Espaços Métricos

Leandro F. Aurichi [1]

30 de novembro de 2010

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo, São Carlos, SP

Sumário

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1 Métricas

Definição 1.1.1. Dado X um conjunto não vazio, chamamos de uma **métrica** sobre X uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, para todo $x, y, z \in X$:

(a) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

(b) $d(x, x) = 0$;

(c) $d(x, y) = d(y, x)$;

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

Tal função chamamos de **distância** ou **métrica**. A um conjunto X munido de uma métrica d damos o nome de um **espaço métrico** e denotamos por (X, d).

Exemplo 1.1.2. A reta real com a função $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico. A métrica d é dita a métrica usual de $\mathbb{R}$. Para exemplificar, vamos mostrar a condição (d) de métrica, deixando as outras como exercício. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{array}{rcl} d(x,z) & = & |x - z| \\ & = & |x - z + y - y| \\ & \leq & |x - y| + |y - z| \\ & = & |x - y| + |z - y| \\ & = & d(x, y) + d(y, z) \end{array}$$

Exemplo 1.1.3. O conjunto $\mathbb{R}^n$ da n-uplas de números reais admite uma métrica dada por $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ onde $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Como exemplo, vamos mostrar a condição (c) de métrica, deixando as outras como exercício. Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Temos

$$\begin{array}{rcl} d(x,y) & = & \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ & = & \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \\ & = & d(y, x) \end{array}$$

Exemplo 1.1.4. Considere o conjunto das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $a_n \in [0,1]$. Tal conjunto admite uma métrica $d(a,b) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$ onde $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como exemplo, vamos mostrar a condição (a) de métrica, deixando as outras como exercício. Sejam $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como acima. Suponha $a \neq b$. Isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \neq b_k$. Temos:

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\} \\ &\geq |a_k - b_k| \\ &> 0 \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.5. Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, dizemos que uma função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** sobre V se, dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$;

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;

(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Nestas condições, V admite a métrica dada por $d(u,v) = \|u - v\|$ (chamamos esta métrica de **métrica induzida pela norma** $\|\cdot\|$). Como exemplo, vamos mostrar que d satifaz a condição (b) de métrica. Seja $u \in V$. Temos

$$\begin{aligned} d(u,u) &= \|u - u\| \\ &= \|0\| \\ &= \|0 \cdot 0\| \\ &= 0\|0\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

É claro que sobre um mesmo conjunto podemos ter métricas diferentes:

Exemplo 1.1.6. Se X é um conjunto não vazio, uma métrica sobre X é a função

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Esta é chamada a **métrica discreta** sobre X.

Definição 1.1.7. Seja (X,d) um espaço métrico. Dizemos que Y é um **subespaço** de X se $Y \subset X$ e adotarmos em Y a métrica d restrita a Y.

Observação 1.1.8. Note que, de fato, se Y é um subespaço do espaço métrico (X,d), então (Y,d') também é um espaço métrico, onde d' é a restrição de d a Y.

Exemplo 1.1.9. Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos. Definimos sobre $X_1 \times X_2$ a seguinte métrica, que chamamos de **métrica produto**:

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$

onde $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in X_1 \times X_2$.

Vamos terminar esta seção mostrando a noção de distância euclidiana que temos sobre o $\mathbb{R}^n$ de fato nos dá uma métrica. Vamos mostrar tal fato usando alguns resultados mais gerais:

Definição 1.1.10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Chamos uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ de um **produto interno** se são satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $a, b, c \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$;

(b) $\langle \lambda a, b\rangle = \lambda\langle a, b\rangle$;

(c) $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$;

(d) $\langle a, a\rangle > 0$ se $a \neq 0$

Proposição 1.1.11 (desigualdade de Cauchy-Schwartz). *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, para quaisquer $a, b \in V$, vale a sequinte desigualdade:*

$$\langle a, b\rangle^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$$

Demonstração. Se $a = 0$, a desigualdade vale trivialmente (pois $\langle 0, b\rangle = 0$). Vamos supor $a \neq 0$. Defina $\lambda = \frac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle}$ e $c = b - \lambda a$. Note que

$$\begin{aligned}
\langle a, c\rangle &= \langle a, b - \lambda a\rangle \\
&= \langle a, b\rangle - \lambda\langle a, a\rangle \\
&= \langle a, b\rangle - \tfrac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle}\langle a, a\rangle \\
&= \langle a, b\rangle - \langle a, b\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\langle b, b\rangle &= \langle c + \lambda a, c + \lambda a\rangle \\
&= \langle c, c + \lambda a\rangle + \lambda\langle a, c + \lambda a\rangle \\
&= \langle c, c\rangle + \lambda\langle c, a\rangle + \lambda\langle a, c\rangle + \lambda^2\langle a, a\rangle \\
&= \langle c, c\rangle + \lambda^2\langle a, a\rangle
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\langle b, b\rangle = \langle c, c\rangle + \lambda^2\langle a, a\rangle \geq \lambda^2\langle a, a\rangle = \frac{\langle a,b\rangle^2}{\langle a,a\rangle^2}\langle a, a\rangle = \frac{\langle a,b\rangle^2}{\langle a,a\rangle}$. Assim, $\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle \geq \langle a, b\rangle^2$, como queríamos. □

Proposição 1.1.12. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então a função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ para $a \in V$ é uma norma. Chamamos esta norma de a* **norma induzida pelo produto interno** $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Demonstração. Vamos apenas verificar que, dados $a, b \in V$, temos que $\|a + b\| \leq \|a\|+\|b\|$, deixando as outras condições como exercício. Temos:

$$\begin{aligned}
\|a + b\|^2 &= \langle a + b, a + b\rangle \\
&= \langle a, a + b\rangle + \langle b, a + b\rangle \\
&= \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle \\
&= \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle \\
&\overset{1.1.11}{\leq} \langle a, a\rangle + 2\sqrt{\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle} + \langle b, b\rangle \\
&= \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 \\
&= (\|a\| + \|b\|)^2
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.1.13. O conjunto $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico com a função

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

onde $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Esta é conhecida como **métrica euclidiana** do $\mathbb{R}^n$. Para verificar este exemplo, basta mostrar que $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ é um produto interno. Depois, é só mostrar que tal produto interno induz uma norma que induz a métrica definida acima.

Exercícios de 1.1

1. Mostre que as funções definidas nos exemplos acima são de fato métricas.
2. No exemplo 1.1.4, teríamos algum problema se em vez de tomarmos cada $a_n \in [0,1]$, tomássemos cada $a_n \in \mathbb{R}$?
3. Se (X, d) é um espaço métrico, mostre que (X, d') também é um espaço métrico onde $d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$.
4. Mostre que uma definição equivalente a que apresentamos de uma métrica e a de que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz, para $a, b, c \in X$:

   (a) $d(a,b) = 0$ se, e somente se, $a = b$;

   (b) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(c,b)$.

   Dica: Mostre que $d(a,b) \leq d(b,a)$.

1.2 Bolas, conjuntos limitados e distâncias

Definição 1.2.1. Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. Chamamos de **bola aberta** de centro x e raio r em X o conjunto

$$B_r^X(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

e chamamos de **bola fechada** de centro x e raio r em X o conjunto

$$B_r^X[x] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Se o X em questão estiver claro no contexto, denotaremos respectivamente por $B_r(x)$ e $B_r[x]$.

Definição 1.2.2. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Dizemos que Y é **limitado** se existem $x \in X$ e $r > 0$ tais que $Y \subset B_r(x)$.

Exemplo 1.2.3. O subconjunto $[0, 1[$ é limitado em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

Proposição 1.2.4. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Dado* $A \subset X$, *são equivalentes:*

(a) A *é limitado;*

(b) existem $x_1, ..., x_n \in X$ *e* $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$ *positivos tais que* $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$*;*

Demonstração. Suponha A limitado. Então existe $r > 0$ e $x \in X$ tal que $A \subset B_r(x)$ e, portanto, temos (b).

Agora suponha que existam $x_1, ..., x_n \in X$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$ positivos tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$. Sejam $j_1 = \max\{r_1, \ldots r_n\}$ e $j_2 = \max\{d(x_1, x_i) : i = 2, ..., n\}$. Vamos mostrar que $A \subset B_r(x_1)$, onde $r = j_1 + j_2 + 1$. Seja $a \in A$. Então existe i tal que $a \in B_{r_i}(x_i)$. Temos:

$$\begin{aligned} d(a, x_1) &\leq d(a, x_i) + d(x_i, x_1) \\ &\leq r_i + j_2 \\ &\leq j_1 + j_2 \\ &< r \end{aligned}$$

Logo, $A \subset B_r(x_1)$. □

Corolário 1.2.5. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $A_1, ..., A_n \subset X$ *conjuntos limitados. Então* $\bigcup_{i=1}^n A_i$ *é um conjunto limitado.*

Demonstração. Para cada A_i existem x_i e $r_i > 0$ tais que $A_i \subset B_{r_i}(x_i)$. Portanto, $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$ é um conjunto limitado pela proposição anterior. □

Definição 1.2.6. Sejam (X, d) um espaço métrico de A e B subconjuntos não vazios de X. Definimos a **distância** entre A e B por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. No caso em que $A = \{a\}$ ou $B = \{b\}$ denotamos por $d(a, B)$ e $d(A, b)$ no lugar de $d(\{a\}, B)$ e $d(A, \{b\})$ respectivamente.

Exercícios de 1.2

1. Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. Mostre que, se $s > 0$ e $s < r$, então $B_s(x) \subset B_r(x)$.

2. Mostre que se trocarmos $B_r(x)$ na definição de conjunto limitado por $B_r[x]$ obtemos uma definição equivalente. Isto é, um conjunto satisfaz a definição "velha" se, e somente se, satisfaz a "nova".

3. Sejam x, y pontos distintos num espaço métrico e $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$. Mostre que:
   (a) $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$;
   (b) Exiba um espaço métrico X e $x, y \in X$ onde $B_\varepsilon[x] \cap B_\varepsilon[y] \neq \emptyset$.
   (c) Exiba um espaço métrico X e $x, y \in X$ onde $B_\varepsilon[x] \cap B_\varepsilon[y] = \emptyset$.

4. Mostre que são equivalentes para um subconjunto A de um espaço métrico:
   (a) A é limitado;
   (b) existe $k > 0$ tal que $d(x, y) \leq k$ para todo $x, y \in A$.

5. Mostre que se Y é limitado e $Z \subset Y$, então Z é limitado.

6. Mostre que se (X, d) é um espaço métrico e $x \in X$, então:

   (a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{n+1}}(x) = \{x\}$;

   (b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n+1}(x) = X$.

7. Mostre que a intersecção de uma família de conjuntos limitados é um conjunto limitado.

8. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Calcule $d(0, \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\})$.

9. Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana. Calcule $d(A, B)$ onde A é o eixo x e B é o gráfico da função $\frac{1}{x}$ para $x \in]0, +\infty[$.

10. Seja (X, d) um espaço métrico. Suponha que para algum $x \in X$ e algum $r > 0$, $A = B_r[x] \setminus B_r(x) \neq \emptyset$. Calcule $d(x, A)$.

1.3 Funções contínuas

Definição 1.3.1. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Dizemos que uma função $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é uma **função contínua** no ponto $x \in X_1$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in X_1$ tal que $d_1(x, y) < \delta$, temos $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Se f é contínua em todo ponto $x \in X$, dizemos simplesmente que f é uma função contínua. Se f é bijetora e sua inversa também é contínua, dizemos que f é um **homeomorfismo**.

Proposição 1.3.2. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então a função $f : X \longrightarrow X$ dada por $f(x) = x$ é contínua.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Defina $\delta = \varepsilon$. Temos, para $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$, que $d(f(x), f(y)) = d(x, y) < \varepsilon$. □

Exemplo 1.3.3. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) dois espaços métricos, sendo que d_1 é a métrica discreta. Então toda $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é contínua. De fato, dado $x \in X_1$ e $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \frac{1}{2}$. Assim, se $d_1(x, y) < \delta$, então $d_2(f(x), f(y)) = 0$, já que para $d_1(x, y) < \delta$, temos que $x = y$.

Proposição 1.3.4. *Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $f : X \longrightarrow X$ e $g : X \longrightarrow X$ funções contínuas. Então $f \circ g : X \longrightarrow X$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para $x \in X$ é uma função contínua*[1].

[1] Note que com a demonstração apresentada aqui, podemos mostrar que $f \circ g$ é contínua em x se f é contínua em $g(x)$ e g é contínua em x.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $y \in X$ tal que, se $d(g(x), y) < \delta_1$, então

$$d(f(g(x)), f(y)) < \varepsilon.$$

Como g é contínua, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in X$, se $d(x, z) < \delta$, então

$$d(g(x), g(z)) < \delta_1.$$

Assim, dado $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$, temos que $d(g(x), g(y)) < \delta_1$ e, portanto, $d(f(g(x)), f(g(y))) < \varepsilon$. □

Exercícios de 1.3

1. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \longrightarrow X_2$ uma função. Dado $x \in X$, mostre que são equivalentes:

   (a) f é contínua em x;

   (b) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f[B_\delta^{X_1}(x)] \subset B_\varepsilon^{X_2}(f(x))$.

2. Mostre que a noção de continuidade apresentada aqui com relação a $\mathbb{R}$ com a métrica usual é equivalente com relação à noção normalmente apresentada em cursos de cálculo.

3. Analogamente ao exercício anterior, mas com relação a espaços vetoriais e restrito a funções lineares.

4. Mostre o resultado análogo à Proposição 1.3.4 para o caso em que $f : X_2 \longrightarrow X_3$, $g : X_1 \longrightarrow X_2$ e (X_1, d_1), (X_2, d_2) e (X_3, d_3) são espaços métricos.

5. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Seja $f : X_1 \longrightarrow X_2$ sobrejetora tal que $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$. Uma função como essa é dita uma **isometria** entre X_1 e X_2 e, neste caso, (X_1, d_1) e (X_2, d_2) são ditos **espaços isométricos**. Mostre que:

   (a) f é injetora;

   (b) a inversa de f também é uma isometria;

   (c) f é contínua.

6. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma **função uniformemente contínua** se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, dados $a, b \in X$, se $d(a, b) < \delta$ então $d'(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Mostre que:

   (a) toda função uniformemente contínua é contínua;

   (b) a composta de funções uniformemente contínuas também é uniformemente contínua.

1.4 Exercícios do Capítulo 1

1. Sejam (X, d) um espaço métrico e Y subespaço de X.
   (a) Se $y \in Y$ e $r > 0$, então $B_y^Y(r) = B_y^X(r) \cap Y$.
   (b) Se $x \in X$ e $r > 0$, então, para qualquer $y \in Y \cap B_r^X(x)$ existe $s > 0$ tal que $y \in B_s^Y(y) \subset Y \cap B_r^X(x)$.

2. Seja (X, d') um espaço métrico dado como no Exercício 3 de 1.1. Mostre que X é um conjunto limitado.

3. Sejam (X, d_1) e (Z, d_2) espaços métricos e Y um subespaço de X.
   (a) Mostre que, dada $f : X \longrightarrow Z$ contínua, a restrição de f a Y também é uma função contínua.
   (b) Mostre um contraexemplo para a afirmação "Dada $g : Y \longrightarrow Z$ contínua, existe $f : X \longrightarrow Z$ contínua tal que g é a restrição de f a Y".

4. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos, onde X_2 é limitado. Mostre que o conjunto $\mathcal{F}(X_1, X_2)$ de todas as funções $f : X_1 \longrightarrow X_2$ admite uma métrica d dada por $d(f, g) = \sup_{x \in X_1} d(f(x), g(x))$.
   Obs.: Definimos $\mathcal{C}(X_1, X_2)$ como o subespaço de $(\mathcal{F}(X, Y), d)$ formado pelas funções contínuas de X_1 em X_2.