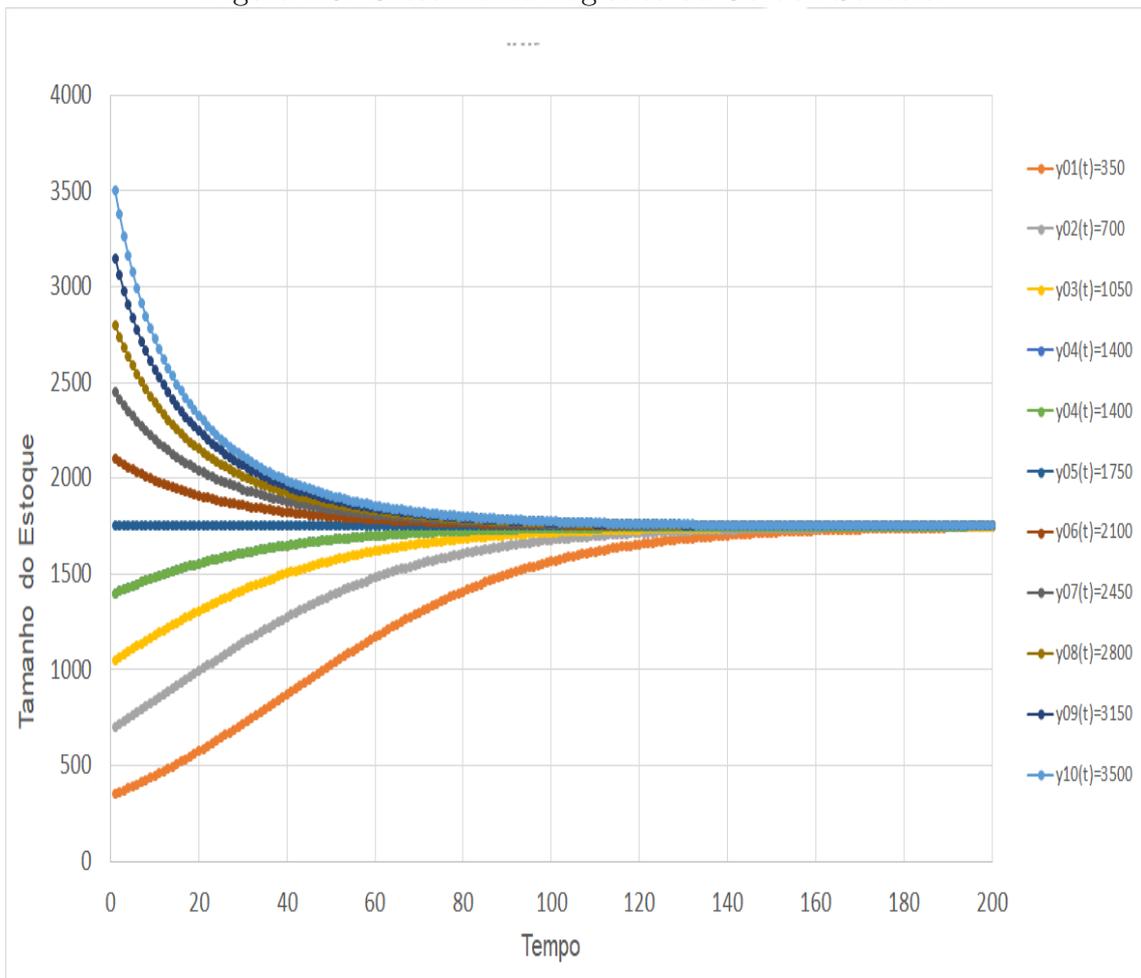
Fonte: Autor, 2019 com o software Matlab.

Também pode-se analisar por meio da figura 4.5 esse fato do ponto de vista de como

o estoque  $y(t)$  e o crescimento dos estoques  $\left(\frac{dy}{dt}\right)$  evoluem com o tempo quando não há pesca (captura).

A figura 4.6 apresenta a dinâmica do tamanho do estoque a partir de diversas populações iniciais  $y_0$ . E olhando para a figura 4.6 Todos convergem para a produção máxima sustentável que é igual a 1750. A solução desse gráfico foi dada graças ao método numérico de Euler.

Figura 4.6: Crescimento Logístico de Gordon-Schaefer



Fonte: Autor, 2019 com o software Excel.

# Considerações Finais

Este trabalho apresentou os principais modelos que analisam a dinâmica de recursos naturais renováveis em relação à pesca. Já que a ciência da pesca as vezes requer quase sempre resultados muito complexos de se obter sobre a biologia das espécies. Tendo em vista isso, esses modelos buscam uma captura ótima para a extração desse tipo de recurso.

Fez-se um estudo qualitativo e analítico dos modelos matemáticos clássicos de exploração de apenas uma espécie, tais como, o modelo de Malthus, o modelo Verhust, o modelo Schaefer e o modelo de Gordon-Schaefer, com o objetivo de investigar o crescimento populacional de uma determinada população. E o modelo base, foi o modelo de Verhust, por ser uma modificação do modelo de Malthus onde foi incorporado um fator limitador, que é chamado de capacidade de suporte. Este é um modelo importante na pesquisa, pois nele constatou-se que independentemente da população inicial, a população final sempre converge para a capacidade de suporte dada. E isso ficou muito claro na aplicação dada sobre o tanque de peixes no capítulo 4.

O trabalho quase em sua totalidade foi feito com base em pesquisas bibliográficas. Com foco nas equações diferenciais ordinárias e modelos que descrevem a dinâmica populacional de apenas uma espécie, propõem-se para estudos futuros os casos que envolvem equações diferenciais parciais que analisarão mais de uma variável como espaço e tempo e os modelos que estudam a interação entre duas espécies como o modelo de Lotka-Volterra.

Por fim ressaltamos a importância deste estudo mais aprofundado no conhecimento na área de sistemas dinâmicos, principalmente no modelo de Gordon-Schaefer pela carência de materiais focados na área da modelagem matemática, ressaltamos ainda que fica em aberto ao público a continuação sobre um estudo mais aprofundado desses modelos, agregando assim conhecimentos na área e servindo como base para estudos futuros.

# Referências Bibliográficas

- [1] ARAUJO, JORGE C.; RAYMUNDO, Y. A. H. ; MÁRQUEZ, R. M. G.. Análise Qualitativa de Modelos Logísticos para Bancos Pesqueiros. **Cadernos do IME Série Matemática**, v. 5, p. 133-143, 2011.
- [2] BOYCE, WILLIAM E.; DRIPRIMA, RICHARD C., **Equações Diferenciais Elementares e Problema de Valores de Contorno**, 9ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [3] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C., **Equações Diferenciais com aplicações**, São Paulo: Harbra, 1998.
- [4] CASSAL, V. B.; AZEVEDO, L.F.; FERREIRA, R. P. ET AL. Agrotóxicos: uma revisão de suas consequências para a saúde pública. **Revista Eletrônica em Gestão, Educação e Tecnologia Ambiental**, 18:437-445, 2014.
- [5] CONSOLI, R.; LOURENÇO-DE-OLIVEIRA R., **Controle químico e biológico: perspectivas**. In: CONSOLI, R. ; Lourenço-de-Oliveira R. Principais Mosquitos de Importância Sanitária no Brasil. Rio de Janeiro: Fiocruz, 1994. v. 1, p. 155-159.
- [6] LIMA, E. L., **Análise real:vol.1.14.ed.** Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [7] LIMA, E. L., **Curso de Análise:vol.1.14.ed.** Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [8] QUEIROZ, J. A. S.; DIAS, NEYLAN L., **Modelagem Matemática de Problemas Biológicos - TCC em Licenciatura Plena em Matemática**, UNIFAP, 2013.
- [9] RAFICOV, M., Notas do Minicurso: Aplicação dos Modelos no Controle de Populações, In: **Minicurso da Escola de Verão**, Departamento de Física, Estatística e Matemática, UNIJUI, Ijuí/RS, 2003.

- [10] SILVA, M. O.; ROSA, J., Modelos de Sistemas Dinâmicos Aplicados à Ecologia: Malthus, Verhuslt e Lotka-Volterra. **Ciência é minha praia**, p. 64 - 78, 09 jul. 2018.
- [11] THEODORO, MARIA B. C., **Exploração de Recursos Renováveis: A Pesca: Comparação de Dois Modelos**. Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, 1986.
- [12] ZILL, DENNIS G., CULLEN, MICHAEL R., **Equações Diferenciais**, Person-Makron Books, vol.1, 3.ed., 2001.