



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

DANIEL MORAES DOS REIS

**INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES DE VARIÁVEL
COMPLEXA E APLICAÇÃO NO TEOREMA
FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA**

MACAPÁ

2019

DANIEL MORAES DOS REIS

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA E APLICAÇÃO NO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento.

MACAPÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborado por Cristina Fernandes – CRB2/1569

Reis, Daniel Moraes dos.

Introdução às funções de variável complexa e aplicação no teorema fundamental da álgebra / Daniel Moraes dos Reis; Orientador, Marcel Lucas Picanço Nascimento. – Macapá, 2019. 104 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1.Funções holomorfas. 2.Fórmula integral de Cauchy. 3.Teorema de Rouché. 4.Teorema fundamental da álgebra. I. Nascimento, Marcel Lucas Picanço, Orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

512 R375i
CDD. 22 ed.

DANIEL MORAES DOS REIS

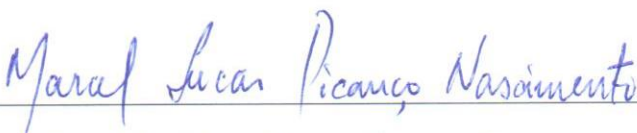
INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA E APLICAÇÃO NO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Colegiado de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Pura

Aprovada em 29 de novembro de 2019.

Banca Examinadora:


Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento
Orientador - UNIFAP


Prof. Me. Kelmem da Cruz Barroso
1º Membro - UNIFAP


Prof. Dr. Ramon de Souza Gomes
2º Membro - UNIFAP

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por me conceder a vida e me fazer chegar até aqui.

Agradeço à minha família, meus pais Reven Reis e Rosiane Reis, meus irmãos Reven Jr e Keven Reis, por todo apoio e incentivo.

Agradeço ao professor Marcel Nascimento, pelas orientações, pelas correções, pelos conselhos e por todo o tempo dedicado a fazer com que esse trabalho fosse concluído com sucesso.

Agradeço aos professores, Kelmem Cruz e Ranon Gomes pela avaliação e correções feitas no trabalho.

Agradeço aos amigos: Ana Karoline, Andriny Lohane, Alice Souza, Eriel Souza, Marcos Roberto, Mattheus Lustosa, Mayara Gomes, Nazaré Farias, Sérgio Vitor e Tainá Picanço, por todos os bons e maus momentos que vivemos durante os quatro anos de curso.

*"O Espírito Divino expressou-se sublimemente
nesta maravilha da análise, neste portento do
mundo das ideias, este anfíbio entre o ser e o
não ser, que chamamos de raiz imaginária da
unidade negativa."*

(Gottfried Wilhelm Leibniz)

RESUMO

Neste trabalho, faremos um estudo introdutório de funções complexas de uma variável complexa e daremos uma aplicação dessa teoria na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, mostrando que todo polinômio $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de grau n , possui precisamente n zeros, contados com multiplicidade. Para isso, foi necessário o estudo das funções holomorfas e condições de Cauchy-Riemann, sequências e séries de números complexos para o desenvolvimento de funções analíticas, da teoria integral de Cauchy juntamente com suas fórmulas de integração, da série de Laurent para o entendimento de singularidades e resíduos e de teoremas importantes, como o princípio do argumento e o teorema de Rouché.

Palavras-chave: Funções holomorfas. Fórmula Integral de Cauchy. Teorema de Rouché. Teorema Fundamental da Álgebra.

ABSTRACT

In this work, we will make an introductory study of complex functions of a complex variable and apply this theory to the demonstration of the Fundamental Theorem of Algebra, showing that any polynomial $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ degree n , has precisely n zeros, counted with multiplicity. For this, it was necessary to study the holomorphic functions and Cauchy-Riemann conditions, complex sequences and series of numbers for the analytical functions development, Cauchy's integral theory combined with his integration formulas, Laurent series for understanding singularities and residues and important theorems, such as the principle of argument and Rouché's theorem.

Keywords: Holomorphic Functions. Cauchy's Integral Formula. Rouché's Theorem. Fundamental Theorem of Algebra.

Lista de Figuras

1.1	Representação de uma transformação.	17
1.2	Transformação do exemplo 1.1.	18
1.3	Interpretação geométrica da definição 1.1.	19
1.4	Domínio D_0 do ramo principal do $\log z$	31
2.1	Representação geométrica da proposição 2.9.	42
3.1	Região triangular do teorema de Cauchy-Goursat.	58
3.2	Domínios estrelados associados ao disco $D(z_0, R)$	63
3.3	Caminhos fechados contidos em $D(z_0, R)$	63
4.1	Região V fechada e limitada.	77
4.2	Região determinada por γ e exterior aos discos D_{γ_j}	87

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos;
- $D(a, r)$ denota o disco aberto de centro em a e raio r ;
- $\overline{D}(a, r)$ denota o disco fechado de centro em a e raio r ;
- $\partial\overline{D}(a, r)$ denota o círculo de centro em a e raio r ;
- γ denota uma curva em $\mathbb{C}$;
- $R(\Delta)$ denota a região fechada delimitada pelo triângulo Δ ;
- D_{γ_j} denota o disco aberto delimitado pelo círculo γ_j ;
- $\text{res}(f, a)$ denota o resíduo da função f no ponto a .
- $\mathbb{C} \setminus V$ denota o complementar de V em relação a $\mathbb{C}$.

Sumário

Introdução	13
1 Funções Holomorfas	15
1.1 Funções complexas de variável complexa	15
1.2 Transformações	17
1.3 Limites	18
1.3.1 Teoremas sobre limites	19
1.4 Continuidade	21
1.5 A derivada	22
1.6 Fórmulas de derivação	23
1.7 As condições de Cauchy-Riemann	23
1.8 Funções Holomorfas	27
1.9 Funções Elementares	29
1.9.1 A Exponencial	29
1.9.2 O Logaritmo	30
2 Sequências e Séries de Números Complexos	33
2.1 Sequências	33
2.2 Séries de Números Complexos	37
2.2.1 A série Geométrica	40
2.3 Séries de Potências	41
2.3.1 Funções Analíticas	42
2.3.2 Zeros de funções analíticas	47
3 Teoria Integral de Cauchy	49
3.1 Os Teoremas de Cauchy	57

4 Singularidades	76
4.1 A Expansão de Laurent	76
4.2 Classificação das singularidades	83
4.3 Resíduos	86
4.4 O Teorema de Rouché	88
4.4.1 O Teorema Fundamental da Álgebra	93
Considerações Finais	94
Referências Bibliográficas	95
A Números Complexos	96
B Noções Topológicas e Curvas em $\mathbb{C}$	99
C Funções Reais de duas Variáveis	102

Introdução

A teoria das funções de variável complexa foi desenvolvida e estudada ao longo da história da matemática por diversos matemáticos, os quais podemos citar alguns dos mais importantes, como: Gauss, Cauchy e Riemann. Uma das grandes contribuições de Gauss à essa teoria se dá pela demonstração, em sua tese de doutorado, do que conhecemos hoje como Teorema Fundamental da Álgebra, e anos após exibiu outras demonstrações do mesmo teorema. Cauchy ficou conhecido por ser o fundador dessa teoria, por seus diversos trabalhos publicados na área, podemos citar aqui as suas fórmulas de integração, ferramentas importantes na pesquisa realizada, de onde derivam resultados únicos dessa teoria. Por fim, mas não menos importante, a principal contribuição de Riemann é devido ao par de equações, hoje denominadas equações de Cauchy-Riemann. Existem também outras contribuições de Riemann mas que não mostraremos neste trabalho mas podemos citar, pois temos a intenção de estudá-los posteriormente, estes são: a esfera de Riemann, superfícies de Riemann e a famosa função zeta de Riemann.

O texto está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos as funções complexas de variável complexa, conceitos básicos sobre transformações, limites e suas propriedades, teoremas sobre limites, continuidade, a definição de derivada e fórmulas de derivação. Em seguida provaremos as condições de Cauchy-Riemann, dando condições necessárias e suficientes para a existência da derivada $f'(z_0)$. E continuaremos, dando a definição mais importante do trabalho, a de função holomorfa. E por fim, um breve estudo das funções elementares, a exponencial e logarítmica de variável complexa.

No capítulo 2 faremos um breve estudo de sequências de números complexos, definindo limite de uma sequência, e demonstrando teoremas que relacionam o limite de uma sequência de números complexos com o limite das sequências de números reais que convergem para a parte real e outra para a parte imaginária, veremos também um importante

critério de convergência - o critério de Cauchy. Entrando no estudo de série, veremos o critério mais elementar para convergência de uma série, o critério da comparação, que envolve séries de números reais não negativos. Apresentamos também as séries de potências e o conceito fundamental de raio de convergência. E por fim definiremos função analítica, e mostraremos que toda função analítica é holomorfa no seu disco de convergência.

No capítulo 3, estudaremos a teoria de integração de funções de variável complexa desenvolvida por Cauchy. Veremos as definições e propriedades básicas da integral, estudaremos a existência de primitivas em domínios, mostraremos um teorema equivalente ao Teorema Fundamental do Cálculo para funções de variável complexa e veremos os teoremas mais importantes do capítulo, são eles: Teorema de Cauchy-Goursat, Fórmulas Integrais de Cauchy, Estimativas de Cauchy, Teorema de Liouville, uma versão do Teorema Fundamental da Álgebra, mostrando que todo polinômio $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ não constante possui pelo menos um zero em $\mathbb{C}$, o Teorema de Cauchy e por último, a forma mais geral da primeira Fórmula Integral de Cauchy.

No capítulo 4 estudaremos as singularidades de uma função holomorfa através da série de Laurent. Classificaremos os tipos de singularidades, com destaque principal para a singularidade removível e polo de ordem k . Definiremos o resíduo através da série de Laurent e demonstraremos o teorema dos resíduos. E na última seção demonstraremos o princípio do argumento, apresentando uma fórmula capaz de calcular zeros e polos de uma função holomorfa. Mostraremos o teorema de Rouché e como consequência deste, mostraremos a versão mais geral do Teorema Fundamental da Álgebra, mostrando que todo polinômio de grau n possui precisamente n zeros, todos contados tantas vezes for sua multiplicidade.

Durante a pesquisa bibliográfica para a elaboração deste trabalho utilizamos como principais referências [2], [4] e [7]. Como complementação em diversos aspectos da teoria foram utilizadas as referências [1], [3], [5] e [6].

E por fim, as figuras presentes no trabalho foram feitas pelo autor utilizando o software Inkscape.

Capítulo 1

Funções Holomorfas

1.1 Funções complexas de variável complexa

Quando z designa qualquer um dos números de um conjunto S de números complexos, chamamos z de variável complexa. Se, para cada valor de z em S , o valor de uma segunda variável complexa w é determinado, então w é o valor que a função de variável complexa f assume no ponto z :

$$\begin{aligned} f : S &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto w = f(z) \end{aligned}$$

Nesse caso o conjunto S diz-se *domínio*¹ de definição da função f . Os valores $f(z)$, correspondentes a todos os z em S , constituem um outro conjunto R de números complexos, conhecido como conjunto *imagem* da função f .

Cada uma das seguintes funções

$$f_1(z) = z^3 + 2iz - 3, \quad f_2(z) = |z|, \quad f_3(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (1.1)$$

está definida em qualquer subconjunto do plano complexo, com exceção de f_3 , que está definida em conjuntos que não contenham os pontos $z = \pm i$.

Se u e v são duas funções reais quaisquer das variáveis x e y , então $u + iv$ é uma função de z . Reciprocamente, toda função $f(z)$ tem partes real e imaginária bem definidas, as quais são funções reais de x e y . Se u e v designam tais partes, então $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

¹Evitaremos usar a palavra domínio aqui, pois, esta tem uma definição particular para o que será realizado nos próximos capítulos, especialmente no capítulo 3. Veja a definição B.11.

Por exemplo, se $f(z) = z^2$, temos para $z = x + iy$

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

então

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad e \quad v(x, y) = 2xy.$$

Como outro exemplo, a função

$$f_4(z) = y \int_0^\infty e^{-xt} dt + i \sum_{n=0}^\infty y^n \quad (1.2)$$

está definida na região onde $x > 0$ e $-1 < y < 1$, visto que a integral imprópria existe e a série infinita converge somente quando x e y são assim restritos. Podemos reescrever (1.2) de outra maneira, pois

$$y \int_0^\infty e^{-xt} dt = y \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-xt} dt = y \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-xa}}{-x} - \frac{1}{-x} \right) = \frac{y}{x}, \quad x > 0$$

e

$$\sum_{n=0}^\infty y^n = \frac{1}{1-y}, \quad \text{se } |y| < 1.$$

Portanto

$$f_4(z) = \frac{y}{x} + i \frac{1}{1-y}.$$

Se n é zero ou um inteiro positivo e se $a_0, a_1, \dots, a_n$ são constantes complexas, a função

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

é um *polinômio* em z , de grau n . Observe que a soma aqui tem um número finito de termos. Todo polinômio está definido em qualquer subconjunto do plano complexo. Quocientes de polinômios, $P(z)/Q(z)$, também chamados funções racionais, são definidos para todos os z exceto aqueles para os quais $Q(z) = 0$. A função f_3 em (1.1) é um exemplo. Polinômios e seus quocientes constituem duas classes elementares, mas importantes, de funções de uma variável complexa.

1.2 Transformações

Propriedades de uma função real f , de uma variável real x , são demonstradas geometricamente pelo gráfico da função. Entretanto, quando $w = f(z)$ e as variáveis w e z são complexas, com $w(u, v)$ e $z(x, y)$ não dispomos de tal representação gráfica da função f , uma vez que precisamos de um plano para a representação dos pares de variáveis de $y \times x$ e $v \times u$. Algumas informações sobre a função podem, entretanto, ser obtidas graficamente, exibindo-se conjuntos de pontos correspondentes $z = x + iy$ e $w = u(x, y) + iv(x, y)$. É mais simples, em geral, desenhar dois planos complexos separadamente para as variáveis z e w ; para cada ponto (x, y) no plano- z , subconjunto onde f está definida, existe um ponto (u, v) no plano- w , onde $w = u + iv$.

A correspondência entre pontos nos dois planos se diz *aplicação* ou *transformação* de pontos no plano- z em pontos no plano- w pela função f . Pontos w são, então, imagens de pontos z .

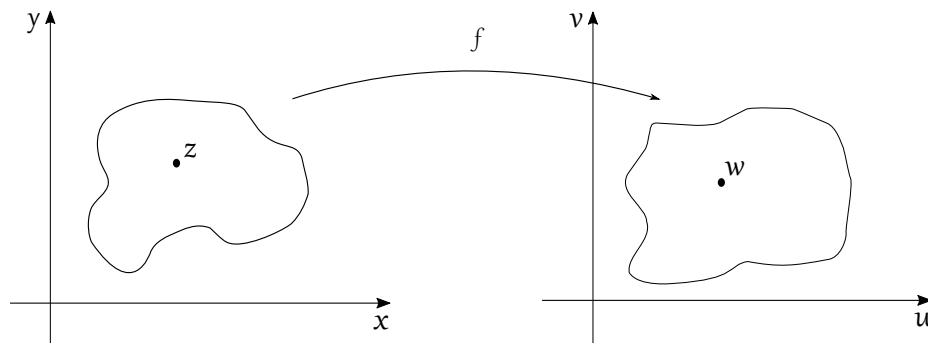


Figura 1.1: Representação de uma transformação.

Exemplo 1.1. Como ilustração, a função

$$f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$$

leva os pontos de cada círculo $x^2 + y^2 = c^2$, onde $c \geq 0$, em alguns pontos da reta $u = c$, pois $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Mas, para se ter todos os pontos z no círculo, y deve assumir todos os valores de $-c$ até c e, como $v = -y$, v varia de c a $-c$. A imagem do círculo, $u = c$, $-c \leq v \leq c$, é o segmento de reta $u = c$ compreendido entre as retas $v = u$ e $v = -u$. Visto que os dois pontos $z = x + iy$ e $z = -x + iy$ têm a mesma imagem w , cada ponto do segmento, exceto as extremidades, é a imagem de dois pontos do círculo.

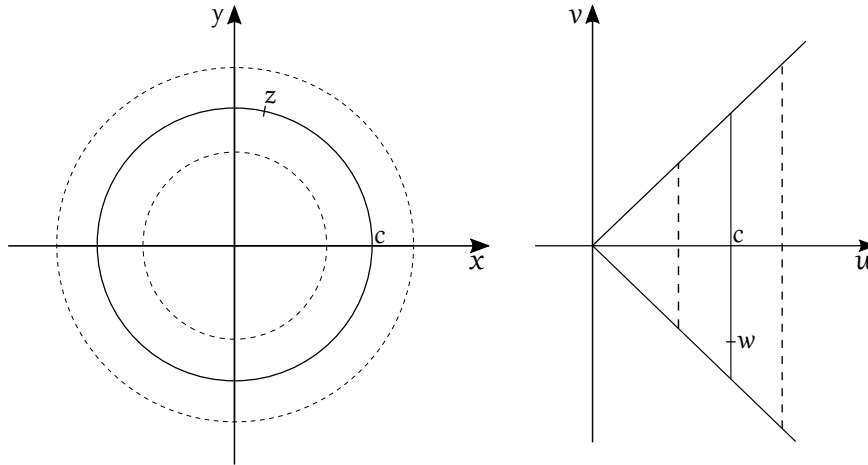


Figura 1.2: Transformação do exemplo 1.1.

1.3 Limites

Seja f uma função definida em todos os pontos de uma vizinhança de um ponto z_0 , exceto, eventualmente, no próprio ponto z_0 . A afirmação de que o limite desta função, quando z tende para z_0 , é um número w_0 ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad (1.3)$$

significa que o valor $f(z)$ da função é arbitrariamente próximo do valor w_0 para todos os pontos z numa vizinhança de z_0 , exceto, eventualmente, para $z = z_0$, quando essa vizinhança se torna suficientemente pequena. Vamos enunciar esta definição de uma forma precisa e utilizável.

Definição 1.1. Dados uma função f e dois números complexos z_0 e w_0 , a afirmação (1.3) significa que, para cada número positivo ε , existe um número positivo δ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Graficamente a definição 1.1 exige que, para cada número positivo ε , exista um certo número positivo δ , tal que todos os pontos z , exceto z_0 , interiores ao círculo $|z - z_0| = \delta$ no plano- z , tenham suas imagens $w = f(z)$ no interior do círculo $|w - w_0| = \varepsilon$ no plano- w , para qualquer $\varepsilon > 0$.

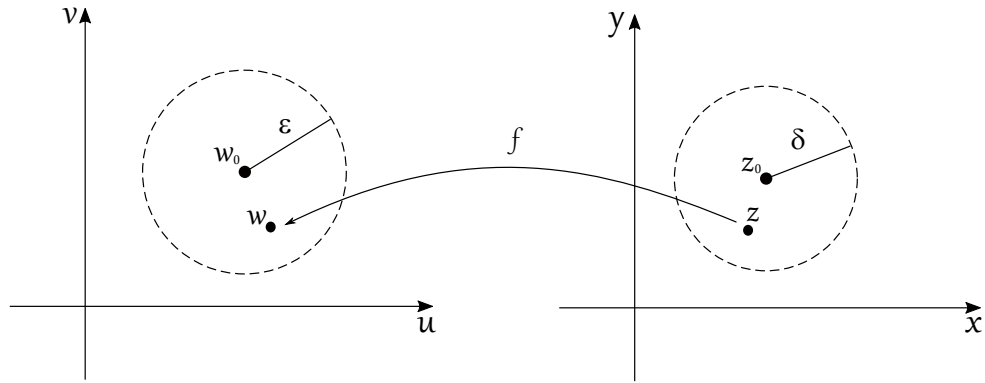


Figura 1.3: Interpretação geométrica da definição 1.1.

Vamos aplicar a definição para provar que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = 2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$\left| \frac{z^2 - 1}{z - 1} - 2 \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |z - 1| < \delta.$$

Notemos que

$$\left| \frac{z^2 - 1}{z - 1} - 2 \right| = \left| \frac{(z + 1)(z - 1)}{z - 1} - 2 \right| = |z + 1 - 2| = |z - 1| < \delta = \varepsilon.$$

Portanto, se tomarmos $\delta = \varepsilon$ teremos

$$\left| \frac{z^2 - 1}{z - 1} - 2 \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |z - 1| < \delta.$$

1.3.1 Teoremas sobre limites

Teorema 1.1. *Sejam $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Então o limite de f existe em z_0 e é igual a $u_0 + iv_0$*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0 \tag{1.4}$$

se, e somente se, os limites das partes real e imaginária de $f(z)$, $u(x, y)$ e $v(x, y)$ respec-

tivamente, existem em (x_0, y_0) e são iguais a u_0 e v_0 respectivamente, ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0. \quad (1.5)$$

Demonstração. Para provar o teorema, primeiramente assumimos que o limite em (1.4) seja verdadeiro. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon$, ou seja,

$$0 < |x - x_0 + i(y - y_0)| < \delta \implies |u - u_0 + i(v - v_0)| < \varepsilon.$$

Como $|u - u_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)|$ e $|v - v_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)|$ (ver apêndice A) e sabendo que $|x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, segue-se da última implicação que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |u - u_0| < \varepsilon \quad e \quad |v - v_0| < \varepsilon.$$

Logo, usando a definição C.1 de limite de funções de duas variáveis

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Reciprocamente, se as condições em (1.5) estão satisfeitas, então usando novamente a definição C.1, para cada $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1 \implies |u - u_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2 \implies |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tem-se

$$0 < |x - x_0 + i(y - y_0)| < \delta \implies |u - u_0 + i(v - v_0)| \leq |u - u_0| + |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0$. □

Teorema 1.2. *Sejam f e g funções cujos limites existem em z_0 :*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_2.$$

Então

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + g(z) = w_1 + w_2;$$

$$(ii) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = w_1w_2;$$

$$(iii) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2}, \text{ se } w_2 \neq 0.$$

Demonstração. Ver [1], p. 44. □

1.4 Continuidade

Definição 1.2. Dizemos que uma função f de variável complexa z é contínua em z_0 se dado $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{então} \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Diremos simplesmente que uma função é contínua se esta for contínua em todos os pontos de $\mathbb{C}$.

Proposição 1.3. Uma função de variável complexa f , dada por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, é contínua em z_0 se, e somente se u e v são contínuas em (x_0, y_0) .

Demonstração. Primeiramente, supomos que f seja contínua, ou seja,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

do teorema 1.1 temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0,$$

ou seja, u e v são contínuas em (x_0, y_0) .

Agora, supondo que u e v são contínuas em (x_0, y_0) , temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0,$$

daí, pelo teorema 1.1 temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0)$$

concluimos que f é contínua em z_0 . □

Proposição 1.4. Se $g : A \rightarrow B$ é contínua em $z_0 \in A$ e se $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua no ponto $g(z_0) \in B$, então a função composta $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua no ponto z_0 .

Demonstração. Ver [7], p. 38. □

1.5 A derivada

Tudo o que foi visto até aqui, todas as definições e teoremas, são bem semelhantes ao estudo de funções de variáveis reais. Aqui começaremos a ver algumas diferenças entre funções de variável real e funções de variável complexa. Veremos que trabalhar com funções holomorfas nos dá muito mais consequências do que considerar funções que sejam apenas deriváveis. Então passemos à definição.

Definição 1.3. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto², z_0 um ponto de A e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Se existir o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

esse é chamado a derivada de $f(z)$ no ponto z_0 e denotada por $f'(z_0)$.

Exemplo 1.2. Se $f(z) = z^2$ então $f'(z_0) = 2z_0$, para qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

De fato, o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Logo, $f'(z_0) = 2z_0$.

Proposição 1.5. Se f é derivável em z_0 , então é contínua neste ponto.

Demonstração. Quando $f'(z_0)$ existe, temos, pelo item (ii) do teorema 1.2 e a definição 1.3 de derivada que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

²Ver definição B.1 no apêndice B.

Segue daí que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Assim, f é necessariamente contínua em todo ponto z_0 onde sua derivada existe. $\square$

1.6 Fórmulas de derivação

As fórmulas básicas de derivação abaixo podem ser deduzidas da definição 1.3 de derivada e dos teoremas sobre limites exatamente como no caso de variáveis reais.

Proposição 1.6. Seja $c \in \mathbb{C}$. Se f e g são deriváveis em z_0 , então

$$(i) \quad (cf)'(z_0) = cf'(z_0)$$

$$(ii) \quad (f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(iii) \quad (fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0)$$

$$(iv) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

Demonstração. Ver [7], p. 40. $\square$

1.7 As condições de Cauchy-Riemann

Nesta seção, veremos as condições de Cauchy-Riemann, um resultado muito importante para funções deriváveis de variável complexa, pois com essas equações é possível obter uma fórmula para a derivada de uma função de variável complexa. Veremos também quais condições, aliadas às equações de Cauchy-Riemann, garantem a derivabilidade de uma função de variável complexa.

Suponha que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $z = x + iy$, tenha derivada no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, $f'(z_0) = a + ib$. Pela definição 1.3 temos

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a + ib.$$

Temos também que

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(u(x, y) + iv(x, y)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)}. \quad (1.6)$$

Como existe a derivada em z_0 , podemos nos aproximar desse ponto por qualquer direção. Faremos a aproximação ao ponto z_0 , horizontal e verticalmente.

Aproximando do ponto z_0 , horizontalmente, temos $y = y_0$. A igualdade em (1.6) fica

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(u(x, y_0) + iv(x, y_0)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} \\ &= \frac{(u(x, y_0) - u(x_0, y_0)) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Quando $z \rightarrow z_0$, o lado esquerdo tende a $f'(z_0)$ e pelo teorema 1.1 o lado direito tende para

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad b = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (1.7)$$

Agora, aproximando do ponto z_0 , verticalmente, temos $x = x_0$ e a igualdade em (1.6) fica

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(u(x_0, y) + iv(x_0, y)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} \\ &= \frac{(u(x_0, y) - u(x_0, y_0)) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} \\ &= \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}.\end{aligned}$$

Quando $z \rightarrow z_0$, o lado esquerdo tende a $f'(z_0)$ e pelo teorema 1.1 o lado direito tende para

$$a = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad b = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (1.8)$$

Portanto, por (1.7) e (1.8) obtemos as equações

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (1.9)$$

Essas equações são conhecidas como as *condições de Cauchy-Riemann*. Assim, quando $f'(z_0)$ existe, podemos escrevê-la na seguinte forma

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Com isso, acabamos de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.7 (Condições Necessárias). *Se a função $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ tem derivada no ponto $z_0 = x_0 + i y_0$ então*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

e sua derivada é dada pela fórmula

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Exemplo 1.3. Consideremos a função $f(z) = z^2$. Vimos no exemplo 1.2 que sua derivada existe para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ e é dada por $f'(z_0) = 2z_0$. Assim, as condições de Cauchy-Riemann (1.9) devem ser satisfeitas em todos os pontos $z \in \mathbb{C}$. Lembremos que $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$, logo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

E portanto

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

O teorema 1.7 apresenta condições necessárias para a existência de $f'(z)$. Agora, veremos quais condições sobre u e v que garantem a existência da derivada $f'(z)$.

Teorema 1.8 (Condições Suficientes). *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ aberto, $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, uma função complexa tal que as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ existem em A e são contínuas no ponto $z_0 = x_0 + i y_0 \in A$. Se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas no ponto z_0 , então f é derivável em z_0 .*

Demonstração. Como u e v e suas derivadas parciais são contínuas em $z_0 = (x_0, y_0)$, todas elas são definidas numa certa vizinhança desse ponto. Quando $(x_0 + h, y_0 + k)$ é um ponto dessa vizinhança, pela definição C.2, podemos escrever

$$u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)k + E_1(h, k)$$

e

$$v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)k + E_2(h, k)$$

onde $E_1(h, k)$ e $E_2(h, k)$ tendem a zero quando z tende a z_0 . Portanto, fazendo $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$ e $E(h, k) = E_1(h, k) + i E_2(h, k)$, temos

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= [u(x, y) + iv(x, y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] \\ &= [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)] \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)k + E_1(h, k) \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)k + E_2(h, k) \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) h + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) k + E(h, k). \end{aligned}$$

Por hipótese as condições de Cauchy-Riemann (1.9) estão satisfeitas no ponto (x_0, y_0) e portanto, temos

$$f(z) - f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) (h + ik) + E(h, k).$$

Agora, dividindo por $w = z - z_0 = [(x_0 + h) + i(y_0 + k)] - (x_0 + iy_0) = h + ik$, temos

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) + \frac{E(h, k)}{h + ik}$$

e fazendo $z \rightarrow z_0$ ($w \rightarrow 0$)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{h + ik}.$$

Resta mostrar que $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{h + ik} = 0$. Como $E(h, k) = E_1(h, k) + iE_2(h, k)$, então

$$\begin{aligned} \frac{E(h, k)}{h + ik} &= \frac{E_1(h, k) + iE_2(h, k)}{h + ik} \\ &= \left(\frac{E_1(h, k) + iE_2(h, k)}{h + ik} \right) \left(\frac{h - ik}{h - ik} \right) \\ &= \frac{1}{|w|^2} [(hE_1(h, k) + kE_2(h, k)) + i(hE_2(h, k) - kE_1(h, k))]. \end{aligned}$$

Pelo teorema 1.1 basta mostrar que a parte real e a parte imaginária de $\frac{E(h, k)}{h + ik}$ tendem a zero quando $w \rightarrow 0$. Como $E_1(h, k)$ e $E_2(h, k)$ tendem a zero quando $w \rightarrow 0$, logo

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (hE_1(h, k) + kE_2(h, k)) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (hE_2(h, k) - kE_1(h, k)) = 0.$$

O que implica que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{h+ik} = 0.$$

Portanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

ou seja, a derivada $f'(z_0)$ existe e é igual a

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De maneira análoga mostramos que

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

□

Exemplo 1.4. A função $f(z) = |z|^2$ é contínua em todo ponto. Mostremos que sua derivada existe somente no ponto $z = 0$.

De fato, o teorema 1.8 nos diz que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Logo, como as derivadas parciais são contínuas e as condições de Cauchy-Riemann valem apenas quando $x = 0 = y$, temos $f'(0) = 0$.

1.8 Funções Holomorfas

A seguir, veremos a sutil diferença entre a definição de funções deriváveis para funções holomorfas. Estas últimas, serão as funções que trabalharemos nos capítulos posteriores. Considerar funções holomorfas nos dão resultados fascinantes, que não veremos nesta seção, mas sim no capítulo 3, na teoria de integral. Os resultados que veremos não estão presentes nas funções de variável real, é isso que torna a teoria das funções holomorfas "poderosa".

Definição 1.4. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, com $A \subset \mathbb{C}$ aberto, uma função complexa. Dizemos que f é holomorfa em um ponto $z_0 \in A$, se sua derivada $f'(z)$ existe não só em z_0 como

também em todo ponto z de uma vizinhança de z_0 . f é holomorfa em A , se for holomorfa em todos os pontos $z \in A$.

Com isso, vemos que uma função holomorfa é mais do que ser diferenciável.

Proposição 1.9. Se $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $h : B \rightarrow A$, com $A, B \subset \mathbb{C}$, são funções holomorfas, então as seguintes funções também são holomorfas:

- (i) $f + g$
- (ii) $f \cdot g$
- (iii) $\frac{f}{g}$, em todos os pontos onde g não se anula.
- (iv) $f \circ h$.

Demonstração. Veja [6], p.111. □

Exemplo 1.5. O polinômio

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0,$$

é holomorfo em todo plano $\mathbb{C}$. Para ver isso, basta mostrar que um monômio $f(z) = z^n$ é holomorfo e utilizar a proposição 1.5. Denotando por Z_n a seguinte soma

$$Z_n = z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}. \quad (1.10)$$

Multiplicando (1.10) por z e outra vez por z_0 obtemos as igualdades

$$Z_n z = z^n + z^{n-1} z_0 + \cdots + z^2 z_0^{n-2} + z z_0^{n-1}. \quad (1.11)$$

$$Z_n z_0 = z^{n-1} z_0 + z^{n-2} z_0^2 + \cdots + z z_0^{n-1} + z_0^n. \quad (1.12)$$

Subtraindo (1.11) e (1.12), obtemos

$$Z_n(z - z_0) = z^n - z_0^n$$

e se $z \neq z_0$ temos

$$Z_n = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \quad (1.13)$$

E de (1.10) e (1.13) obtemos a igualdade

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}.$$

Além disso, $f(z) = z^n$ é continua em todo plano, logo

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = n z_0^{n-1}$$

e concluímos que $f'(z) = n z^{n-1}$ qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$. Daí vem que

$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + 2 a_2 z + a_1.$$

Uma função complexa f , definida em todo $\mathbb{C}$ e que é holomorfa em $\mathbb{C}$ é chamada função *inteira*.

Definição 1.5. Um ponto singular de uma função complexa f (*ou singularidade de f*) é um ponto z_0 tal que existe um disco $D(z_0, r)$ no qual f é holomorfa exceto no ponto z_0 .

Exemplo 1.6. A função $f(z) = \frac{1}{z}$ está definida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = 0$ é uma singularidade de f . De fato, temos

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

e sua derivada não está definida para $z = 0$.

1.9 Funções Elementares

Nesta seção, estudaremos brevemente algumas funções conhecidas do cálculo de funções de variável real, a exponencial e a logarítmica. Veremos que são funções holomorfas e notaremos na forma como estão definidas, que essas funções possuem algumas propriedades ausentes nas funções exponenciais e logarítmicas de variável real

1.9.1 A Exponencial

Definição 1.6. A função exponencial complexa é definida por

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Mostremos que $\exp(z)$ é uma função inteira. Primeiramente observe que $\exp(z)$ está definida para todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso suas componentes são

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

e temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

e se cumprem as condições de Cauchy-Riemann (1.9). Da continuidade dessas derivadas parciais concluímos, pelo teorema 1.8, que $\exp(z)$ é holomorfa em todo $\mathbb{C}$ e, portanto, é uma função inteira. Além disso, sua derivada é dada por

$$\exp'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = \exp(z).$$

Apresentemos agora algumas propriedades da exponencial complexa:

- (i) $\exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$
- (ii) $\frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \exp(z_1 - z_2)$
- (iii) $\exp(z)^n = \exp(nz), \forall n \in \mathbb{Z}$
- (iv) $\exp(z)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{z + 2\pi i k}{n}\right)$ para $1 \leq k \leq n$
- (v) $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$ (*propriedade de periodicidade*).

Para a demonstração das propriedades acima, veja [7], p. 49.

1.9.2 O Logaritmo

No caso real, a função logaritmo é a inversa da função exponencial, isto é, um número real y é o logaritmo do número real positivo x , $\log(x) = y$, se, e somente se, $e^y = x$. No caso complexo temos um problema pois a exponencial complexa é periódica. Assim sendo, é preciso certa cautela para invertê-la pois não é possível obter uma única função f satisfazendo

$$\exp(f(z)) = z \tag{1.14}$$

porque, dada uma função f , para a função $g(z) = f(z) + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, também vale que

$$\exp(g(z)) = \exp(f(z) + 2\pi ik) = \exp(f(z)) \exp(2\pi ik) = \exp(f(z)).$$

Definição 1.7. Definimos a função chamada um ramo do logaritmo

$$\log : D_\phi \longrightarrow \mathbb{C}$$

por

$$\log z = \log |z| + i \arg_\phi z.$$

O ramo do logaritmo definido no domínio D_0 , obtido retirando-se de $\mathbb{C}$ o semi-eixo $(x, 0)$, $x \leq 0$, é chamado de *ramo principal*.

Temos que $D_0 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, onde $U_1 = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $U_2 = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ e $U_3 = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) < 0\}$, conforme a figura 1.4.

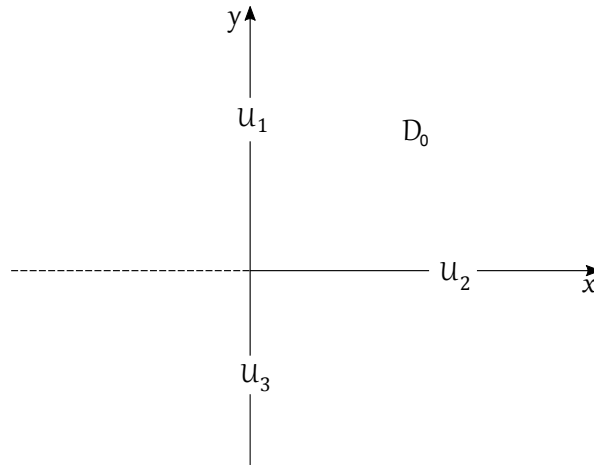


Figura 1.4: Domínio D_0 do ramo principal do $\log z$

Para o ramo principal temos $-\pi < \arg_0 z < \pi$ e afirmamos que $\arg_0$ é uma função contínua em D_0 .

O ramo principal do logaritmo é uma função contínua em D_0 . Vamos mostrar que ela é holomorfa nesse domínio. Dado $z_0 \in D_0$, seja $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = z_0$. Então

$$\log'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0}.$$

Agora, fazendo $w = \log z$, temos que, se $z \rightarrow z_0$ então $w \rightarrow w_0$, pois o ramo

principal do logaritmo é uma função contínua. Daí temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{1}{\frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0}}.$$

Como $\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0} = \exp'(w_0) = e^{w_0} = z_0$, temos que $\log' z_0 = \frac{1}{z_0}$. Portanto

$$\log'(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{qualquer que seja } z \in D_0.$$

O mesmo argumento utilizado acima mostra que o ramo de $\log$ definido em D_ϕ é holomorfo, qualquer que seja ϕ .

Capítulo 2

Sequências e Séries de Números Complexos

2.1 Sequências

Definição 2.1. Uma sequência de números complexos é uma função definida do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$,

$$z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

O número complexo $z(n)$ é chamado o n -ésimo termo ou termo geral da sequência.

Dessa maneira a sequência fica expressa através do conjunto imagem de z , $\{z(n); n \in \mathbb{N}\}$. Para simplificar a notação, escreveremos z_n ao invés de $z(n)$.

Exemplo 2.1. Exemplos de sequências:

1. uma sequência constante $z, z, z, \dots$ dada pela função constante $z_n = z$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.
2. os termos de uma progressão aritmética $a, a + r, a + 2r, \dots, a + nr, \dots$ constituem uma sequência cujo termo geral é $z_n = a + nr$.
3. a sequência formada pelos números primos $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11, \dots$. Esse exemplo ilustra o fato de que muitas vezes uma sequência, apesar de perfeitamente definida, não podemos ter seu termo geral explicitado, já que é impossível obter uma fórmula para esses números.

Dizemos que (z_n) é limitada se podemos encontrar um número real $k > 0$ tal que $|z_n| \leq k$. Isso quer dizer que todos os pontos z_n estão contidos no disco $D(0, k)$, de centro zero e raio k . (z_n) é dita ilimitada, caso contrário.

Definição 2.2. Um número complexo z é limite da sequência (z_n) se dado qualquer número positivo ε , é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n \geq n_0$ então $|z_n - z| < \varepsilon$.

Exemplo 2.2. Exemplos de sequências convergentes:

1. a sequência constante $z_n = z$ converge a z .
2. a sequência $z_n = 1 + \frac{i}{n}$, $n \geq 1$ converge a 1.
3. a sequência $z_n = \frac{1+i}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ converge a zero. De fato, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2}$. Então $n > n_0 \implies \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon^2}{2} \implies \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Mas $\left| \frac{1+i}{\sqrt{n}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, ou seja, $n > n_0 \implies \left| \frac{1+i}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$.

A sequência (z_n) de números complexos pode ser escrita na forma $z_n = x_n + iy_n$, onde (x_n) e (y_n) são sequências de números reais.

Uma sequência que não possui limite é chamada divergente.

Exemplo 2.3. Exemplos de sequências divergentes:

1. a sequência $z_n = (-1)^n$. De fato, nenhum número complexo z pode ser limite de z_n , pois, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z| < \frac{1}{2}$. Isso nos diz que o disco $D(z, \frac{1}{2})$ não pode conter 1 e -1 simultaneamente.
2. a sequência $z_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ também diverge, pois do mesmo modo, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, teremos $|z_n - z| \geq \frac{1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e qualquer número complexo z .

Proposição 2.1. A sequência (z_n) converge para $z = x + iy$ se, e somente se $(x_n) \longrightarrow x$ e $(y_n) \longrightarrow y$.

Demonstração. ($\implies$) Supondo que $\lim z_n = z$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$

$$|z_n - z| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon$$

mas

$$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| \quad \text{e} \quad |y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)|$$

e isso significa que

$$n > n_0 \implies |x_n - x| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |y_n - y| < \varepsilon.$$

Portanto $(x_n) \longrightarrow x$ e $(y_n) \longrightarrow y$.

($\Leftarrow$) Agora supondo que $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$, ou seja, se dado $\varepsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \implies |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n > n_2 \implies |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que se $n > n_0$ então

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto $\lim z_n = z$. □

Sequências convergentes satisfazem o seguinte.

Proposição 2.2. Sejam (z_n) e (w_n) sequências de números complexos satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \beta$. Então

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} cz_n = c\alpha$, onde $c \in \mathbb{C}$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \alpha + \beta$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = \alpha\beta$.

(vi) se $\alpha \neq 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{\alpha}$.

Demonstração. Ver [7], p. 62. □

Teorema 2.3 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números complexos possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Ver [5], p. 36. □

O critério mais importante e útil para decidir se uma sequência é convergente ou não é o chamado Princípio Geral da Convergência ou Princípio de Cauchy, que diz o seguinte:

Teorema 2.4 (Critério de Cauchy). *Dizemos que uma sequência (z_n) de números complexos converge se, e somente se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que.*

$$n, m \geq n_0 \implies |z_m - z_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demonstração. ($\implies$) Seja (z_n) uma sequência convergente. Mostremos que (z_n) é de Cauchy. Digamos que $(z_n) \longrightarrow a$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se $m, n \geq n_0$ então

$$|z_n - z_m| = |z_n - a + a - z_m| \leq |z_n - a| + |a - z_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto (z_n) é de Cauchy.

($\impliedby$) Se (z_n) é de Cauchy, mostraremos que é convergente. Primeiro mostremos que (z_n) é limitada. De fato, tomando $\varepsilon = 1$ encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ então $|z_n - z_m| < 1$, daí se $n \geq n_0$ $|z_n| - |z_{n_0}| < 1 \implies |z_n| < 1 + |z_{n_0}|$. Agora tomando $K = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n_0-1}|, |z_{n_0}|, 1 + |z_{n_0}|\}$, temos $|z_n| \leq K$, logo (z_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass 2.3, (z_n) possui uma subsequência (z_{n_k}) convergente. Digamos que $z_{n_k} \longrightarrow z$. Agora precisamos mostrar que (z_n) converge a z . Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ temos $|z_n - z_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. E como (z_{n_k}) converge para z temos que existe $n_1 \geq n_0$ tal que $|z_{n_1} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para $n \geq n_0$, temos

$$|z_n - z| = |z_n - z_{n_1} + z_{n_1} - z| \leq |z_n - z_{n_1}| + |z_{n_1} - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto (z_n) converge a z . □

Por conta desse resultado, dizemos que $\mathbb{C}$ é *completo*.

2.2 Séries de Números Complexos

Dada uma sequência (z_n) , podemos associar a ela uma nova sequência (s_n) , chamada de sequência das somas parciais de (z_n) e definida recursivamente por

$$\begin{aligned} s_0 &= z_0 \\ s_1 &= s_0 + z_1 = (z_0) + z_1 \\ s_2 &= s_1 + z_2 = (z_0 + z_1) + z_2 \\ &\vdots \\ s_n &= s_{n-1} + z_n = (z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1}) + z_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que $s_n = \sum_{i=0}^n z_i$ e que $z_n = s_n - s_{n-1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Temos então:

Definição 2.3. Uma série numérica é a sequência (s_n) gerada por uma sequência (z_n) de números complexos. A série gerada por (z_n) é denotada por $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Se a sequência (s_n) converge a $s \in \mathbb{C}$, dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge e que sua soma é o número s . Se (s_n) diverge dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.

Vejamos alguns resultados importantes no estudo de séries numéricas:

Teorema 2.5. *Escrevendo, $z_n = x_n + iy_n$, temos que a série numérica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n)$$

converge se, e somente se, as séries de números reais $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergem

Demonstração. ($\implies$) Para $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_n = (x_0 + x_1 + \cdots + x_n) + i(y_0 + y_1 + \cdots + y_n).$$

Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n z_i = a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Pela proposição 2.1 segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n y_i = b$, que são as somas das séries $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, respectivamente. Portanto $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergem.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n x_i = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n y_i = b$, então, pela proposição 2.1 segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n z_i = a + ib$, portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n = a + ib.$$

□

Proposição 2.6. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ uma série de números complexos. Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge então a sequência (z_n) converge a 0.

Demonstração. Pelo critério de Cauchy 2.4 temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n - s_{n-1}| = 0$$

Concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

□

Definição 2.4. A série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$, gerada por $(|z_n|)$, for convergente.

Proposição 2.7. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente, então ela é convergente.

Demonstração. Seja $s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$ a n-ésima soma parcial de $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Observe que da desigualdade triangular A.2, tem-se

$$|s_{m+p} - s_m| \leq |z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \cdots + |z_{m+p}|$$

para quaisquer $m, p \in \mathbb{N}$

Notemos também, que a n-ésima soma parcial de $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ é dada por $s'_n = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$ e, portanto

$$|s'_{m+p} - s'_m| = |z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \cdots + |z_{m+p}|$$

daí,

$$|s_{m+p} - s_m| \leq |s'_{m+p} - s'_m| \quad \forall m, p \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Por hipótese, a série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge. Então pelo Critério de Cauchy 2.4, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq n_0 \implies |s'_{m+p} - s'_m| < \varepsilon.$$

De (2.1) temos

$$|s_{m+p} - s_m| < \varepsilon.$$

Portanto, concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é convergente. $\square$

O critério mais elementar de convergência de séries numéricas envolve séries de números reais não negativos e é dado pelo:

Teorema 2.8 (Critério da Comparação). *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ séries de números complexos tais que $|z_n| \geq |w_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

(i) *$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ também converge*

(ii) *Se $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ também diverge.*

Demonstração. (i) Sejam $s'_n = |z_0| + \cdots + |z_n|$ e $s''_n = w_0 + \cdots + w_n$ as somas parciais de $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ respectivamente. Da desigualdade triangular A.2 temos

$$|s''_{m+p} - s''_m| = |w_{m+1} + \cdots + w_{m+p}| \leq |w_{m+1}| + \cdots + |w_{m+p}|$$

para quaisquer $m, p \in \mathbb{N}$.

Como $|w_m| \leq |z_m|$ para todo $m \in \mathbb{N}$ temos

$$|w_{m+1}| + |w_{m+2}| + \cdots + |w_{m+p}| \leq |z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \cdots + |z_{m+p}|.$$

Logo

$$|s''_{m+p} - s''_m| \leq |s'_{m+p} - s'_m|. \quad (2.2)$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge, aplicando novamente o critério de Cauchy 2.4. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq n_0 \implies |s'_{m+p} - s'_m| < \varepsilon.$$

De (2.2) obtemos

$$|s''_{m+p} - s''_m| < \varepsilon.$$

Portanto, concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ converge. $\square$

Proposição 2.9. Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ duas séries convergentes com $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \alpha$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \beta$. Então as séries $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$, com $c \in \mathbb{C}$ um número qualquer e $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$ são ambas convergentes e valem $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n = c\alpha$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = \alpha + \beta$.

Demonstração. Lembremos que a série gerada por uma sequência é a sequência de somas parciais desta. Logo, se s_n e s'_n denotam as sequências de somas parciais de (z_n) e (w_n) respectivamente, então, usando a proposição 2.2 temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} cz_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + s'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \alpha + \beta.$$

$\square$

2.2.1 A série Geométrica

A série gerada pela sequência dos termos de uma progressão geométrica é chamada uma série geométrica e desempenha um papel fundamental no estudo da convergência de séries. Seja $r > 0$ um número real e considere a sequência $z_n = r^n$. A série gerada por essa sequência é dada por $s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$. É claro que se $r \geq 1$ então a sequência s_n diverge. Por outro lado, sabemos que para $r \neq 1$

$$s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Agora, se $0 < r < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$. De fato, $r^{n+1} = e^{(n+1) \log r}$ e já que $0 < r < 1$, seu logaritmo é um número negativo, $\log r < 0$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = e^{(n+1) \log r} = 0$. Daí vem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} \quad \text{para } 0 < r < 1 \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad \text{diverge para } r \geq 1.$$

2.3 Séries de Potências

Definição 2.5. Dada uma sequência $(a_n z^n)$, a série gerada pela soma de seus termos é chamada uma série de potências de centro em 0 e denotada por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Proposição 2.10. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências.

(i) Suponha que exista um número complexo $z_1 \neq 0$ para o qual a série converge, isto é,

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z_1)$ existe. Então a série converge absolutamente qualquer que seja o número z satisfazendo $|z| < |z_1|$.

(ii) Suponha que exista um número complexo $z_2 \neq 0$ para o qual a série diverge, isto é,

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z_2)$ não existe. Então a série diverge qualquer que seja o número z satisfazendo $|z| > |z_2|$.

Demonstração. (i) Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge, temos que a sequência numérica $(a_n z_1^n)$ converge a 0. Ela é portanto limitada e existe $k > 0$ tal que $|a_n z_1^n| < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja agora z um número complexo satisfazendo $|z| < |z_1|$. Ponha $r = \frac{|z|}{|z_1|}$. Então $r < 1$ e ficamos com

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n = |a_n| |z_1|^n \left(\frac{|z|}{|z_1|} \right)^n = |a_n| |z_1|^n r^n < k r^n.$$

A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} k r^n$ converge a $\frac{k}{1-r}$. Pelo critério da comparação 2.8 a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge e portanto é absolutamente convergente.

(ii) Suponha, por contradição, que exista um número z satisfazendo $|z| > |z_2|$ e tal que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge. Repetindo a demonstração de (i) concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ converge absolutamente, contrariando a hipótese. Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge para qualquer que seja z com $|z| > |z_2|$. $\square$

Essa proposição nos diz que, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge no ponto z_1 , então essa série converge em todos os pontos do disco aberto $D(0, |z_1|)$, de centro em 0 e raio $|z_1|$. Assim sendo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ define uma função $f : D(0, |z_1|) \rightarrow \mathbb{C}$ através da expressão $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Por outro lado, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge em z_2 então ela diverge em todos os pontos fora do disco fechado $\overline{D}(0, |z_2|)$ de centro em 0 e raio $|z_2|$. Vemos isso geometricamente na figura 2.1.

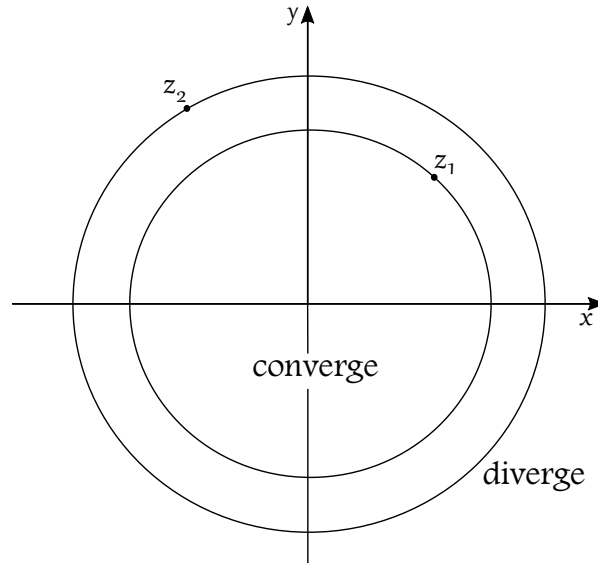


Figura 2.1: Representação geométrica da proposição 2.9.

Esses fatos nos levam ao conceito mais importante no estudo das séries de potências, o de raio de convergência.

Lema 2.11. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências onde $a_n \in \mathbb{C}$. Defina R por

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{se } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0 \\ \infty & \text{se } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Então,

- (i) a série converge absolutamente qualquer que seja z satisfazendo $|z| < R$;
- (ii) a série diverge se z satisfaz $|z| > R$

A prova deste lema pode ser encontrada em [7], p. 90.

2.3.1 Funções Analíticas

Veremos nesta seção o conceito fundamental de funções que são representadas através de séries de potências. E provaremos um resultado que estabelece uma primeira conexão entre funções analíticas e funções holomorfas.

Definição 2.6. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é analítica em U se, para todo ponto $z_0 \in U$, f se expressa como uma série de potências de centro z_0 com raio de convergência $R > 0$.

Em outras palavras, f é analítica em U se, dado $z_0 \in U$ temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

e essa série converge absolutamente num disco $D(z_0, R) \subset U$.

Antes de passarmos para o próximo resultado, provemos o seguinte lema.

Lema 2.12. Seja $0 \leq r < 1$. então a série

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$$

converge para $\frac{1}{(1-r)^2}$.

Demonstração. Vamos argumentar por indução. Inicialmente mostraremos que

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1} = \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2}. \quad (2.3)$$

A afirmativa é verdadeira para $n = 1$ pois

$$1 = \frac{r^2 - 2r + 1}{(1-r)^2}.$$

Suponha que a afirmativa valha para n . Então

$$1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} + (n+1)r^n = \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2} + (n+1)r^n. \quad (2.4)$$

Trabalhando o lado direito da igualdade (2.4) temos

$$\begin{aligned} & \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2} + (n+1)r^n \\ = & \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1 + (n+1)r^n(1-2r+r^2)}{(1-r)^2} \\ = & \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1 + (n+1)r^n - 2(n+1)r^{n+1} + (n+1)r^{n+2}}{(1-r)^2} \\ = & \frac{(n+1)r^{n+2} - (2n+2-n)r^{n+1} + 1}{(1-r)^2} \\ = & \frac{(n+1)r^{n+2} - (n+2)r^{n+1} + 1}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

e concluímos que (2.3) é verdadeira. Agora, observe que (2.3) descreve a sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$ e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(1-r)^2} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

pois $r < 1$. □

Teorema 2.13. *Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma função analítica com raio de convergência $R > 0$. Então*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$$

converge absolutamente para $|z| < R$.

Demonstração. Dado um número z verificando $|z| < R$, escolha um número α satisfazendo $|z| < \alpha < R$. Como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente para $|z| < R$, a sequência $|a_n \alpha^n|$ é limitada e podemos achar $k > 0$ tal que

$$|a_n \alpha^n| = |a_n| \alpha^n < k \implies |a_n| < \frac{k}{\alpha^n}$$

para todo n . Por outro lado

$$|na_n z^{n-1}| = n|a_n| \left| \frac{z}{\alpha} \right|^{n-1} \alpha^{n-1} < n \frac{k}{\alpha^n} \left| \frac{z}{\alpha} \right|^{n-1} \alpha^{n-1} = n \frac{k}{\alpha} \left| \frac{z}{\alpha} \right|^{n-1}.$$

Ponha $\left| \frac{z}{\alpha} \right| = r$ e fique com

$$|na_n z^{n-1}| < n \frac{k}{\alpha} r^{n-1}.$$

Temos então que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n z^{n-1}| \leq \frac{k}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$$

e como $r < 1$, pelo lema 2.12 esta última série é convergente, e pelo critério da comparação 2.8 a série $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ converge. □

O próximo teorema nos diz que toda função analítica é holomorfa no seu disco de convergência.

Teorema 2.14. *Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma função analítica com raio de convergência $R > 0$. Então*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

para todo z tal que $|z| < R$.

Demonstração. O teorema anterior nos dá que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

é absolutamente convergente para $|z| < R$. Nos resta mostrar que $f'(z) = g(z)$. Escolha um z_0 verificando $|z_0| < R$. Como, pela proposição 2.9, as séries podem ser manipuladas termo a termo temos

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n a_n z_0^{n-1} \right)$$

e lembrando que, se $z \neq z_0$ (ver exemplo 1.5 do capítulo 1)

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1} \quad (2.5)$$

ficamos com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n a_n z_0^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}).$$

Agora, tome z verificando $z \neq z_0$ e $|z| < R$. Então, já que $|z_0| < R$ podemos escolher r tal que $R > r > \begin{cases} |z_0| \\ |z| \end{cases}$ e

$$|a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1})| < 2n |a_n| r^{n-1}.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1})| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge para $|z| < R$, usando o critério da comparação 2.8, con-

cluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1})$$

também converge, pois $r < R$. Considere a sequência de somas parciais dessa série

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^N a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1})$$

e escreva

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1})$$

Temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) = F(z).$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar n_0 tal que

$$N \geq n_0 \implies |F(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.6)$$

Por outro lado, $S_N(z)$ é um polinômio em z , ou seja, é uma função contínua em z_0 e também podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.7)$$

Temos também que $S_N(z_0) = 0$, pois

$$\begin{aligned} S_N(z) &= \sum_{n=1}^N a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1}) \\ &= a_1(1 - z_0^0) + a_2(z + z_0 - 2z_0) + \cdots + a_N(z^{N-1} + z^{N-2}z_0 + \cdots + z_0^{N-1} - Nz_0^{N-1}). \end{aligned}$$

E para $z = z_0$, temos

$$S_N(z_0) = a_1(1 - 1) + a_2(2z_0 - 2z_0) + \cdots + a_N(Nz_0^{N-1} - Nz_0^{N-1}) = 0.$$

De (2.6) e (2.7) vem que

$$|F(z)| = |F(z) - S_N(z) + S_N(z)| \leq |F(z) - S_N(z)| + |S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $N \geq n_0$ e $0 < |z - z_0| < \delta$. Mas isto é o mesmo que dizer que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = 0$$

e como

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0)$$

ficamos com

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$$

e o teorema está demonstrado. $\square$

Uma pergunta natural, seria: será que toda função holomorfa é analítica? Ou seja, vale a recíproca do teorema demonstrado? A resposta a essa pergunta é positiva e será vista no próximo capítulo.

2.3.2 Zeros de funções analíticas

Definição 2.7. Uma função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ tem um zero de multiplicidade k em z_0 se $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ e $a_k \neq 0$.

Proposição 2.15. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em U , com raio de convergência $R > 0$, não identicamente nula. Dizemos que z_0 é zero de multiplicidade k de f se, e somente se, existe uma função g analítica em $D(z_0, R)$ tal que $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ e $g(z_0) \neq 0$.

Demonstração. Seja f uma função analítica de centro em z_0 , dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \quad (2.8)$$

Suponhamos que z_0 seja zero de multiplicidade k de f , então pela definição 2.7, temos

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0 \quad \text{e} \quad a_k \neq 0.$$

Então escrevemos (2.8) da seguinte forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^{n+k}.$$

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^n = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots + a_{k+n}(z - z_0)^n + \cdots \quad (2.9)$$

tem raio de convergência R . De fato, denote por $S_n(z)$ as somas parciais de (2.8) e por $s_n(z)$ as somas parciais de (2.9).

Então

$$\begin{aligned} S_{n+k}(z) &= a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + a_{k+2}(z - z_0)^{k+2} + \cdots + a_{k+n}(z - z_0)^{k+n} \\ &= (z - z_0)^k(a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots + a_{k+n}(z - z_0)^n) \\ &= (z - z_0)^k s_n(z) \end{aligned}$$

e para $|z - z_0| < R$, $S_n(z)$ converge se, e somente se $s_n(z)$ converge.

Portanto, colocando

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^n$$

temos

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+k}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z - z_0)^k s_n(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

Concluimos que existe uma função g analítica em $D(z_0, R)$ tal que $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ e $g(z_0) = a_k \neq 0$.

Reciprocamente, suponhamos que exista uma função analítica g em $D(z_0, R)$ tal que $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ e $g(z_0) \neq 0$, para $z \in U$. A representação de g em série de potências com centro em $z_0 \in U$ é dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^n,$$

com $g(z_0) = a_k \neq 0$.

Agora

$$f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^{n+k}.$$

com $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Portanto, z_0 é zero de multiplicidade k de f . □

Capítulo 3

Teoria Integral de Cauchy

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados referentes às funções holomorfas. Veremos a principal consequência do Teorema de Cauchy-Goursat, a fórmula integral de Cauchy, que diz que toda função holomorfa pode ser dada através de uma integral ao longo de um contorno fechado. Apresentaremos a característica mais importante das funções holomorfas, que é possuir derivadas de todas as ordens, uma propriedade de consequências fascinantes e que funções de variável real não possuem. E finalmente como consequência do teorema de Liouville, mostraremos que todo polinômio em $\mathbb{C}$ não constante possui pelo menos um zero complexo.

Para o que se segue nesse capítulo indicamos ver primeiramente as definições sobre domínios e curvas contidas no apêndice B. Para uma leitura mais aprofundada veja [4].

Considere inicialmente um caminho suave $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ e seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio.

Definição 3.1. A integral da função f ao longo do caminho γ é o número complexo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (3.1)$$

A estrutura complexa desempenha um papel fundamental nessa definição. De fato, escrevendo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ temos que $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Por outro lado, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ então

$$f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$$

e a equação (3.1) acima se torna

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)] dt\end{aligned}$$

Efetuada o produto concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt\end{aligned}$$

ou seja, $\int_{\gamma} f(z) dz$ é dada por duas integrais de linha ao longo do caminho γ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx. \quad (3.2)$$

Definição 3.2. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho suave, seu comprimento $l(\gamma)$ é definido por

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |dz|.$$

Se γ é um caminho suave por partes, $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \quad (3.3)$$

e

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2) + \cdots + l(\gamma_n). \quad (3.4)$$

Exemplo 3.1. Considere $f(z) = \frac{1}{z}$ e $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $r > 0$. Temos então que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i.$$

Por outro lado, o comprimento de γ é dado por

$$\int_{\gamma} |dz| = \int_0^{2\pi} |rie^{i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} r|i e^{i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r.$$

A integração de funções complexas contínuas goza das seguintes propriedades, que

seguem da definição:

- (i) $\int_{\gamma} c f(z) dz = c \int_{\gamma} f(z) dz, \quad c \in \mathbb{C}$
- (ii) $\int_{\gamma} [f(z) + g(z)] dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz.$
- (iii) $\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$

Veremos agora condições para existência de primitivas de uma função de variável complexa em domínios.

Definição 3.3. Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio. Uma função $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamada primitiva de f se F é holomorfa em U e $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in U$.

Teorema 3.1. *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, F uma primitiva de f em U e γ um caminho suave por partes em U unindo o ponto z_0 ao ponto z_1 . Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Em particular, se o caminho é fechado então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Vamos supor $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$ um caminho suave por partes. Existe uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_n = b\}$, do intervalo $[a, b]$, tal que γ é definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ \gamma_2(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots & \\ \gamma_n(t), & t_{n-1} \leq t \leq t_n \end{cases}$$

satisfazendo $\gamma_k(t_k) = \gamma_{k+1}(t_k)$, $1 \leq k \leq n-1$. Supomos também que $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z_1$.

Agora, seja F uma primitiva de f em $U \subset \mathbb{C}$. Consideremos $f(\gamma(t))\gamma'(t) = u(t) + iv(t)$ e $F(\gamma(t)) = U(t) + iV(t)$, com $t \in [a, b]$, de modo que $F' = f$ fornece $U'(t) = u(t)$ e $V'(t) = v(t)$.

Daí, pela equação (3.3) temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t) dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\gamma_n(t))\gamma_n'(t) dt \\
 &= \left(\int_{t_0}^{t_1} u(t) dt + i \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt \right) + \cdots + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt + i \int_{t_{n-1}}^{t_n} v(t) dt \right).
 \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_a^b u(t) dt = \int_{t_0}^{t_n} u(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt$$

e

$$\int_a^b v(t) dt = \int_{t_0}^{t_n} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} v(t) dt,$$

ou seja,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Como u e v são contínuas e tem como primitivas U e V respectivamente, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo às integrais do lado direito temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= (U(b) - U(a)) + i(V(b) - V(a)) \\
 &= (U(b) + iV(b)) - (U(a) + iV(a)) \\
 &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\
 &= F(z_1) - F(z_0).
 \end{aligned}$$

Se γ é fechada, então $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. De fato, pois teremos $\gamma(a) = \gamma(b)$, ou seja, $F(z_1) = F(z_0)$. □

Esse resultado possibilita o cálculo rápido da integral de funções cuja primitiva seja conhecida.

Exemplo 3.2. Seja $f(z) = z^4$ com primitiva $F(z) = \frac{z^5}{5}$ e se $\gamma(t) = t + it^2$, $1 \leq t \leq 2$ então

$$\int_{\gamma} z^4 dz = F(2 + 4i) - F(1 + i) = \frac{(2 + 4i)^5}{5} - \frac{(1 + i)^5}{5}.$$

Por outro lado, $\int_{\gamma} z^4 dz = 0$ para qualquer caminho fechado suave por partes γ .

Um exemplo importante de funções que admitem primitiva é dado pelas funções polinomiais e mais geralmente pela seguinte proposição.

Proposição 3.2. Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ definida por uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então a função

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \quad (3.5)$$

é uma primitiva de f e a série que a define converge para $|z - z_0| < R$.

Demonstração. Basta mostrar que a série que define F converge quando $|z - z_0| < R$, pois pelo teorema 2.14 podemos deriva-la termo a termo e concluir que $F' = f$. Agora

$$\left| \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \right| = \frac{|z - z_0|}{n+1} |a_n (z - z_0)|$$

e para $n > |z - z_0| - 1$ temos, $\frac{|z - z_0|}{n+1} < 1$. Portanto

$$\left| \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \right| < |a_n (z - z_0)|$$

e segue do critério da comparação 2.8 que (3.5) converge. $\square$

Lema 3.3. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, um caminho suave por partes em U , de comprimento $l(\gamma)$. Seja $K \geq 0$ um número real tal que $|f(\gamma(t))| \leq K$ para todo $a \leq t \leq b$. Então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq Kl(\gamma).$$

Demonstração. Começaremos mostrando a seguinte desigualdade: se α e β são funções reais contínuas então

$$\left| \int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t)) dt \right| \leq \int_a^b |\alpha(t) + i\beta(t)| dt. \quad (3.6)$$

Para ver isso, ponha

$$A = \int_a^b \alpha(t) dt \quad \text{e} \quad B = \int_a^b \beta(t) dt.$$

Então

$$A + iB = \int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t)) dt$$

e

$$\sqrt{A^2 + B^2} = |A + iB| = \left| \int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t)) dt \right|.$$

Agora

$$A^2 + B^2 = (A - iB)(A + iB) = (A - iB) \int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t)) dt$$

e como A e B são constantes

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \int_a^b (A - iB)(\alpha(t) + i\beta(t)) dt \\ &= \int_a^b [A\alpha(t) + B\beta(t)] dt + i \int_a^b [A\beta(t) - B\alpha(t)] dt. \end{aligned}$$

Mas $A^2 + B^2$ é um número real e portanto sua parte imaginária é nula, ou seja,

$$\int_a^b [A\beta(t) - B\alpha(t)] dt = 0$$

e ficamos com

$$A^2 + B^2 = \int_a^b [A\alpha(t) + B\beta(t)] dt. \quad (3.7)$$

Agora, o integrando nessa expressão nada mais é do que o produto escalar dos vetores

$$(A, B) \cdot (\alpha(t), \beta(t)) = A\alpha(t) + B\beta(t)$$

e sabemos do cálculo que

$$A\alpha(t) + B\beta(t) = |(A, B) \cdot (\alpha(t), \beta(t))| \leq |(A, B)| \cdot |(\alpha(t), \beta(t))|.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b [A\alpha(t) + B\beta(t)] dt &\leq \int_a^b |(A, B)| \cdot |(\alpha(t), \beta(t))| dt \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \int_a^b |\alpha(t) + i\beta(t)| dt \end{aligned}$$

e por (3.7)

$$A^2 + B^2 \leq \sqrt{A^2 + B^2} \int_a^b |\alpha(t) + i\beta(t)| dt$$

ou seja,

$$\left| \int_a^b (\alpha(t) + i\beta(t)) dt \right| \leq \int_a^b |(\alpha(t) + i\beta(t))| dt$$

o que demonstra (3.6). Com isso, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b K |\gamma'(t)| dt = K \int_a^b |\gamma'(t)| dt = Kl(\gamma). \end{aligned}$$

□

Notaremos a importância do lema que acabamos de demonstrar nos próximos teoremas.

Teorema 3.4. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua definida no domínio $U \subset \mathbb{C}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *f tem uma primitiva em U .*
- (ii) *$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para qualquer caminho fechado, suave por partes γ em U .*
- (iii) *$\int_{\lambda} f(z) dz$ só depende dos pontos inicial e terminal de qualquer caminho suave por partes λ em U .*

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) Seja γ um caminho fechado e suave por partes. Supondo que f tem primitiva em U , pelo teorema 3.1 temos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

(ii) $\implies$ (iii) Sejam γ_1 e γ_2 dois caminhos suaves em U , ambos ligando $z_0 \in U$ ao ponto $z_1 \in U$ e como vale (ii)

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2^-} f(z) dz = 0.$$

Mas então

$$0 = \int_{\gamma_1 * \gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Portanto

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

(iii) $\implies$ (i) Para isso, fixe um ponto $z_0 \in U$ e, dado um ponto $z \in U$, seja γ um caminho suave por partes em U ligando z_0 a z . Definimos uma função $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w) dw,$$

F está bem definida pois, por hipótese, $\int_{\gamma} f(w) dw$ só depende de z_0 e de z e não do caminho γ . Para concluir a prova devemos mostrar que F é uma primitiva de f , ou seja, que $F' = f, \forall z \in U$.

Como f é contínua em z , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |w - z| < \delta$ então $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$.

Como U é aberto, escolhendo $h \in \mathbb{C}$ com $0 < |h| < \delta$ então $z + h \in U$. Considere o segmento de reta (um caminho em U) unindo z a $z + h$, $\sigma(t) = z + th, 0 \leq t \leq 1$.

Pela definição de F temos

$$F(z + h) = \int_{\gamma * \sigma} f(w) dw = \int_{\gamma} f(w) dw + \int_{\sigma} f(w) dw$$

ou seja,

$$F(z + h) = F(z) + \int_{\sigma} f(w) dw$$

e daí

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w) dw.$$

Por outro lado, como $f(z)$ é um valor fixo

$$\int_{\sigma} f(z) dw = f(z) \int_{\sigma} dw = f(z)h \int_0^1 dt = f(z)h$$

e ficamos com

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(w) dw - \frac{1}{h} \int_{\sigma} f(z) dw.$$

Mas essa última expressão é igual a

$$\int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw$$

Agora, tomando w ao longo de σ temos, pelo lema 3.3 que

$$\left| \int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw \right| \leq \frac{\varepsilon}{|h|} l(\sigma) = \frac{\varepsilon}{|h|} |h| = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\sigma} \frac{f(w) - f(z)}{h} dw = 0.$$

Mas isso é o mesmo que dizer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = 0$$

ou seja, $F'(z) = f(z)$. □

3.1 Os Teoremas de Cauchy

Nesta seção, apresentaremos os teoremas de Cauchy. Os resultados aqui demonstrados, além de belos e profundos, nos mostram o verdadeiro poder das funções holomorfas. São resultados próprios dessa teoria e que não existem versões análogas para funções de variável real.

Teorema 3.5 (de Cauchy-Goursat). *Sejam U um domínio em $\mathbb{C}$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Suponha que $\Delta \subset U$ é um triângulo que limita uma região inteiramente contida em U . Então*

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Inicialmente munimos o triângulo Δ da orientação compatível com a região por ele limitada, isto é, o sentido de percurso é o anti-horário. Δ é um caminho suave por partes descrito pela justaposição dos caminhos $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$, como na figura 3.1. Tome os pontos médios dos lados de Δ e una esses pontos por segmentos de reta, obtendo assim quatro triângulos contidos na região limitada por Δ , digamos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ e Δ_4 .

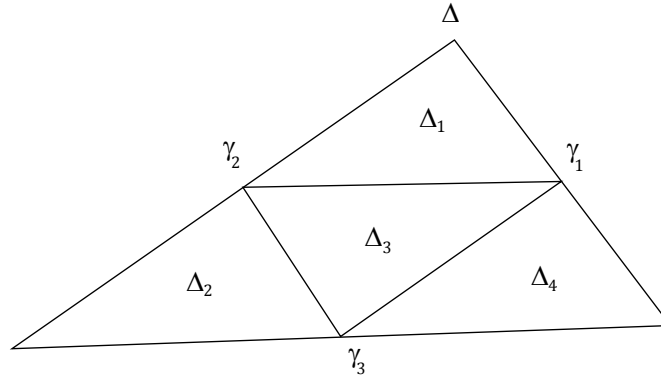


Figura 3.1: Região triangular do teorema de Cauchy-Goursat.

Adotamos o sentido de percurso anti-horário para cada um desses triângulos. Temos então que

$$\int_{\Delta} f(z) dz = \int_{\Delta_1} f(z) dz + \int_{\Delta_2} f(z) dz + \int_{\Delta_3} f(z) dz + \int_{\Delta_4} f(z) dz.$$

As quatro integrais acima fornecem quatro números complexos. Escolhemos dentre eles o que tem maior módulo e chamamos de $\Delta^{(1)}$ ao triângulo correspondente. Assim sendo

$$\left| \int_{\Delta_i} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right|$$

para $i = 1, 2, 3, 4$ e portanto

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right|.$$

Além disso, chamando de τ_i o lado de Δ_i de maior comprimento e τ o lado de Δ de maior comprimento, temos as igualdades

$$\tau_i = \frac{1}{2}\tau, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

o que nos fornece

$$\tau^{(1)} = \frac{1}{2}\tau.$$

Em decorrência disso, temos que, o perímetro de cada um dos triângulos Δ_i está relacionado com o perímetro $l(\Delta)$ de Δ . Para $i = 1, 2, 3, 4$ temos

$$l(\Delta_i) = \frac{l(\gamma_1)}{2} + \frac{l(\gamma_2)}{2} + \frac{l(\gamma_3)}{2} = \frac{1}{2}(l(\gamma_1) + l(\gamma_2) + l(\gamma_3)) = \frac{1}{2}l(\Delta)$$

e, em particular, temos que

$$l(\Delta^{(1)}) = \frac{1}{2}l(\Delta).$$

Pois bem, repetindo todo o procedimento acima para o triângulo $\Delta^{(1)}$, isto é, o dividindo em quatro novos triângulos, formados a partir dos pontos médios de cada um de seus lados, adotamos o sentido de percurso anti-horário para cada um deles e calculamos as quatro integrais correspondentes. Escolhamos dentre elas a que tem maior módulo e chamamos de $\Delta^{(2)}$ ao triângulo correspondente. Ficamos então com os seguintes dados:

$$R(\Delta^{(2)}) \subset R(\Delta^{(1)})$$

$$\left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Delta^{(2)}} f(z) dz \right|$$

$$l(\Delta^{(2)}) = \frac{1}{2}l(\Delta^{(1)}) \quad \text{e} \quad \tau^{(2)} = \frac{1}{2}\tau^{(1)}.$$

Repetindo o procedimento acima para o triângulo $\Delta^{(2)}$ e assim sucessivamente, obtemos após n etapas

$$R(\Delta^{(n)}) \subset \dots \subset R(\Delta^{(1)})$$

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right|$$

$$l(\Delta^{(n)}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n l(\Delta) \quad \text{e} \quad \tau^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \tau.$$

Agora, como temos uma sequência decrescente $R(\Delta^{(1)}) \supset \dots \supset R(\Delta^{(n)}) \supset \dots$ de compactos, a interseção $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R(\Delta^{(n)})$ é não vazia (a demonstração desse resultado pode ser vista em [3], p. 45), ou seja, existe um ponto z_0 comum a todas as regiões limitadas pelos triângulos $\Delta^{(i)}$, $i \geq 1$. Como f é holomorfa, dado $\varepsilon > 0$ podemos obter $\delta > 0$ tal que:

(i) o disco $D(z_0, \delta)$ está inteiramente contido em U e

$$(ii) \quad 0 < |z - z_0| < \delta \implies \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Mas essa última desigualdade equivale a

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$$

desde que $0 < |z - z_0| < \delta$. Agora, tomando $n > \frac{\tau}{\delta} - 1$ temos $\tau^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \tau < \delta$. Isso nos

diz que a região limitada por $\Delta^{(n)}$ está contida em $D(z_0, \delta)$, pois $z_0 \in \Delta^{(n)}$. Por outro lado para $z \in \Delta^{(n)}$

$$\int_{\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz + [f'(z_0)z_0 - f(z_0)] \int_{\Delta^{(n)}} dz - f'(z_0) \int_{\Delta^{(n)}} z dz$$

Mas pelo teorema 3.1, $\int_{\Delta^{(n)}} dz = 0$ e $\int_{\Delta^{(n)}} z dz = 0$. Logo,

$$\int_{\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz$$

e, pelo lema 3.3, ficamos com

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq \varepsilon \int_{\Delta^{(n)}} |z - z_0| |dz| \\ &\leq \varepsilon \tau^{(n)} l(\Delta^{(n)}) = \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^n \tau \left(\frac{1}{2}\right)^n l(\Delta) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon \tau l(\Delta). \end{aligned}$$

Finalmente temos

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \frac{1}{4^n} \varepsilon \tau l(\Delta) = \varepsilon \tau l(\Delta).$$

Como ε é arbitrário concluímos que

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| = 0$$

e o teorema está demonstrado. □

Começaremos a explorar a força desse resultado mostrando a existência de primitivas em domínios estrelados.

Definição 3.4. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio. Dizemos que U é estrelado se existe um ponto $z_0 \in U$ satisfazendo a seguinte propriedade: dado qualquer ponto $z \in U$, o segmento de reta unindo z_0 a z , $\overrightarrow{z_0 z}$, está inteiramente contido em U . O ponto z_0 é chamado um centro do domínio U .

Exemplo 3.3. Exemplos de domínios estrelados são:

- (i) um disco $D \subset \mathbb{C}$

(ii) o plano $\mathbb{C}$

(iii) qualquer subconjunto aberto convexo $W \subset \mathbb{C}$

(iv) o desenho de uma estrela limita uma região aberta do plano que é um domínio estrelado, daí a origem do nome.

Corolário 3.6. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio estrelado e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f admite uma primitiva em U .

Demonstração. Seja z_0 um centro de U e definamos a função $F : U \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(w) dw$$

F está bem definida e só nos resta mostrar que ela é derivável com $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in U$. Da continuidade de f , dado $\varepsilon > 0$ encontramos $\delta > 0$ tal que $0 < |w - z| < \delta$ implica $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Como U é aberto, tomando $h \in \mathbb{C}$, com $|h| < \delta$ então $z + h \in U$ e o segmento $\overrightarrow{z z+h} \subset U$. Temos que

$$F(z + h) = \int_{\overrightarrow{z_0 z+h}} f(w) dw$$

e observamos que o triângulo Δ de vértice z_0 , z e $z + h$ está contido em U e limita uma região também contida em U . O teorema de Cauchy-Goursat 3.5 nos diz que $\int_{\Delta} f(w) dw = 0$ e como

$$\int_{\Delta} f(w) dw = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(w) dw + \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(w) dw - \int_{\overrightarrow{z_0 z+h}} f(w) dw$$

ficamos com

$$F(z + h) - F(z) = \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(w) dw.$$

Portanto,

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(w) dw - f(z)$$

mas, $f(z) = \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z z+h}} f(z) dw$ e daí

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z \ z+h}} f(w) dw - \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z \ z+h}} f(z) dw \\ &= \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z \ z+h}} [f(w) - f(z)] dw.\end{aligned}$$

Agora, pelo lema 3.3 temos

$$\left| \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z \ z+h}} [f(w) - f(z)] dw \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{\overrightarrow{z \ z+h}} |f(w) - f(z)| |dw| < \varepsilon \frac{|h|}{|h|} = \varepsilon.$$

E portanto

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon,$$

ou seja, $F'(z) = f(z)$ e F é primitiva de f . □

Corolário 3.7. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio estrelado e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se γ é um caminho fechado suave por partes em U , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Pelo corolário 3.6 anterior, f tem uma primitiva em U e como γ é fechada suave por partes pelo item (ii) do teorema 3.4 temos $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. □

Demonstraremos o principal resultado do capítulo, a *Fórmula Integral de Cauchy*. Essa fórmula nos diz que se conhecermos o comportamento de f ao longo da fronteira de um disco fechado, então determinamos f em todos os pontos interiores a esse disco.

Teorema 3.8 (Fórmula Integral de Cauchy). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida no domínio $U \subset \mathbb{C}$. Sejam $\overline{D}(z_0, r_0)$ um disco fechado inteiramente contido em U e Γ sua fronteira, orientada compativelmente. Se z é um ponto qualquer no interior de $\overline{D}(z_0, r_0)$ então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Demonstração. Seja $\overline{D}(z_0, r_0) \subset U$ um disco fechado inteiramente contido em U . Como U é aberto conseguimos encontrar um disco aberto $D(z_0, R)$ de raio $R > r_0$ e tal que $\overline{D}(z_0, r_0) \subset D(z_0, R)$. Agora fixemos $z \in D(z_0, r_0)$ (o interior de $\overline{D}(z_0, r_0)$) e notemos que a função $g(w) = \frac{f(w)}{w - z}$ é holomorfa em $D(z_0, R) \setminus \{z\}$. Agora, construiremos dois domínios estrelados associados ao disco $D(z_0, R)$ da seguinte maneira: Consideremos o

diâmetro de $D(z_0, R)$ que passe por z . Esse diâmetro determina dois segmentos de reta com extremo em z , digamos L_1 e L_2 . Feito isso, conseguimos os domínios estrelados $D(z_0, R) \setminus L_1$ e $D(z_0, R) \setminus L_2$, conforme a figura 3.2 abaixo:

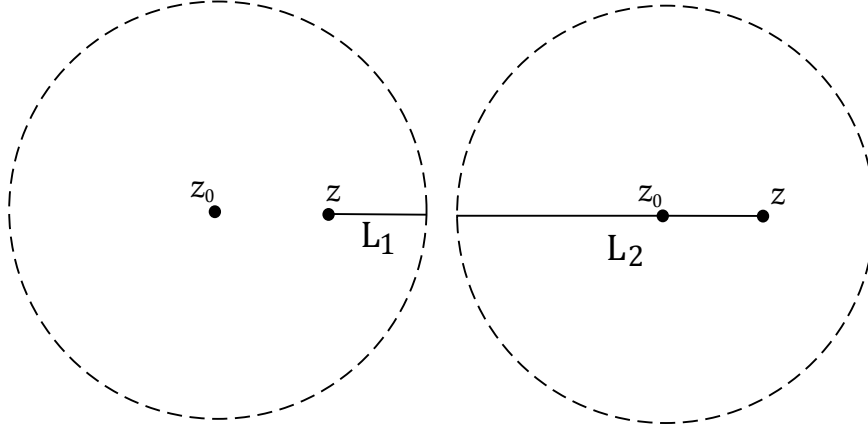


Figura 3.2: Domínios estrelados associados ao disco $D(z_0, R)$.

Como f é contínua em $D(z_0, R)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |w - z| < \delta$ então $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$.

Em seguida, isolemos o ponto z considerando um círculo γ nele centrado, de raio $r < \delta$, de forma que $D(z, r) \subset D(z_0, R)$. Orientemos Γ no sentido anti-horário.

Considere as curvas fechadas, suaves por partes, $\sigma_1 = \mu_1 * \alpha * \mu_2 * \beta$ e $\sigma_2 = \alpha^- * \mu_4 * \beta^- * \mu_3$ conforme a figura 3.3:

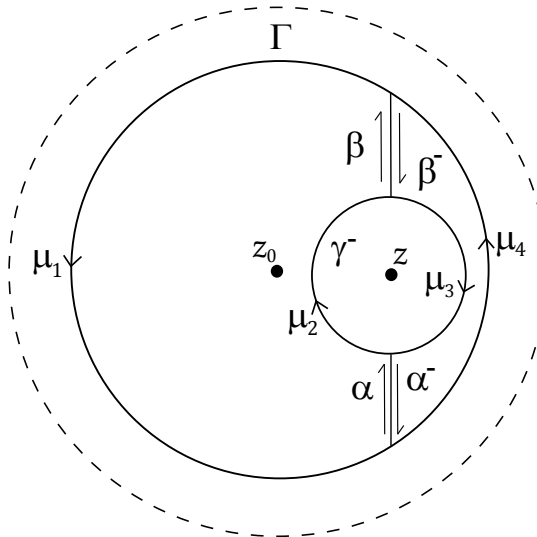


Figura 3.3: Caminhos fechados contidos em $D(z_0, R)$.

Como σ_1 e σ_2 são caminhos fechados em domínios estrelados nos quais a função g é

holomorfa temos, pelo corolário 3.7 que

$$\int_{\sigma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\sigma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

Mas

$$\int_{\sigma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\sigma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\gamma^-} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

e portanto

$$\int_{\Gamma * \gamma^-} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (3.8)$$

Vamos trabalhar agora a integral $\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$. Temos

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z) + f(z)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw + \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w-z} dw.$$

Ora, γ é dada por $\gamma(t) = z + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e então

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{w-z} dw = f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = f(z) \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i f(z).$$

Quanto a $\int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw$ procedemos utilizando a continuidade de f . Pelo lema 3.3 temos

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \right| \leq \int_{\gamma} \frac{|f(w) - f(z)|}{|w-z|} |dw| < \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário concluímos que $\int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = 0$ e portanto

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i f(z).$$

Segue de (3.8) que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

□

Para os exemplos a seguir consideraremos um resultado conhecido como *Princípio da*

deformação de contornos. Para ver esse resultado, consulte a referência [1], p. 95.

Exemplo 3.4. Utilizando a fórmula integral de Cauchy calcule a integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz \quad (3.9)$$

onde $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: Inicialmente, notamos que a função no integrando $g(z) = \frac{e^z}{z^2 - 2z}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$, ou seja, os pontos $z = 0$ e $z = 2$ são pontos singulares¹ de g . Para resolver a integral em (3.9) introduziremos duas curvas (que devem ser círculos) em torno dos pontos singulares da função g de forma que essas curvas estejam inteiramente contidas em γ e não haja interseção entre as mesmas. As curvas são $\gamma_1(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, círculo de centro em $z = 0$ e raio $\frac{1}{2}$ e $\gamma_2(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, círculo de centro em $z = 2$ e raio $\frac{1}{2}$.

O princípio da deformação de contornos nos diz que

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz$$

Resolvendo a integral ao longo de γ_1 temos

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i f(0) = -\pi i.$$

Resolvendo a integral ao longo de γ_2 temos

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz = \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z - 2} dz = 2\pi i f(2) = \pi i e^2.$$

Portanto

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 - 2z} dz = \pi i (e^2 - 1).$$

Exemplo 3.5. Utilizando a fórmula integral de Cauchy calcule a integral

$$\int_{\gamma} \frac{\cos \pi z}{z^2 + (1 - i)z - i} dz$$

onde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

¹Reveja a definição 1.5 do capítulo 1.

Solução: Primeiramente, observamos que a função $g(z) = \frac{\cos \pi z}{z^2 + (1-i)z - i}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-1, i\}$, pois podemos escrever o denominador como, $z^2 + (1-i)z - i = (z+1)(z-i)$ e notar que $z = -1$ e $z = i$ são pontos singulares da função g . Introduzimos as curvas $\gamma_1(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}$ e $\gamma_2(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, entorno das singularidades de g .

O princípio da deformação de contornos nos diz que

$$\int_{\gamma} \frac{\cos \pi z}{z^2 + (1-i)z - i} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\cos \pi z}{z^2 + (1-i)z - i} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\cos \pi z}{z^2 + (1-i)z - i} dz.$$

Resolvendo a integral ao longo de γ_1 temos

$$\int_{\gamma_1} \frac{\cos \pi z}{z^2 + (1-i)z - i} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos \pi z}{z-i}}{z+1} dz = 2\pi i \frac{\cos(-\pi)}{-1-i} = \frac{2\pi i}{1+i}.$$

Resolvendo a integral ao longo de γ_2 temos

$$\int_{\gamma_2} \frac{\cos \pi z}{z^2 + (1-i)z - i} dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos \pi z}{z+1}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{\cos \pi i}{1+i}.$$

Portanto

$$\int_{\gamma} \frac{\cos \pi z}{z^2 + (1-i)z - i} dz = \frac{2\pi i}{1+i} + 2\pi i \frac{\cos \pi i}{1+i} = \frac{2\pi i}{1+i} (\cos \pi i + 1).$$

Antes de passar para o próximo resultado, precisamos do seguinte teorema.

Teorema 3.9 (de Weierstrass). *Se $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua em $K \subset \mathbb{C}$ compacto, então a função $|f| : K \rightarrow \mathbb{R}$ atinge valores de máximo e mínimo em K .*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [5], p. 54.

O próximo resultado, que é um corolário da fórmula integral de Cauchy 3.8, diz que toda função holomorfa possui derivada de todas as ordens. E o que é mais surpreendente, suas derivadas são também funções holomorfas.

Corolário 3.10. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde U é um domínio. Então f tem derivadas de todas as ordens em todos os pontos de U e*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

onde γ é qualquer círculo centrado em z , percorrido no sentido anti-horário e limitando

um disco fechado contido em U .

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que o círculo $\gamma(t) = z + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ limita um disco fechado contido em U . Pelo teorema 3.8 temos

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{h} \left[\frac{f(w)}{w - (z+h)} - \frac{f(w)}{w - z} \right] dw.$$

Mas

$$\int_{\gamma} \frac{1}{h} \left[\frac{f(w)}{w - (z+h)} - \frac{f(w)}{w - z} \right] dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)} dw.$$

Agora

$$\frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)} - \frac{f(w)}{(w - z)^2} = \frac{hf(w)}{(w - z)^2(w - z - h)}.$$

Daí, temos

$$\left| \int_{\gamma} \left[\frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)} - \frac{f(w)}{(w - z)^2} \right] dw \right| = \left| \int_{\gamma} \left[\frac{hf(w)}{(w - z)^2(w - z - h)} \right] dw \right|.$$

Pelo teorema 3.9 $|f|$ atinge seu valor máximo em $\overline{D}(z, r)$, pois este é um conjunto compacto e f contínua. Seja K o valor máximo de $|f|$ ao longo de γ e se $|h| < \frac{r}{2}$ então $|w - z - h| \geq |w - z| - |h| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$. Tomando $\varepsilon > 0$ arbitrário e escolhamos $|h| = \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{r^2}{4K\pi} \varepsilon \right\}$ de modo que

$$\int_{\gamma} \frac{|h||f(w)|}{|w - z|^2|w - z - h|} |dw| < \frac{|h|K}{r^2 \frac{r}{2}} l(\gamma) = \frac{|h|4\pi r}{r^3} = \frac{|h|4K\pi}{r^2} = \varepsilon.$$

Concluimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw.$$

E isso nos diz que

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw.$$

Por indução sobre n chegamos no resultado desejado

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

□

Exemplo 3.6. Calcule a integral

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-i)^3} dz$$

onde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: Vemos que a função $g(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-i)^3}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0, i\}$, ou seja, $z = 0$ e $z = i$ são pontos singulares de g . Introduziremos duas curvas entorno dos pontos singulares. As curvas são $\gamma_1(t) = \frac{1}{4}e^{it}$ e $\gamma_2(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Com γ_1 centrada em $z = 0$ e γ_2 centrada em $z = i$.

Resolvendo a integral ao longo de γ_1 temos

$$\int_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z^2(z-i)^3} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos z}{(z-i)^3}}{z^2} dz = -6\pi i.$$

Resolvendo a integral ao longo de γ_2 temos

$$\int_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z^2(z-i)^3} dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos z}{z^2}}{(z-i)^3} dz = \pi i(7 \cos i + 4i \sin i).$$

Portanto

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-i)^3} dz = -6\pi i + \pi i(7 \cos i + 4i \sin i).$$

Corolário 3.11 (Estimativas de Cauchy). Seja f uma função holomorfa definida no disco $D(z_0, r)$ e suponha que $|f(z)| \leq K$ em $D(z_0, r)$. Então

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!K}{r^n}$$

Demonstração. Tome um círculo $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pelo corolário 3.10 temos

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

e pelo lema 3.3 temos

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}} |dw| \leq \frac{n!K}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!K}{r^n}$$

□

Lema 3.12. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $f'(z) = 0$ em todo $z \in U$, então f é uma função constante.

Veja a demonstração em [7], p. 93.

Teorema 3.13 (de Liouville). *Seja f uma função inteira, isto é, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Se existe um número $K \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq K$ então f é uma função constante.*

Demonstração. Como f é inteira, ela é holomorfa em qualquer disco $D(z, R)$, centrado em $z \in \mathbb{C}$ e de raio arbitrário. Pelo corolário 3.11 anterior

$$|f'(z)| \leq \frac{K}{R}$$

Como R é arbitrário

$$|f'(z)| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K}{R} = 0$$

e portanto $f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Segue do lema 3.12 que f é constante. $\square$

Provaremos agora uma versão do Teorema Fundamental da Álgebra. Mostrando a existência de um número complexo z_0 que é raiz de um polinômio não constante. Atentamos que esse ainda não é o teorema que queremos provar, mas é um resultado importante, dado como uma consequência do teorema de Liouville.

Teorema 3.14 (Fundamental da Álgebra). *Seja $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio não constante. Então existe um número complexo z_0 tal que $P(z_0) = 0$.*

Demonstração. Escreva $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, onde $a_n \neq 0$. Afirmamos que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$. De fato

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \\ &\geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \end{aligned}$$

e

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) = |a_n|.$$

Portanto

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| \geq \lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) = \infty.$$

Suponha agora que $P(z) \neq 0$ em todos os pontos de $\mathbb{C}$. Então a função $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ é inteira e $|f|$ é limitada. Para ver isso, dado $M = 1$, existe $R > 0$ tal que $|P(z)| > 1$ para $|z| > R$ e pelo teorema 3.9, seja $K \neq 0$ o valor mínimo de $|P(z)|$ para $|z| \leq R$. Temos então que

$$|f(z)| \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{K} \right\}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Segue do Teorema de Liouville que f é constante, o que é um absurdo pois P não o é. Concluimos que existe um número complexo z_0 tal que $P(z_0) = 0$. $\square$

No capítulo anterior mostramos que toda função analítica é holomorfa no disco de convergência da série de potências que a define (teorema 2.14), agora mostraremos que sua recíproca é verdadeira, ou seja, toda função holomorfa é analítica. Para estabelecer esse resultado utilizaremos a Fórmula Integral de Cauchy.

Teorema 3.15. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde U é um domínio em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in U$ um ponto qualquer. Então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

ou seja, f é dada por sua série de Taylor de centro em z_0 é uma função analítica. Além disso, essa série converge em qualquer disco aberto $D(z_0, r) \subset U$, isto é, o raio de convergência R da série acima é a menor entre as distâncias de z_0 aos pontos da fronteira de U .

Demonstração. A Fórmula Integral de Cauchy nos diz que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

onde $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $r > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$, é o círculo centrado em z_0 , limitando um disco fechado contido em U e z é qualquer ponto satisfazendo $|z - z_0| < r$. Para obter o resultado vamos inicialmente trabalhar a expressão $\frac{1}{w - z}$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(w - z_0) \left[1 + \frac{z_0 - z}{w - z_0} \right]} \\ &= \frac{1}{(w - z_0) \left[1 - \frac{z - z_0}{w - z_0} \right]} = \frac{1}{(w - z_0)} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \right). \end{aligned}$$

Agora, sabemos que se $k \neq 1$ é um número complexo então

$$\frac{1}{1-k} = 1 + k + k^2 + \cdots + k^n + \frac{k^{n+1}}{1-k}.$$

E substituindo k por $\frac{z-z_0}{w-z_0}$ concluimos que

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = 1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n + \frac{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0)} \left(\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \right) \\ &= \frac{1}{(w-z_0)} \sum_{j=0}^n \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^j + \frac{1}{(w-z_0)} \frac{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{(z-z_0)^j}{(w-z_0)^{j+1}} + \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(w-z)(w-z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $f(w)$ obtemos o integrando da Fórmula Integral de Cauchy

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{j=0}^n \frac{f(w)}{(w-z_0)^{j+1}} (z-z_0)^j + \frac{f(w)(z-z_0)^{n+1}}{(w-z)(w-z_0)^{n+1}}$$

e integrando ao longo de γ ficamos com

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{j+1}} dw \right] (z-z_0)^j + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-z_0)^{n+1}}{(w-z)(w-z_0)^{n+1}} dw. \end{aligned}$$

Pelo corolário 3.10 isso é o mesmo que

$$f(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z-z_0)^j + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-z_0)^{n+1}}{(w-z)(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

Ponha

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-z_0)^{n+1}}{(w-z)(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

Para mostrar que a série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j$ converge a $f(z)$ é suficiente mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$ qualquer que seja z satisfazendo $z \in D(z_0, r)$. Ora, seja K o valor máximo de $|f|$ ao longo de $w = \gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pelo lema 3.3 temos

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z - z_0)^{n+1}}{(w - z)(w - z_0)^{n+1}} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(w)| |z - z_0|^{n+1}}{|(w - z)| |(w - z_0)|^{n+1}} |dw| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{K |z - z_0|^{n+1}}{|(w - z)| |(w - z_0)|^{n+1}} |dw|. \end{aligned}$$

Agora, como $|w - z_0| = r$ e $|w - z| \leq |w - z_0| + |z - z_0|$ obtemos $r - |z - z_0| \leq |w - z|$ e daí

$$\frac{1}{|w - z|} \leq \frac{1}{r - |z - z_0|}.$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{K |z - z_0|^{n+1}}{(r - |z - z_0|) r^{n+1}} |dw| \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{K |z - z_0|^{n+1}}{(r - |z - z_0|) r^{n+1}} 2\pi r \\ &= \frac{K |z - z_0|^{n+1}}{(r - |z - z_0|) r^n}. \end{aligned}$$

Faça $|z - z_0| = \alpha$ e observe que $\alpha < r$ pois z está no disco $D(z_0, r)$. A expressão acima se transforma em

$$|R_n(z)| \leq \frac{K \alpha^{n+1}}{r^{n+1} - r^n \alpha} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n+1}.$$

Logo,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(z)| \leq \frac{K}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{n+1} = 0$$

pois $\frac{\alpha}{r} < 1$. Isso mostra que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

□

Teorema 3.16 (de Cauchy). *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função*

*holomorfa. Seja $V \subset U$ um subconjunto fechado e limitado (compacto), cuja fronteira ∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes, $\partial V = \gamma_1 * \cdots * \gamma_n$ e tal que $V \setminus \partial V$ é um domínio. Então*

$$\int_{\partial V} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Tome V e ∂V com orientação compatível. Já sabemos que f tem derivadas de todas as ordens em todos os pontos de U e, escrevendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, concluimos que as funções u e v tem derivadas parciais de todas as ordens em todos os pontos de U . Em particular, as derivadas parciais dessas funções são contínuas. Podemos invocar o Teorema de Green C.1 e argumentar como segue:

$$\int_{\partial V} f(z) dz = \int_{\partial V} u dx - v dy + i \int_{\partial V} v dx + u dy.$$

Aplicando o Teorema de Green C.1 às duas integrais acima temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} u dx - v dy &= \iint_V \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = - \iint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \\ \int_{\partial V} v dx + u dy &= \iint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

Mas, como f é holomorfa, as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas e isso dá $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Portanto,

$$\int_{\partial V} u dx - v dy = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial V} v dx + u dy = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\partial V} f(z) dz = 0.$$

□

Este teorema nos permite dar uma forma mais geral para a Fórmula Integral de Cauchy (teorema 3.8), onde calculamos a integral não só em discos fechados mas em curvas mais gerais (curvas de Jordan suave por partes).

Teorema 3.17 (Fórmula Integral de Cauchy). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa no domínio $U \subset \mathbb{C}$. Seja V uma região fechada e limitada inteiramente contida em U ,*

cuja fronteira ∂V é uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, sendo $V \setminus \partial V$ um domínio. Se z_0 é um ponto qualquer no interior de V então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Demonstração. Como z_0 é ponto interior a V , podemos encontrar um disco fechado $\overline{D}(z_0, r)$ centrado em z_0 e inteiramente contido no interior de V . Olhe para a região $W = V \setminus D(z_0, r)$. Trata-se de uma região fechada e limitada, contida no domínio U cuja fronteira ∂W consiste das duas curvas de Jordan suaves por partes, ∂V e $\partial \overline{D}(z_0, r)$. Oriente W e ∂W compativelmente. A função $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ é holomorfa em $U \setminus \{z_0\}$ um domínio que contém W . Assim sendo, o Teorema de Cauchy 3.16 afirma que

$$\int_{\partial W} g(z) dz = 0.$$

Mas

$$\int_{\partial W} g(z) dz = \int_{\partial V} g(z) dz + \int_{\overline{D}(z_0, r)^-} g(z) dz$$

e então

$$\int_{\partial V} g(z) dz = \int_{\overline{D}(z_0, r)} g(z) dz$$

Logo, pelo Teorema 3.8 temos

$$\int_{\partial V} g(z) dz = \int_{\overline{D}(z_0, r)} g(z) dz = 2\pi i f(z_0).$$

Portanto

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

□

Exemplo 3.7. Calcular $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)}$, onde γ é o quadrado de vértices $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, orientado no sentido anti-horário.

Solução: Esse caminho tem 0 em seu interior e 1 em seu exterior. Consideremos então a função $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$, que é holomorfa no domínio $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, que contém a região

fechada e limitada V determinada por γ . Pela Fórmula Integral de Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)} dz = \int_{\gamma} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z} dz = 2\pi i f(0) = -2\pi i.$$

Agora, observe que como 1 é ponto exterior ao caminho fechado, a integral

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-1} dz = 0.$$

Isso decorre do teorema de Cauchy 3.16 pois o integrando é holomorfo em um aberto que contém a região fechada e limitada determinada por γ .

Capítulo 4

Singularidades

Neste capítulo, veremos a série de Laurent, que é mais geral que a série de Taylor, pois possui termos com potências negativas. Essa série nos permite estudar as singularidades isoladas de uma função holomorfa. Com essa série é também possível fazer o estudo dos resíduos, pois este é definido como um dos coeficientes dessa série. A partir dessas definições mostraremos o princípio do argumento, apresentando uma fórmula que nos permite calcular zeros e polos de uma função holomorfa, enfim provaremos o teorema principal da seção, o Teorema Fundamental da Álgebra, como uma consequência do Teorema de Rouché.

4.1 A Expansão de Laurent

Definição 4.1. Se ρ_1, ρ_2 são números reais satisfazendo $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ e a um número complexo, o anel $A(a, \rho_1, \rho_2)$ é o conjunto aberto definido por

$$A(a, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C}; \rho_1 < |z - a| < \rho_2\}$$

e o anel fechado $\overline{A}(a, \rho_1, \rho_2)$ é o conjunto fechado

$$\overline{A}(a, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C}; \rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2\}.$$

Escrevemos $A(a, \rho_1, \infty)$ para denotar o anel ilimitado $\{z \in \mathbb{C}; \rho_1 < |z - a|\}$ e $\overline{A}(a, \rho_1, \infty)$ para denotar o anel ilimitado $\{z \in \mathbb{C}; \rho_1 \leq |z - a|\}$. Observe que $A(a, 0, r)$ é $D(a, r) \setminus \{a\}$. Temos também que $A(a, 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Teorema 4.1 (de Laurent). *Seja f uma função holomorfa no anel $A(a, \rho_1, \rho_2)$. Então*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

sendo que a série $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m}$ converge absolutamente fora do disco fechado $\overline{D}(a, \rho_1)$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ converge absolutamente no disco $\overline{D}(a, \rho_2)$. Além disso, essa expansão é única e os coeficientes b_m e a_n são dados por

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w-a)^{m-1} dw, \quad m \geq 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad n \geq 0$$

onde γ é o círculo de centro a , orientado no sentido anti-horário e contido em $A(a, \rho_1, \rho_2)$.

Demonstração. Seja $f : A(a, \rho_1, \rho_2) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Fixe um ponto $z \in A(a, \rho_1, \rho_2)$ e sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2$. Consideremos o anel $\overline{A}(a, r_1, r_2)$. Sua fronteira é formada pelos círculos $\gamma_1 = \{|w-a| = r_1\}$ e $\gamma_2 = \{|w-a| = r_2\}$. Utilizaremos a fórmula integral de Cauchy 3.8 para descrever f em torno de z .

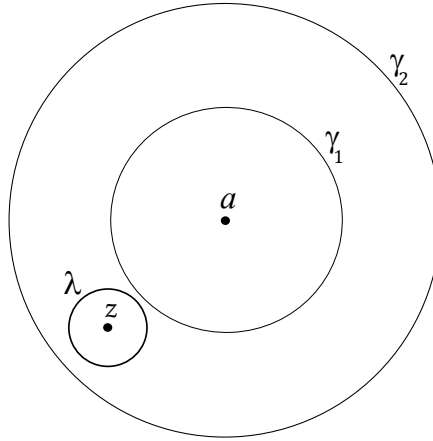


Figura 4.1: Região V fechada e limitada.

Observe que a função $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$ é holomorfa no anel $A(a, \rho_1, \rho_2)$ exceto no ponto z . Assim sendo, isolamos o ponto z considerando um disco nele centrado, $D(z, \tau)$, com $r_1 < \tau < r_2$, tal que $\overline{D}(z, \tau) \subset A(a, r_1, r_2)$ e cuja fronteira é o círculo λ orientado no

sentido anti-horário. Pela fórmula integral de Cauchy 3.8 temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (4.1)$$

Consideremos V a região cuja fronteira ∂V é formada pelas três curvas de Jordan λ , γ_1 e γ_2 e, dotando V e ∂V da orientação compatível, temos $\partial V = \gamma_1^- * \gamma_2 * \lambda^-$. Como g é holomorfa num aberto que contém V e ∂V , pelo teorema de Cauchy 3.16 temos

$$\int_{\partial V} g(w) dw = \int_{\partial V} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0,$$

mas

$$0 = \int_{\partial V} g(w) dw = \int_{\gamma_1^-} g(w) dw + \int_{\gamma_2} g(w) dw + \int_{\lambda^-} g(w) dw$$

e portanto

$$\int_{\lambda} g(w) dw = \int_{\gamma_1^-} g(w) dw + \int_{\gamma_2} g(w) dw,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} g(w) dw = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} g(w) dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} g(w) dw.$$

De (4.1) obtemos

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (4.2)$$

Agora, faremos separadamente o estudo das integrais do lado direito da equação (4.2).

(i) Estudo de $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw$.

Relembremos a demonstração do teorema 3.15 do capítulo 3, mas atentando para o fato de que f não está definida no ponto a . Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w - a + a - z} = \frac{1}{(w - a) - (z - a)} = \frac{1}{(w - a) \left[1 - \frac{z - a}{w - a} \right]} \\ &= \frac{1}{w - a} \left[1 + \frac{z - a}{w - a} + \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^n + \frac{\left(\frac{z - a}{w - a} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z - a}{w - a}} \right] \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{(z - a)^j}{(w - a)^{j+1}} + \frac{(z - a)^{n+1}}{(w - z)(w - a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $f(w)$ obtemos o integrando da Fórmula Integral de Cauchy

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{j=0}^n \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} (z-a)^j + \frac{f(w)(z-a)^{n+1}}{(w-z)(w-a)^{n+1}}$$

e integrando ao longo de γ_2 ficamos com

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} dw \right] (z-a)^j.$$

Essa série converge para qualquer z satisfazendo $|z-a| < r_2$. Agora, note que não podemos substituir $\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} dw$ por $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, pois $f(a)$ não está definida. Usando os mesmos argumentos da demonstração do teorema 3.15, a equação (4.2) fica

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (4.3)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n \geq 0.$$

(ii) Estudo de $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw$.

Utilizaremos os mesmos argumento utilizados no item (i), fazendo as modificações necessárias. Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-a+a-z} = \frac{-1}{(z-a)-(w-a)} = -\frac{1}{(z-a)\left[1-\frac{w-a}{z-a}\right]} \\ &= -\frac{1}{z-a} \left[1 + \frac{w-a}{z-a} + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^{m-1} + \frac{\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^m}{1-\frac{w-a}{z-a}} \right] \\ &= -\sum_{j=1}^m \frac{(w-a)^{j-1}}{(z-a)^j} - \frac{(w-a)^m}{(z-w)(z-a)^m}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $f(w)$ obtemos o integrando da Fórmula Integral de Cauchy

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\sum_{j=1}^m \frac{f(w)(w-a)^{j-1}}{(z-a)^j} - \frac{f(w)(w-a)^m}{(z-w)(z-a)^m}$$

e integrando ao longo de γ_1 ficamos com

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w-a)^{j-1} dw \right] \frac{1}{(z-a)^j} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)(w-a)^m}{(z-w)(z-a)^m} dw.$$

Agora, ponha $R_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)(w-a)^m}{(z-w)(z-a)^m} dw$. Estimando $|R_m(z)|$, temos que

$$|z-a| \leq |z-w| + |w-a| = |z-w| + r_1 \implies \frac{1}{|z-w|} \leq \frac{1}{|z-a| - r_1}.$$

Portanto, se K é o valor máximo de $|f|$ ao longo de γ_1 , então pelo lema 3.3

$$\begin{aligned} |R_m(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)(w-a)^m}{(z-w)(z-a)^m} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{K r_1^m}{(|z-a| - r_1) |z-a|^m} |dw| \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{K r_1^m}{(|z-a| - r_1) |z-a|^m} 2\pi r_1. \end{aligned}$$

Então

$$|R_m(z)| \leq \frac{K}{1 - \frac{r_1}{|z-a|}} \frac{r_1^{m+1}}{|z-a|^{m+1}}.$$

Fazendo $\alpha = \frac{r_1}{|z-a|}$ temos que $\alpha < 1$ e a expressão acima fica

$$|R_m(z)| \leq \frac{K}{1-\alpha} \alpha^{m+1}$$

e daí vem que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |R_m(z)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{K}{1-\alpha} \alpha^{m+1} = 0.$$

Concluimos que

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w-a)^{m-1} dw \right] \frac{1}{(z-a)^m}.$$

Essa série converge absolutamente para z satisfazendo $|z-a| > r_1$. O interessante é que essa é uma série de potências negativas de $z-a$. Portanto (4.3) fica

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^{m+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad (4.4)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w - a)^{m-1}, \quad m \geq 1.$$

Percebemos que os coeficientes a_n e b_n são calculados através de duas integrais ao longo de círculos distintos. O intuito agora é verificar se é possível calcular esses coeficientes através da integral ao longo de um único círculo. De fato isto é possível.

Considere um círculo qualquer γ , de centro em a e raio r , com $\rho_1 < r < \rho_2$, contido no anel $A(a, \rho_1, \rho_2)$ e orientado no sentido anti-horário. Dado $n \geq 0$, a função $h(w) = \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}}$ é holomorfa no anel fechado cuja fronteira consiste dos círculos γ e γ_2 . Pelo teorema de Cauchy 3.16 temos

$$\int_{\gamma_2 * \gamma^-} h(w) dw = 0$$

ou seja

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw$$

e portanto, podemos escrever

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad n \geq 0.$$

Analogamente, considerando a função $g(w) = f(w)(w - a)^{m-1}$, holomorfa no anel fechado cuja fronteira consiste dos círculos γ e γ_1 . Novamente pelo teorema de Cauchy 3.16 temos

$$\int_{\gamma * \gamma_1^-} g(w) dw = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\gamma_1} f(w)(w - a)^{m-1} dw = \int_{\gamma} f(w)(w - a)^{m-1} dw$$

e podemos escrever

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - a)^{m-1} dw, \quad m \geq 1.$$

E para finalizar, mostremos que a série de Laurent é única. Suponha que temos a

expansão

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} dm \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

absolutamente convergente para $z \in A(a, \rho_1, \rho_2)$. Vamos considerar inicialmente os coeficientes das potências negativas. Multiplique $f(z)$ por $(z-a)^{k-1}$, $k \geq 2$ e obtenha

$$(z-a)^{k-1} f(z) = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{d_m}{(z-a)^{m-k+1}} + \frac{d_k}{z-a} + d_{k-1} + \cdots + d_1 (z-a)^{k-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k-1}.$$

Considere as funções

$$f_1(z) = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{d_m}{(z-a)^{m-k+1}}$$

e

$$f_2(z) = d_{k-1} + d_{k-2}(z-a) + \cdots + d_1 (z-a)^{k-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k-1}.$$

Temos que

$$(z-a)^{k-1} f(z) = f_1(z) + \frac{d_k}{z-a} + f_2(z).$$

Agora, f_1 e f_2 ambas admitem primitivas, pois

$$F_1(z) = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{k-m} \frac{d_m}{(z-a)^{m-k}}$$

é uma série absolutamente convergente em $A(a, \rho_1, \rho_2)$ e $F_1'(z) = f_1(z)$. Também

$$F_2(z) = d_{k-1}(z-a) + d_{k-2} \frac{(z-a)^2}{2} + \cdots + d_1 \frac{(z-a)^{k-1}}{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+k} (z-a)^{n+k}$$

converge absolutamente no anel $A(a, \rho_1, \rho_2)$ e $F_2'(z) = f_2(z)$.

Portanto, se γ é um círculo de centro em a , contido em $A(a, \rho_1, \rho_2)$ e percorrido no sentido anti-horário então, pelo teorema 3.4

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)(z-a)^{k-1} dz &= \int_{\gamma} f_1(z) dz + \int_{\gamma} \frac{d_k}{z-a} dz + \int_{\gamma} f_2(z) dz \\ &= 0 + \int_{\gamma} \frac{d_k}{z-a} dz + 0 = 2\pi i d_k. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$d_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z-a)^{k-1} dz$$

e os coeficientes das potências negativas são os mesmos de (4.4). Isso mostra que a série de potências negativas da expansão (4.4) é única.

Com isso, temos

$$f(z) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

e

$$f(z) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

e da igualdade de séries, concluímos que $a_n = c_n$, para todo $n \geq 0$. O que conclui a demonstração. $\square$

4.2 Classificação das singularidades

Definição 4.2. Quanto à singularidades temos três tipos:

- (i) a é singularidade removível de f se $b_m = 0$ para $m \geq 1$
- (ii) a é polo de ordem k de f se $b_k \neq 0$ e $b_m = 0$ para $m > k$
- (iii) a é singularidade essencial de f se $b_m \neq 0$ para uma infinidade de valores de m .

Exemplo 4.1. Escreva a representação em série de Laurent da função $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ no anel $A(0, 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Solução: Para escrever a representação em série de Laurent dessa função, devemos ter

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

e os coeficientes a_n e b_m são obtido por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^{n+2}} dz, \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^{m-2} \sin z dz, \quad m \geq 1$$

onde $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Pelo corolário 3.10 temos que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^{n+2}} dz = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (\sin z)_{z=0}.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (\sin z)_{z=0} = \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)_{z=0} = \frac{1}{1!} \\ a_1 &= \frac{1}{2!} \frac{d}{dz} (\sin z)_{z=0} = \frac{1}{2!} \frac{d}{dz} \left(\frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} \right)_{z=0} = \frac{0}{2!} \\ a_2 &= \frac{1}{3!} \frac{d}{dz} (\sin z)_{z=0} = \frac{1}{3!} \frac{d}{dz} \left(\frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \right)_{z=0} = \frac{-1}{3!} \\ a_3 &= \frac{1}{4!} \frac{d}{dz} (\sin z)_{z=0} = \frac{1}{4!} \frac{d}{dz} \left(\frac{-ie^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)_{z=0} = \frac{0}{4!} \\ a_4 &= \frac{1}{5!} \frac{d}{dz} (\sin z)_{z=0} = \frac{1}{5!} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)_{z=0} = \frac{1}{5!} \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Agora, para $m = 1$, temos pelo teorema 3.8 que

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz = \sin 0 = 0.$$

Para $m = 2$, como $\sin z$ possui primitiva $-\cos z$ e γ é fechada, pelo teorema 3.4

$$b_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sin z dz = 0.$$

Da mesma forma, para $m = 3$ a função $z \sin z$ tem como primitiva $-z \cos z + \sin z$, então, pelo teorema 3.4

$$b_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \sin z dz = 0.$$

De maneira geral, a função $z^{m-2} \sin z$, possui como primitiva a função

$$F(z) = (m-2)! \left(-\frac{z^{m-2}}{(m-2)!} \cos z + \frac{z^{m-3}}{(m-3)!} \sin z + \frac{z^{m-4}}{(m-4)!} \cos z - \frac{z^{m-5}}{(m-5)!} \sin z + \cdots + \cos z \right).$$

Logo

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^{m-2} \sin z \, dz = 0, \quad m \geq 1.$$

Logo, do item (i) da definição 4.2 a função $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ tem singularidade removível em $z = 0$. Portanto a expansão em série de Laurent de f fica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

e notemos que $f(0) = 1$.

Proposição 4.2. Seja f uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) a é singularidade removível de f
- (ii) existe o $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$
- (iii) $|f|$ é limitado em algum anel $A(a, 0, \delta) \subset A(a, 0, \rho)$.

Demonstração. Suponha que (i) valha. Então a série de Laurent de f em $A(a, 0, \rho)$ é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + \cdots + a_n (z-a)^n + \cdots$$

e portanto $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = a_0$, ou seja, vale (ii). Suponha (ii) válida e seja $\alpha = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$. Da definição de limites temos que, dado $\varepsilon = 1$, existe $0 < \delta < \rho$, tal que, se $0 < |z-a| < \delta$ então $|f(z) - \alpha| < 1$. Mas isso nos diz que $|f(z)| < 1 + |\alpha|$ para $z \in A(a, 0, \delta)$ e vale (iii). Finalmente, suponha (iii) válida, ou seja, existe K tal que $|f(z)| \leq K$ para $z \in A(a, 0, \rho)$. Os coeficientes b_m da série de Laurent de f são dados por

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) (z-a)^{m-1} \, dz, \quad m \geq 1$$

onde $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq r < \rho$. Daí

$$|b_m| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |f(z)| |(z-a)^{m-1}| |dz| \leq \frac{1}{2\pi} K r^{m-1} 2\pi r = K r^m.$$

Fazendo r tender a zero concluímos que $b_m = 0$ para $m \geq 1$ e a é singularidade removível de f . □

Quanto a polos, temos:

Proposição 4.3. Se f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$, então a é um polo de ordem k de f se, e somente se, $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$ existe e é um número complexo não nulo.

Demonstração. Suponha que a seja um polo de ordem k de f . Então a série de Laurent de f em $A(a, 0, \rho)$ se escreve

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - a)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad b_k \neq 0$$

e daí

$$(z - a)^k f(z) = b_k + \cdots + b_1 (z - a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^{n+k}.$$

Logo, $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = b_k \neq 0$. Por outro lado, suponha que $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$ exista e é um número complexo não nulo. Olhe para a função $g(z) = (z - a)^k f(z)$. Pelo item (ii) da proposição 4.2, g tem singularidade removível em a e portanto, é dada por uma série de potências centrada em a e converge no disco $D(a, \rho)$, digamos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Além disso, $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = c_0$. Vem então que

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - a)^k} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - a)^n$$

e portanto, a é polo de ordem k de f . □

4.3 Resíduos

Definição 4.3. Se f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$, o resíduo de f em a é o coeficiente b_1 do termo $\frac{1}{z - a}$ de sua série de Laurent com centro em a .

Teorema 4.4 (dos Resíduos). *Seja f uma função holomorfa num domínio $U \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Suponha que $\gamma \subset U \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ é uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida*

em U e contém todos os pontos $a_1, a_2, \dots, a_k$. Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{res}(f, a_1) + \text{res}(f, a_2) + \dots + \text{res}(f, a_k).$$

Demonstração. Consideremos γ como no enunciado. Seja $R \subset U$ a região fechada e limitada determinada por γ . Para cada singularidade isolada a_j de f , escolha um círculo γ_j centrado em a_j satisfazendo as seguintes condições: γ_j não tem ponto em comum com γ_t se $j \neq t$, γ_j não tem ponto comum com γ , para $1 \leq j \leq k$ e cada $\gamma_j \subset R$. Obtemos assim, uma região V limitada e fechada. É limitada, pois $V \subset R$, é fechada porque é a interseção de dois conjuntos fechados (ver teorema B.2) $V = R \cap \left(\bigcup_{j=1}^k D_{\gamma_j} \right)^C$, onde D_{γ_j} são discos abertos determinados por cada γ_j , $1 \leq j \leq k$.

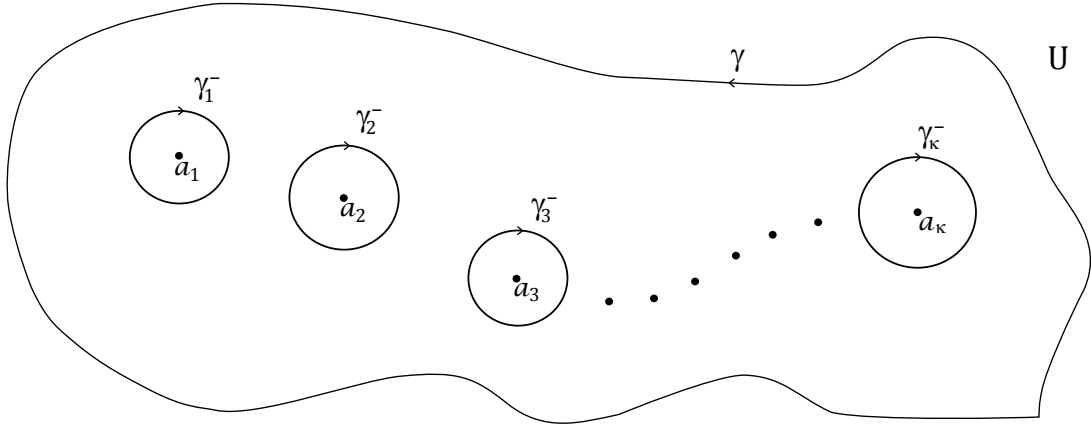


Figura 4.2: Região determinada por γ e exterior aos discos D_{γ_j} .

Podemos aplicar o Teorema de Cauchy 3.16, pois temos f holomorfa, V uma região fechada e limitada com fronteira ∂V constituída de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes, com $V \setminus \partial V$ um domínio. Então pelo teorema de Cauchy 3.16 temos

$$\int_{\partial V} f(z) dz = 0. \quad (4.5)$$

Mas como $\partial V = \gamma * \gamma_1^- * \dots * \gamma_k^-$, (4.5) equivale a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Nos resta portanto calcular $\int_{\gamma_j} f(z) dz$, $j = 1, \dots, k$. Ora, o Teorema de Laurent 4.1

nos diz que se

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

é a série de Laurent de f entorno de a , então os coeficiente b_m são dados por

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z-a)^{m-1} dw, \quad m \geq 1.$$

Agora, para $m = 1$, temos

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Pela definição 4.3, b_1 é o resíduo de f em a . Então para cada a_j , $1 \leq j \leq k$, temos

$$\text{res}(f, a_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Portanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{res}(f, a_1) + \text{res}(f, a_2) + \cdots + \text{res}(f, a_k).$$

□

4.4 O Teorema de Rouché

Nesta seção, demonstraremos um dos teoremas principais do capítulo, *O Teorema de Rouché*. É a partir desse teorema que daremos a aplicação da teoria de funções holomorfas e demonstraremos o *Teorema Fundamental da Álgebra*.

Teorema 4.5 (Princípio do argumento). *Seja f uma função holomorfa num domínio $U \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Suponha que $\gamma \subset U \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ é uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em U e contém todos os pontos $a_1, a_2, \dots, a_k$. Além disso, suponha que todos esses pontos sejam polos de f e que f não tem zeros ao longo de γ . Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z} - \mathcal{P} \quad (4.6)$$

onde $\mathcal{Z}$ é o número de zeros de f na região interior a γ , cada um deles contado tantas vezes quanto for sua multiplicidade e $\mathcal{P}$ é o número de polos de f na região interior a γ ,

cada um deles contado tantas vezes quanto for sua ordem.

Demonstração. Pelo teorema dos resíduos 4.4, a integral em (4.6) é a soma dos resíduos da função $\frac{f'(z)}{f(z)}$ na região interior a γ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \text{res} \left(\frac{f'}{f}, \alpha_j \right). \quad (4.7)$$

Dado um ponto a nessa região temos três possibilidades:

- (i) $f(a) \neq 0$
- (ii) a é zero de multiplicidade m de f
- (iii) a é polo de ordem k de f

O caso (i) fornece nada à integral acima pois o integrando possui resíduo nulo nesse ponto. Nos resta investigar (ii) e (iii). Suponha então que:

(ii) a é zero de multiplicidade m de f . Nesse caso, pela proposição 2.15, num disco $D(a, \delta)$ existe uma função g holomorfa tal que $f(z) = (z - a)^m g(z)$ e $g(a) \neq 0$. Por outro lado, $f'(z) = m(z - a)^{m-1} g(z) + (z - a)^m g'(z)$. Daí vem que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (4.8)$$

Como $\frac{g'(z)}{g(z)}$ é holomorfa em $D(a, \delta)$, pelo teorema 3.15, $\frac{g'(z)}{g(z)}$ possui representação em séries de potências. Temos

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

e portanto reescrevemos (4.8) como

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (4.9)$$

Essa é a série de Laurent de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ centrada em a e nesse ponto o resíduo é m .

(iii) a é polo de ordem k de f . Nesse caso pela proposição 4.3, num disco $D(a, \rho)$ vale que $(z - a)^k f(z) = g(z)$, onde g é holomorfa e $g(a) \neq 0$. Portanto, $f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^k}$ e

$$f'(z) = \frac{-kg(z)}{(z-a)^{k+1}} + \frac{g'(z)}{(z-a)^k}. \text{ Logo}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Argumentando como em (ii) concluímos que esse ponto contribui $-k$ para integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Como os resíduos de f'/f no interior da região limitada por γ são zeros ou polos de f , reorganizaremos os resíduos da seguinte forma, α_j com $1 \leq j \leq l$ tal que $l < n$ serão os zeros de f e α_j com $l+1 \leq j \leq n$ serão os polos de f no interior da região limitada por γ . Então por (4.7) temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \text{res} \left(\frac{f'}{f}, \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^l \text{res} \left(\frac{f'}{f}, \alpha_j \right) - \sum_{j=l+1}^n \text{res} \left(\frac{f'}{f}, \alpha_j \right). \quad (4.10)$$

Fazendo

$$\sum_{j=1}^l \text{res} \left(\frac{f'}{f}, \alpha_j \right) = \mathcal{Z} \quad \text{e} \quad \sum_{j=l+1}^n \text{res} \left(\frac{f'}{f}, \alpha_j \right) = \mathcal{P}$$

obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z} - \mathcal{P}.$$

□

Corolário 4.6. Nas mesmas hipóteses do teorema 4.5, se f e h são funções holomorfas em U , então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\xi_j} h(\xi_j) m_{\xi_j}(f) \quad (4.11)$$

onde $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ são zeros de f na região interior a γ e $m_{\xi_j}(f)$ é a multiplicidade de ξ_j com zero de f .

Demonstração. Pelo teorema dos resíduos 4.4, a integral em (4.11) é a soma dos resíduos da função $h(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ na região interior a γ . Dado um ponto a nessa região temos duas possibilidades, uma vez que f e h são holomorfas em U :

(i) $f(a) \neq 0$

(ii) a é zero de multiplicidade m de f .

Como no teorema 4.5 anterior, (i) fornece nada à integral acima pois o integrando possui resíduo nulo nesse ponto.

Quanto a (ii), suponha que a é zero de multiplicidade m de f , localizado no interior da região limitada determinada por γ . Pela equação (4.9) do teorema 4.5 anterior temos que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n. \quad (4.12)$$

Por outro lado, a função h tem expansão centrada em a dada por, digamos

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^n. \quad (4.13)$$

Multiplicando a igualdade em (4.12) por (4.13) ficamos com

$$h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{b_0 m}{z-a} + m \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}(z-a)^n + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \right].$$

Portanto, o resíduo de $h(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ em a é $b_0 m = h(a) m_a(f)$. □

Observação 4.1. Se $h \equiv 1$ então o corolário 4.6 nos diz que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z}_f$$

onde $\mathcal{Z}_f$ é o número de zeros de f na região interior a γ , cada um deles contado tantas vezes for sua multiplicidade.

Teorema 4.7 (de Rouché). *Sejam f e g duas funções holomorfas, ambas definidas no domínio $U \subset \mathbb{C}$. Seja $V \subset U$ uma região fechada e limitada cuja fronteira ∂V é uma curva de Jordan suave por partes, com $V \setminus \partial V$ um domínio. Se*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \partial V,$$

então f e g tem o mesmo número de zeros no interior de V , cada um deles contado tantas vezes for sua multiplicidade.

Demonstração. Antes de mais nada note que, por hipótese, nem f nem g podem ter zeros ao longo de ∂V .

Fazendo $\Phi(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ temos que

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Assim sendo, pela observação 4.1,

$$\mathcal{Z}_g - \mathcal{Z}_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz$$

e basta mostrar que

$$\int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = 0.$$

Para calcular essa integral, oriente o caminho ∂V no sentido anti-horário e suponha que ele seja descrito por $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Temos

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))| \implies |1 - \Phi(\gamma(t))| < 1.$$

Considere o caminho $\varphi(t) = \Phi(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Esse é um caminho fechado, suave por partes e, o que é essencial, está inteiramente contido no disco de centro 1 e raio 1, já que $|\Phi(\gamma(t)) - 1| < 1$. Logo

$$\int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = \int_0^1 \frac{\Phi'(\gamma(t))}{\Phi(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$

Mas $\int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$ nada mais é do que a integral da função $h(z) = \frac{1}{z}$ ao longo do caminho φ ,

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$

Como φ está contido no disco $D(1, 1)$ e $\log z$ é uma primitiva de $h(z)$ na região (ramo principal) que contém esse disco, logo pelo teorema 3.4

$$\int_{\gamma} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = \int_{\varphi} \frac{1}{z} dz = 0.$$

□

Uma consequência do Teorema de Rouché é o que será visto na próxima seção.

4.4.1 O Teorema Fundamental da Álgebra

Já mostramos no teorema 3.14 que todo polinômio não constante possui pelo menos um zero. Agora mostraremos um resultado mais geral, que garante que todo polinômio de grau n possui exatamente n zeros contados com multiplicidade.

Teorema 4.8 (Fundamental da Álgebra). *Seja $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio de grau n . Então $P(z)$ tem precisamente n zeros, contados com multiplicidade.*

Demonstração. Escreva $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$. A ideia é comparar $P(z)$ com $Q(z) = a_n z^n$ e usar o Teorema de Rouché, pois, sabemos que Q possui zero de multiplicidade n em $z = 0$. Temos

$$|Q(z) - P(z)| = |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|$$

e se $z \neq 0$

$$\left| \frac{Q(z) - P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right|.$$

Agora

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| = 0$$

e portanto, podemos achar $R > 0$ tal que se $|z| > R$ então

$$\left| \frac{Q(z) - P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| < 1.$$

Assim sendo, escolhendo qualquer círculo $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ com centro em 0 e raio $r > R$ temos que, ao longo de γ ,

$$|Q(z) - P(z)| < |Q(z)|.$$

Pelo teorema de Rouché 4.7, P tem precisamente n zeros, contados com multiplicidade.

□

Considerações Finais

O estudo das funções de uma variável complexa, apesar das semelhanças com o estudo de funções de variável real; principalmente nos conceitos iniciais sobre limites, continuidade e diferenciabilidade; possui diversas diferenças, muitas das quais são resultados fortes e de consequências fascinantes. Embora o estudo de análise complexa seja, na teoria, mais geral do que a análise real, não há como se desvincular totalmente desta, pois, é notável em diversos teoremas demonstrados, a dependência que temos dela.

A definição de função holomorfa é o ponto crucial para desenvolver toda a teoria de integração complexa. Considerando uma curva fechada em um domínio, vemos que quando uma função f é holomorfa, sua integral sobre esta curva é nula, o que é equivalente à existência de uma primitiva dessa função. Vemos a importância do Teorema de Cauchy-Goursat para triângulos, pois através deste podemos mostrar a Fórmula Integral de Cauchy, mostrando que ao integrar funções holomorfas ao longo da fronteira de um disco fechado, obtemos seus valores nos pontos interiores a esse disco. Como consequência desse resultado, mostramos que toda função holomorfa é analítica e possui derivadas de todas as ordens, propriedades que somente essa classe de funções possui.

O desenvolvimento da série de Laurent nos possibilita estudar as singularidades e resíduos de funções holomorfas. O conceito de resíduo é fundamental para a demonstração do princípio do argumento, pelo qual é possível calcular zeros e polos de funções holomorfas. O teorema de Rouché nos dá a condição essencial para enfim demonstrarmos o resultado central, o Teorema Fundamental da Álgebra.

Por fim, após a realização desse trabalho, é pretendido dar continuidade e estudar as funções meromorfas, funções de variável complexa definidas como produto infinito de funções holomorfas e as funções gama e zeta de Riemann. Pretendemos também fazer um estudo mais voltados para aplicações em mecânica dos fluidos através de aplicações conformes.

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- [2] CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.
- [3] LIMA, E. L. **Análise real**: vol. 2. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [4] LINS NETO, A. **Funções de uma Variável Complexa**, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1983.
- [5] PONNUSAMY, S; SILVERMAN, H. **Complex Variables with Applications**, Boston: Birkhäuser, 2006.
- [6] SHOKRANIAN, S. **Uma Introdução à Variável Complexa**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011.
- [7] SOARES, M. G. **Cálculo em uma Variável Complexa**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

Apêndice A

Números Complexos

Definição A.1. Um número complexo z pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais x e y ,

$$z = (x, y) \tag{A.1}$$

sujeito às regras e leis de operação a serem especificadas abaixo.

Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, a soma e a multiplicação, denotadas por $z_1 + z_2$ e $z_1 z_2$, respectivamente, são definidas como:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{A.2}$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{A.3}$$

O par $(x, 0)$ é identificado com o número real x :

$$(x, 0) = x.$$

Esta regra permite configurar os números reais como um subconjunto dos números complexos.

Convém dar um nome e um símbolo ao par $(0, 1)$. Este par será chamado *unidade imaginária* e indicado por i :

$$(0, 1) = i$$

Os números reais x e y são respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginária* de z , sendo indicados por

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = y. \quad (\text{A.4})$$

Um par do tipo $(0, y)$ é um número *imaginário puro*.

Com isso, temos o seguinte

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Portanto um número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito na forma algébrica como

$$z = x + iy.$$

Definição A.2. O conjugado complexo, ou simplesmente conjugado, de um número complexo $z = x + iy$ é o número

$$\bar{z} = x - iy.$$

Lema A.1. Sejam z, w números complexos. Então, as seguintes propriedades são verdadeiras:

- (i) $|z|^2 = z \bar{z}$
- (ii) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- (iii) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- (iv) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- (v) $\overline{(zw)} = \bar{z} \bar{w}$
- (vi) $|zw| = |z||w|$.

Proposição A.2 (Desigualdade triangular). Sejam z e w números complexos. Então

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Demonstração. Pelos itens (i) e (iv) do lema A.1 anterior, temos

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z \bar{w}). \quad (\text{A.5})$$

Por outro lado

$$(|z| + |w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|. \quad (\text{A.6})$$

Subtraindo A.6 e A.5, obtemos

$$(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2|z||w| - 2\operatorname{Re}(z \bar{w}).$$

Pelo item (ii) do lema A.1

$$2|z||\bar{w}| - 2\operatorname{Re}(z \bar{w}) \geq 0.$$

Portanto, $(|z| + |w|)^2 \geq |z + w|^2$. Calculando a raiz quadrada de ambos os lados, temos

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

□

Proposição A.3. Se z um número complexo da forma $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Então

$$|z| \leq |x| + |y|.$$

Demonstração. Inicialmente, vemos que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ é verdade que $2|x||y| \geq 0$. Agora, somando $|x^2| + |y^2|$ à desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} |x^2| + 2|x||y| + |y^2| &\geq |x^2| + |y^2| \\ (|x| + |y|)^2 &\geq x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Mas $|z|^2 = x^2 + y^2$, logo

$$|z|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

e segue daí que

$$|z| \leq |x| + |y|.$$

□

Apêndice B

Noções Topológicas e Curvas em $\mathbb{C}$

Subconjuntos de $\mathbb{C}$

Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}$ um número positivo. O conjunto $D(z_0, a)$ formado pelos pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem

$$|z - z_0| < a$$

é chamado disco aberto de centro em z_0 e raio a . Já o conjunto $\overline{D}(z_0, a)$ formado pelos pontos tais que

$$|z - z_0| \leq a$$

é chamado disco fechado de centro z_0 e raio a . O círculo de centro em z_0 e raio a , denotado por $\partial\overline{D}(z_0, a)$, consiste precisamente dos pontos à distância a do ponto z_0 , ou seja, dos pontos z satisfazendo $|z - z_0| = a$.

Definição B.1. Um subconjunto U do plano é um conjunto aberto se, dado qualquer ponto z em U podemos encontrar $a \in \mathbb{R}^+$ tal que o disco de centro z e raio a está inteiramente contido em U .

Por exemplo, o plano $\mathbb{C}$ é aberto, bem como é o disco $D(z_0, a)$.

Definiremos conjunto fechado através do teorema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [3], p. 40.

Teorema B.1. *Um subconjunto V do plano é fechado se, e somente se, seu complementar $V^C = \mathbb{C} \setminus V$ é aberto.*

Teorema B.2. *A interseção $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \cap \cdots$ de uma infinidade de conjuntos fechados do plano complexo é um conjunto fechado.*

Demonstração. Ver [3], p. 41. □

Exemplo B.1. Um conjunto constituído de um único ponto $\{z_0\}$ é um conjunto fechado, assim como o círculo $\partial\overline{D}(z_0, a)$.

Definição B.2. Um subconjunto X do plano é dito limitado se existe um número real R , tal que $|z| < R$, para todo $z \in X$

Definição B.3. Um subconjunto K do plano é dito compacto se for fechado e limitado.

Exemplo B.2. O disco fechado $\overline{D}(z_0, a)$ é um conjunto compacto.

Definição B.4. Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$, a fronteira ou bordo de A é o conjunto

$$\partial A = \{z \in \mathbb{C}; \forall r > 0, D(z, r) \cap A \neq \emptyset \text{ e } D(z, r) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

Exemplo B.3. O círculo $\partial\overline{D}(z_0, a)$ é a fronteira tanto de $\overline{D}(z_0, a)$ quanto de $D(z_0, a)$.

Curvas no plano complexo

Definição B.5. Um caminho suave em $\mathbb{C}$ é uma aplicação

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$$

com derivada contínua em todos os pontos de I , onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo da forma $I = [a, b]$, $a < b$.

Definição B.6. Dizemos que γ é um caminho fechado se $\gamma(a) = \gamma(b)$, onde $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados ponto inicial e ponto final do caminho γ , respectivamente.

Na definição de caminho suave está subentendida a noção de sentido ou orientação do caminho percorrido. Mais precisamente, o caminho é percorrido do ponto inicial

ao ponto final à medida que $t \in [a, b]$ cresce. Podemos inverter o sentido de percurso definindo o caminho reverso de γ , γ^- , por

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b.$$

Definição B.7. Um caminho suave por partes em $\mathbb{C}$ é uma coleção finita de caminhos suaves $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$, ..., $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo: $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$, $1 \leq i \leq n - 1$.

Usaremos a notação $\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$ quando nos referirmos a caminhos suaves por partes.

Definição B.8. Quando $\gamma_1(a_1) = \gamma_n(b_n)$ diremos que o caminho suave por partes γ é fechado.

Definição B.9. Uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ é dita simples, se $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$ então $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Definição B.10. Uma curva de Jordan suave por partes é um caminho suave por partes, fechado e simples.

Definição B.11. Um subconjunto não vazio $U \subset \mathbb{C}$ é chamado um domínio se U é aberto e se, dados dois pontos quaisquer $x, y \in U$, existe um caminho suave por partes, inteiramente contido em U unindo o ponto x ao ponto y .

Exemplo B.4. Veremos agora exemplos de conjuntos que são domínios e conjuntos que não são.

1. São domínios:

- (i) $\mathbb{C} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$
- (ii) o conjunto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0, 0\}$
- (iii) qualquer anel $A = \{z \in \mathbb{C}; a < |z - z_0| < b\}$.

2. Não são domínios:

- (i) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
- (ii) $D(1, 1/2) \cup D(i, 1/2)$.

Apêndice C

Funções Reais de duas Variáveis

Definição C.1. Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D e L um número real. Definimos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Definição C.2. Diremos que uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, é diferenciável no ponto $a = (x_0, y_0) \in U$ quando existirem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e além disso, para todo vetor $v = (h, k)$ tal que $a + v \in U$, tivermos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + r(h, k)$$

onde $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h, k)}{|(h, k)|} = 0$.

A condição $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} r(h, k)/|(h, k)| = 0$ significa, entretanto, mais do que $r(h, k) \rightarrow 0$; ela quer dizer que $r(h, k)$ tende a zero mais rapidamente do que $|(h, k)|$.

Definição C.3. Uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, diz-se de classe C^1 quando existem, em cada ponto $x \in U$, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, onde cada derivada é contínua em U .

Teorema C.1 (de Green). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Seja $V \subset U$ um subconjunto satisfazendo:*

- (i) V é compacto
- (ii) ∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes
- (iii) $V \setminus \partial V$ é um domínio

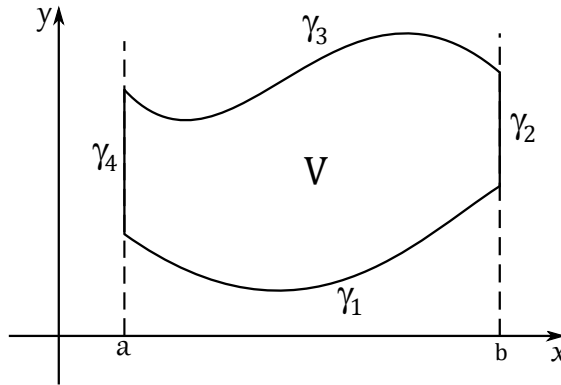
Suponha que V e ∂V tem orientação compatível. Escrevendo $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, temos que

$$\int_{\partial V} f = \int_{\partial V} u \, dx + v \, dy = \iint_V \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Demonstração. Provemos que $\int_{\partial V} u \, dx = - \iint_V \frac{\partial u}{\partial y} dx \, dy$.

Considere

$$V = \{(x, y); a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$



A fronteira consiste dos quatro caminhos

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, g_1(t)), & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t) &= (b, t), & g_1(a) \leq t \leq g_2(a) \\ \gamma_3(t) &= (t, g_2(t)), & a \leq t \leq b \\ \gamma_4(t) &= (a, t), & g_1(a) \leq t \leq g_2(a). \end{aligned}$$

Para que V e ∂V tenham orientação compatível devemos ter

$$\partial V = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-.$$

Agora

$$\int_{\partial V} u \, dx = \int_{\gamma_1} u \, dx + \int_{\gamma_2} u \, dx + \int_{\gamma_3^-} u \, dx + \int_{\gamma_4^-} u \, dx$$

mas, para γ_2 e γ_4 temos $x'(t) = 0$ e portanto as integrais são nulas ao longo desse caminhos. Ficamos com

$$\int_{\partial V} u \, dx = \int_{\gamma_1} u \, dx - \int_{\gamma_3} u \, dx.$$

Essas se expressam por

$$\int_{\gamma_1} u \, dx = \int_a^b u(t, g_1(t)) \, dt \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_3} u \, dx = \int_a^b u(t, g_2(t)) \, dt$$

e temos

$$\int_{\gamma_1} u \, dx = \int_a^b [u(t, g_1(t)) - u(t, g_2(t))] \, dt. \quad (\text{C.1})$$

Por outro lado

$$\iint_V \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy = \int_a^b \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} \frac{\partial u}{\partial y} \, dy \, dt = \int_a^b [u(t, g_2(t)) - u(t, g_1(t))] \, dt \quad (\text{C.2})$$

Daí, de C.1 e C.2 concluímos que

$$\int_{\partial V} u \, dx = - \iint_V \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy. \quad (\text{C.3})$$

De maneira análoga mostramos que

$$\int_{\partial V} v \, dy = \iint_V \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \, dy. \quad (\text{C.4})$$

Somando as equações C.3 e C.4 obtemos

$$\int_{\partial V} u \, dx + v \, dy = \iint_V \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

□