Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Computação

Árvores Balanceadas

Nelson Cruz Sampaio Neto
nelsonneto@ufpa.br

25 de abril de 2016

Introdução

- A árvore de busca (ou pesquisa) é uma estrutura de dados muito eficiente para armazenar informação.
- Estrutura adequada quando existe necessidade de considerar todos ou alguma combinação de requisitos, tais como:

  i. acessos direto e sequencial eficientes;

  ii. facilidade de inserção e retirada de registros;

  iii. boa taxa de utilização de memória; e

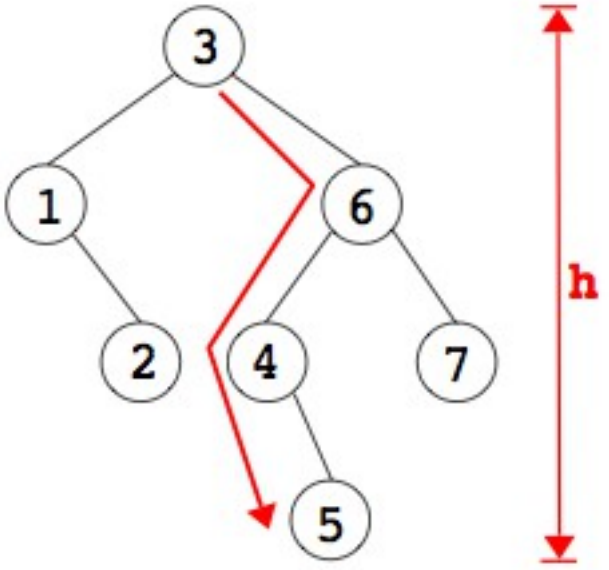
  iv. utilização de memória primária e secundária.

Introdução

- As árvores de busca binária são estruturas de dados encadeadas em que cada nó é um objeto.

- Toda árvore de busca binária deve satisfazer a propriedade:

  - Seja x um nó qualquer da árvore
  - Seja y um nó da sub-árvore da esquerda, então chave[y] ≤ chave[x]
  - Seja y um nó da sub-árvore da direita, então chave[y] ≥ chave[x]



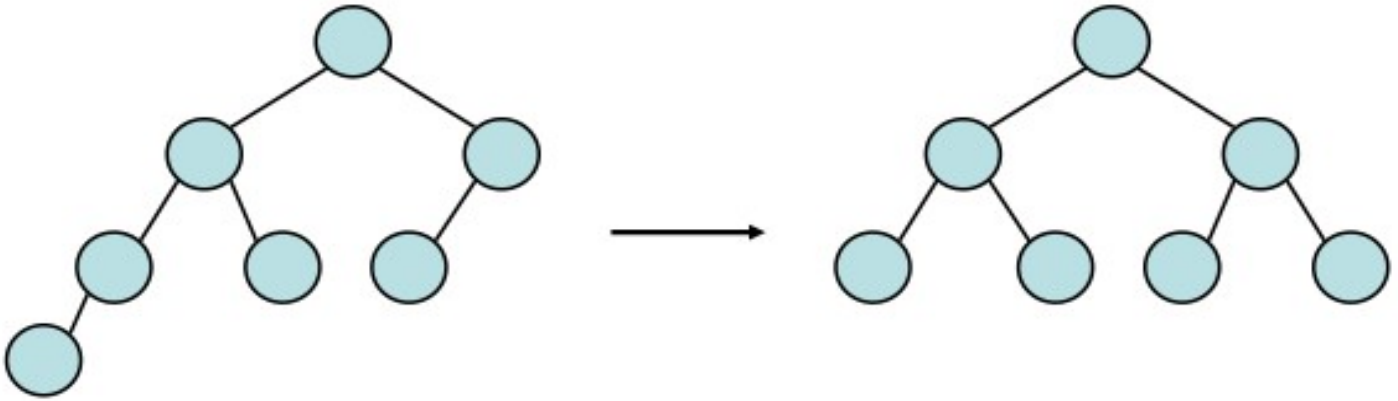
Introdução

- Árvores de pesquisa binária admitem operações de conjuntos dinâmicos: seleção, inserção, remoção, entre outras.
- As operações levam um tempo proporcional à **altura da árvore**.
  Complexidade temporal no pior caso: $O(h)$.
- Para uma árvore completa de n nós, tais operações levam um tempo proporcional a $O(\log n)$. Muito bom!
- Mas se a árvore for uma lista de nós (ou seja, degenerada), as operações podem levar $O(n)$. Ruim!

Introdução

- Embora uma árvore completa possua altura proporcional a *log n*, após uma operação de inserção, p.e., a árvore pode perder essa característica.

- Uma solução seria aplicar um algoritmo que tornasse a árvore novamente completa, porém, o custo dessa operação seria no mínimo proporcional a *n*, ou seja, $\Omega(n)$. Ruim!



Introdução

- **Objetivo**: manter o custo das operações na mesma ordem de grandeza da altura de uma árvore completa, ou seja, $O(\log n)$, onde n é o número de nós da árvore.

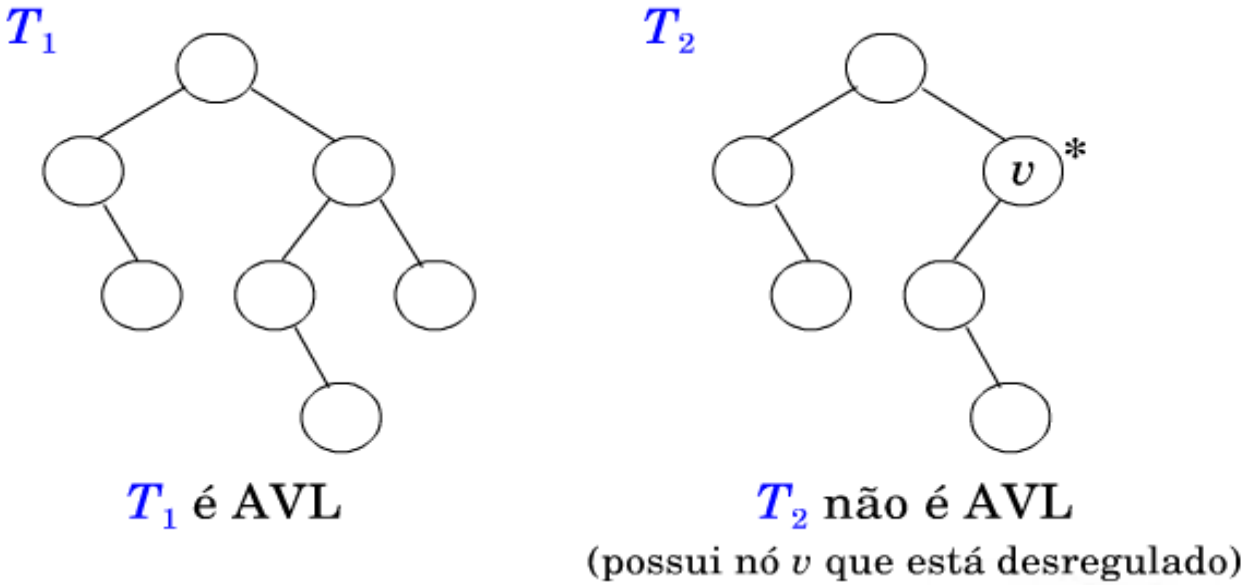
- **Árvore balanceada**: o custo das operações de busca, inserção, remoção e arrumação da árvore mantém-se em $O(\log n)$.

- Há implementações de árvores de busca binária balanceadas que garantem altura $O(\log n)$, tais como árvores vermelho-preto e árvores AVL.

- As árvores B também são consideradas balanceadas, mas não são binárias e possuem como característica o armazenamento de mais de uma chave por nó.

Árvores AVL

- **Definição:** É uma árvore de busca binária altamente balanceada. Em tal árvore, as alturas das duas sub-árvores a partir de cada nó **diferem no máximo em uma unidade**.
- Também chamada de árvore balanceada pela altura.
- Se uma dada árvore é dito AVL, então todas as suas sub-árvores também são AVL.



Árvores AVL

- As operações feitas em uma árvore AVL geralmente envolvem os mesmos algoritmos de uma árvore de busca binária.
- A altura de uma árvore AVL com *n* nós é *O*(*log n*). Assim, suas operações levam um tempo *O*(*log n*).
- Para definir o balanceamento é utilizado um fator específico:

$$FB(v) = h_e(v) - h_d(v)$$

FB(v) : fator de balanceamento do nó *v*
$h_e(v)$: altura da sub-árvore da esquerda
$h_d(v)$: altura da sub-árvore da direita

Árvores AVL

- Nós balanceados (ou **regulados**) são aqueles onde os valores de FB são -1, 0 ou +1.

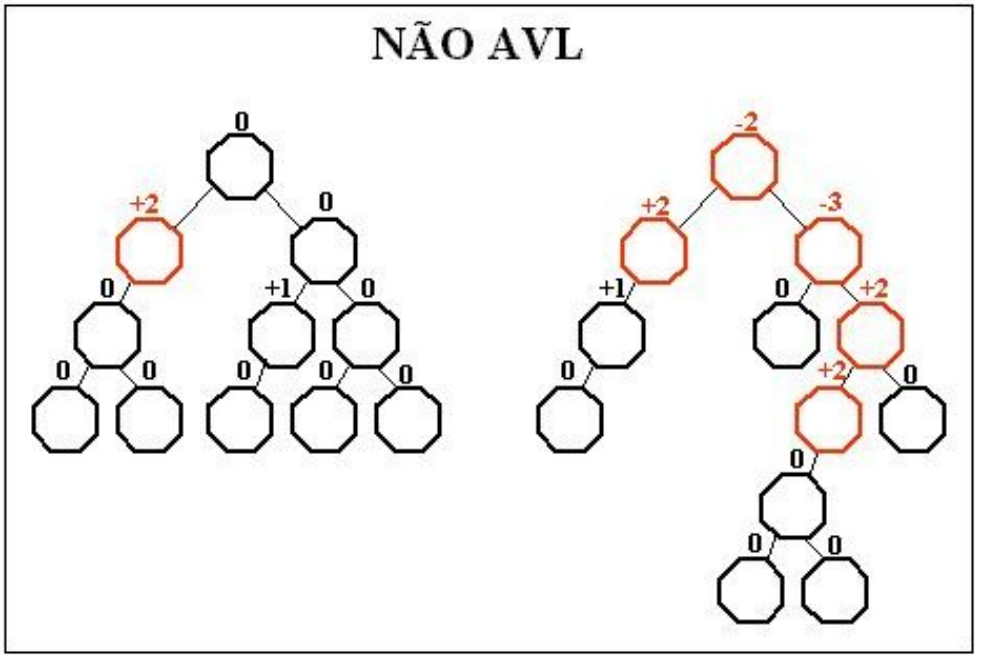
  -1 : sub-árvore direita mais alta que a esquerda
  0 : sub-árvore esquerda igual a direita
  +1 : sub-árvore esquerda mais alta que a direita

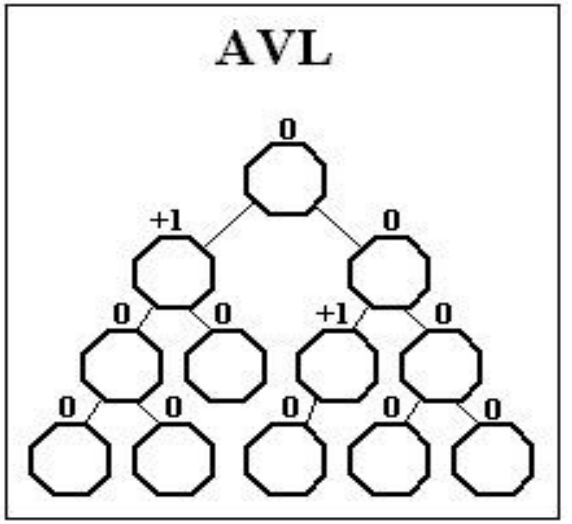
- Qualquer nó com FB diferente desses valores é dito **desregulado**.

  > 1 : sub-árvore esquerda está desregulando o nó
  < -1 : sub-árvore direita está desregulando o nó

- Se todos os nós da árvore são regulados, então a árvore é AVL.

Exemplo

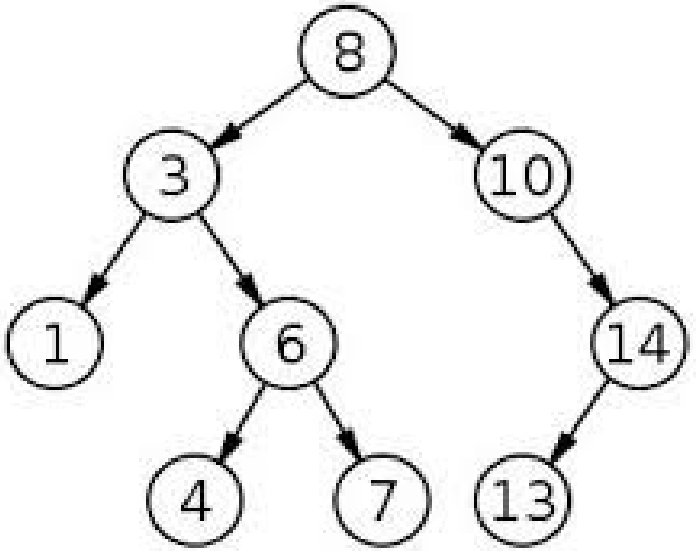




- Nos dois exemplos de árvore não AVL acima, percebe-se em vermelho os nós desregulados com FB < -1 ou FB > +1.

- Curiosidade: AVL = **A**delson-**V**elskii, G. e **L**andis, E. M.

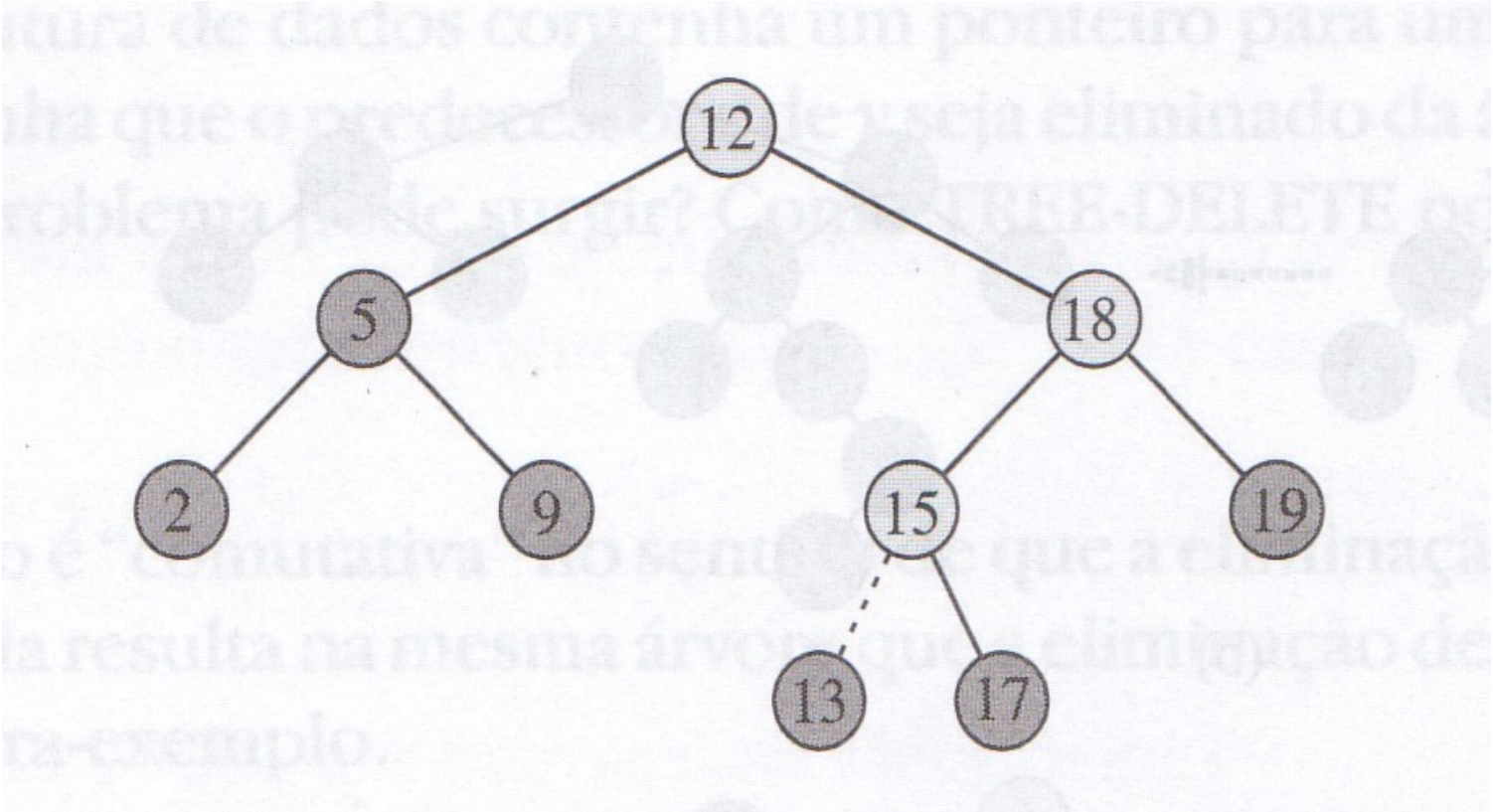
Operação de Seleção



- Busca pela chave 4 na árvore binária acima: 8 – 3 – 6 – 4.
- A chave mínima é 1, seguindo os ponteiros a esquerda a partir da raiz.
- A chave máxima é 14, seguindo os ponteiros a direita a partir da raiz.

Operação de Inserção

- Inserção do nó com chave 13. Os nós levemente sombreados indicam o caminho desde a raiz até a posição em que o item é inserido.



Operação de Remoção

- A operação de remoção de um nó *z* em uma árvore binária de busca consiste de 3 casos:

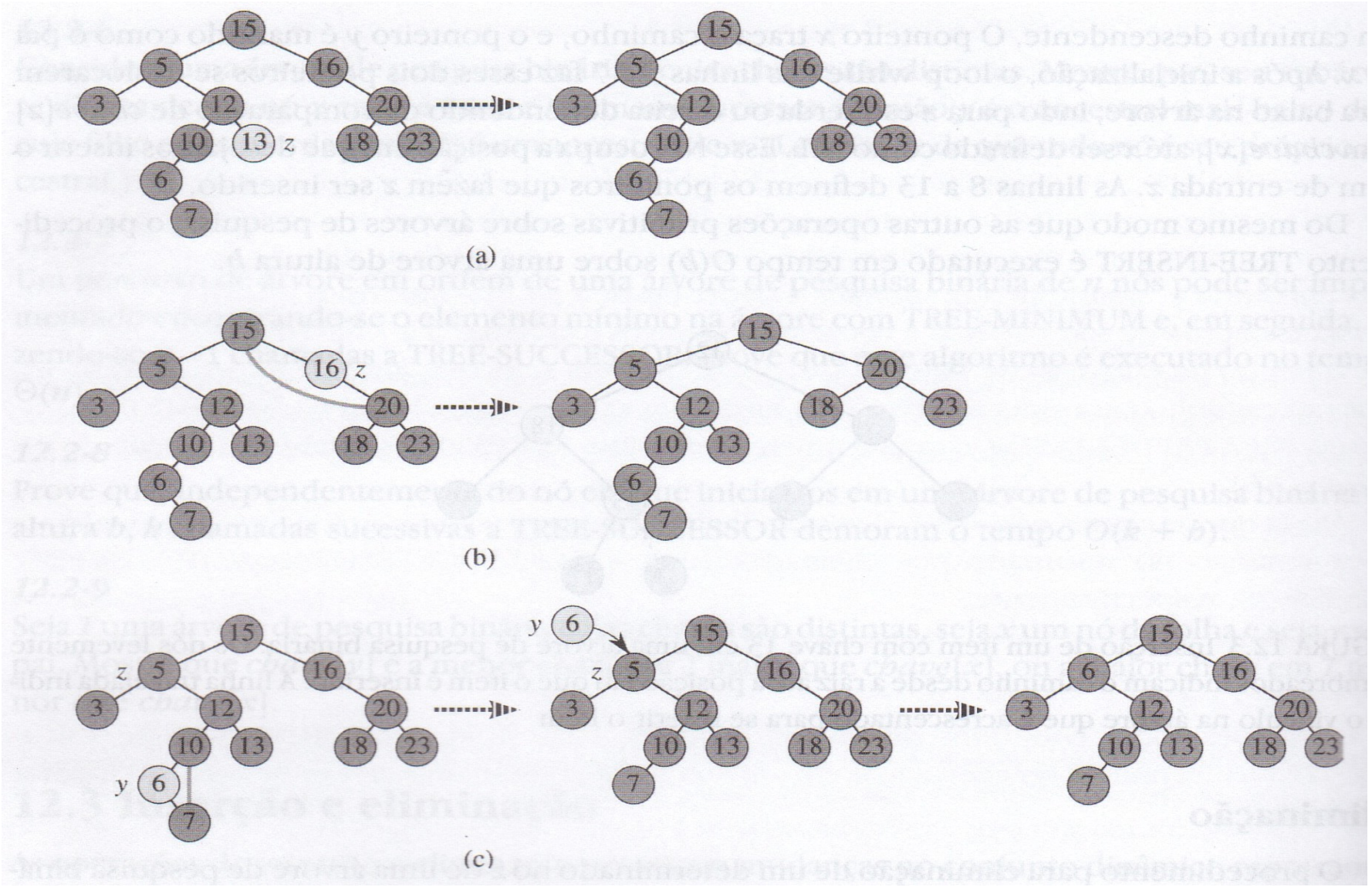
  a) Se *z* não tem filhos, modificar o pai de *z* para que este aponte para NIL.

  b) Se *z* possui apenas um filho, fazemos o pai de *z* apontar para o filho de z.

  c) Se *z* possui dois filhos, colocamos no lugar de *z* o seu sucessor, que com certeza não possui filho à esquerda.

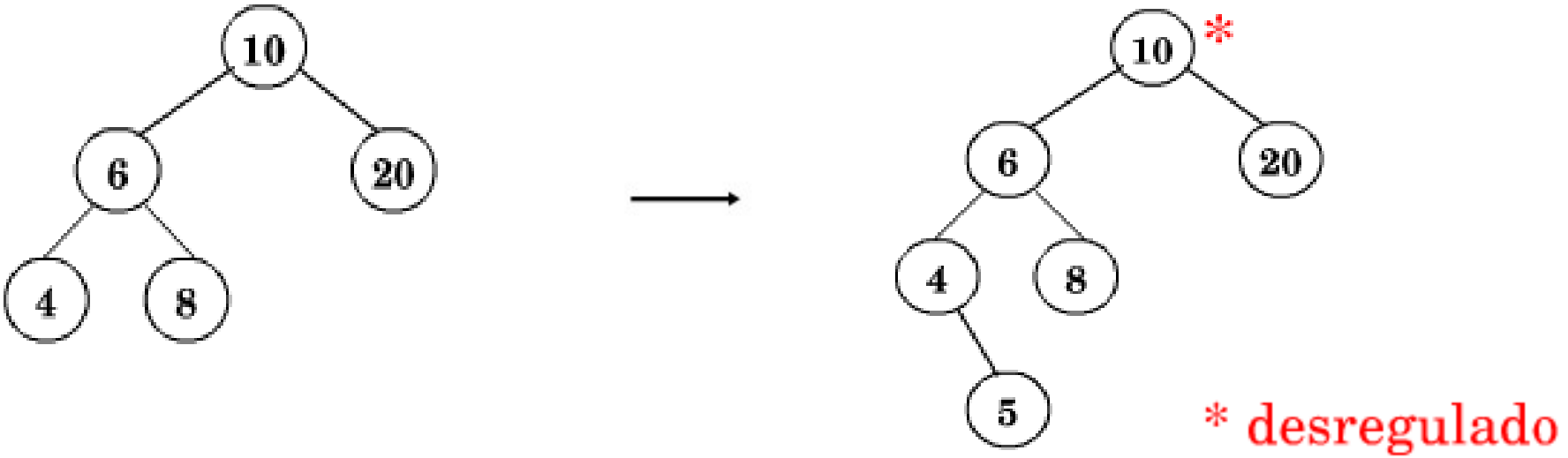
- O sucessor de um nó *x* é o nó *y* com a menor chave que seja maior do que a chave de *x*.

Operação de Remoção



Árvores AVL

- A inserção de um nó com chave 5 na árvore abaixo, faz com que ela deixe de ser AVL, com FB(10) = +2.
- E agora?



Árvores AVL

- Quando as operações de inserção e remoção alteram o balanceamento da árvore, é necessário efetuar uma **rotação** para manter as propriedades da árvore AVL, tal que:

  a) O percurso em ordem fique inalterado em relação a árvore desbalanceada. Em outras palavras, a árvore continua a ser uma árvore de busca binária.

  b) A árvore modificada saiu de um estado de desbalanceamento para um estado de balanceamento.

Árvores AVL

- **Definição:** A operação de rotação altera o balanceamento de uma árvore *T*, garantindo a propriedade AVL e a sequência de percurso em ordem.

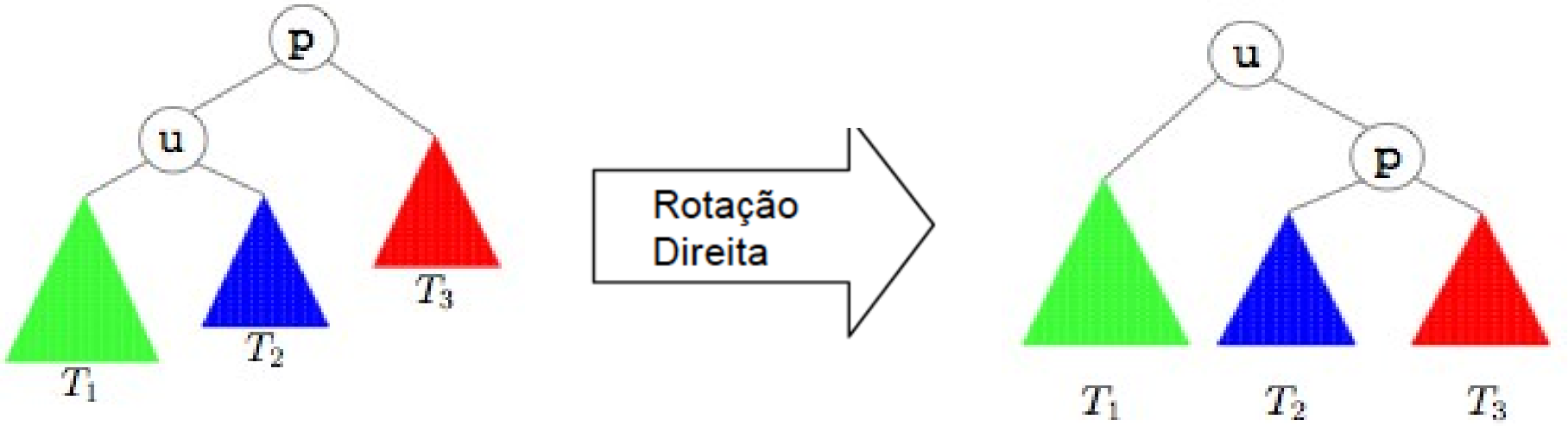
- Podemos definir 4 tipos diferentes de rotação:

  - Rotação à direita
  - Rotação à esquerda
  - Rotação dupla à direita
  - Rotação dupla à esquerda

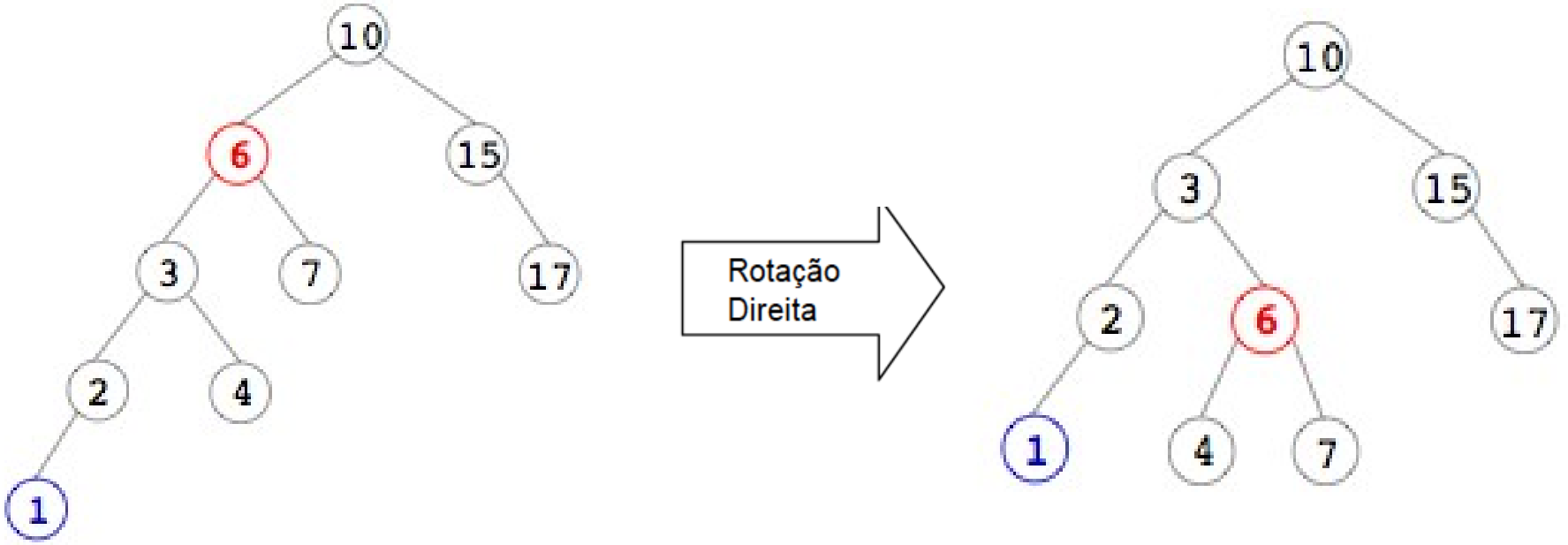
Árvores AVL

- Quando aplicar a rotação à direita?

$$h_E(p) > h_D(p)$$
$$h_E(u) > h_D(u)$$



Exemplo



O nó 1 foi inserido na árvore, causando seu desbalanceamento

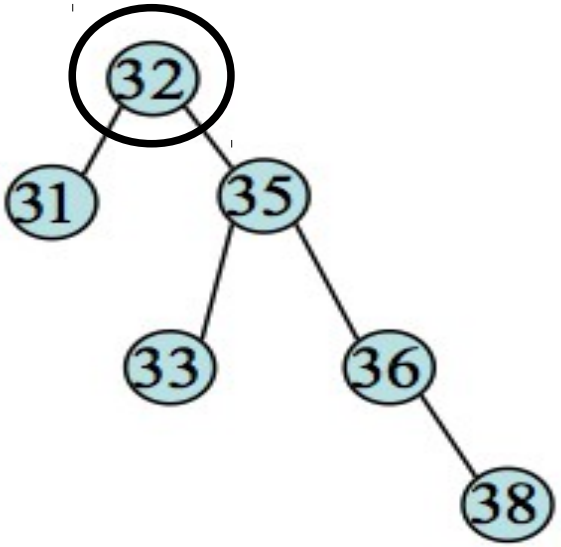
Árvore AVL

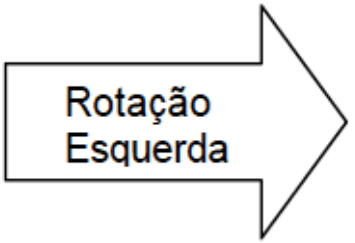
Árvores AVL

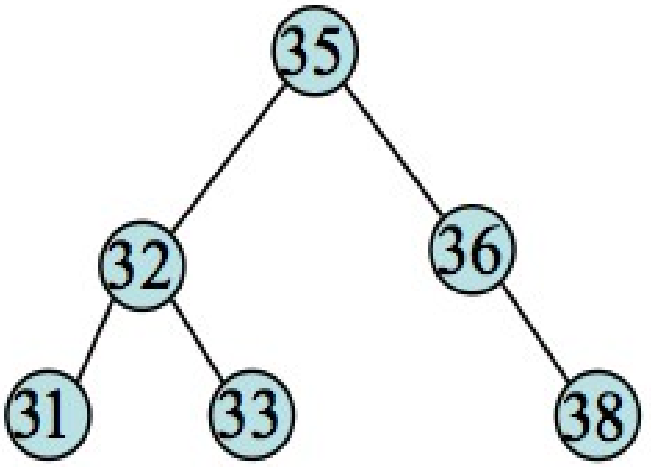
- Quando aplicar a rotação à esquerda?

$$h_D(p) > h_E(p)$$
$$h_D(u) > h_E(u)$$

Exemplo







O nó 38 foi inserido na árvore, causando desbalanceamento no nó 32

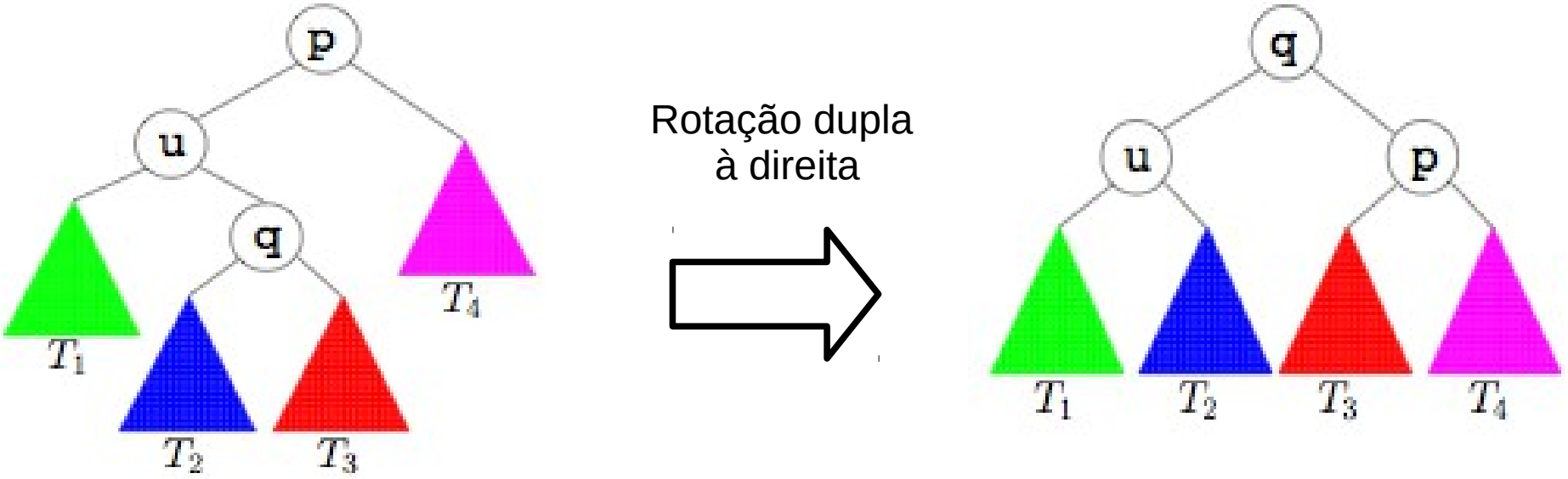
Árvore AVL

Árvores AVL

- Quando aplicar a rotação dupla à direita?

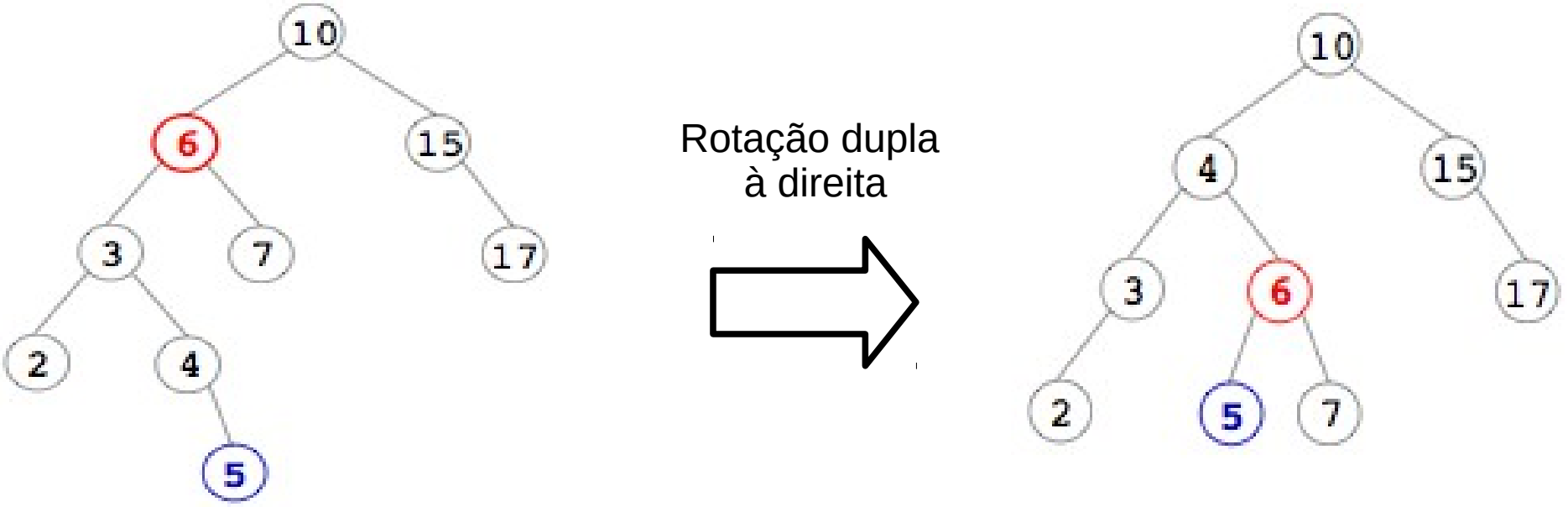
$$h_E(p) > h_D(p)$$

$$h_D(u) > h_E(u)$$



Exemplo

- Ao inserirmos o nó 5 na árvore, o nó 6 ficou desregulado.
- Então, primeiro se faz uma rotação à esquerda e depois uma rotação à direita tendo o nó 4 como pivô.

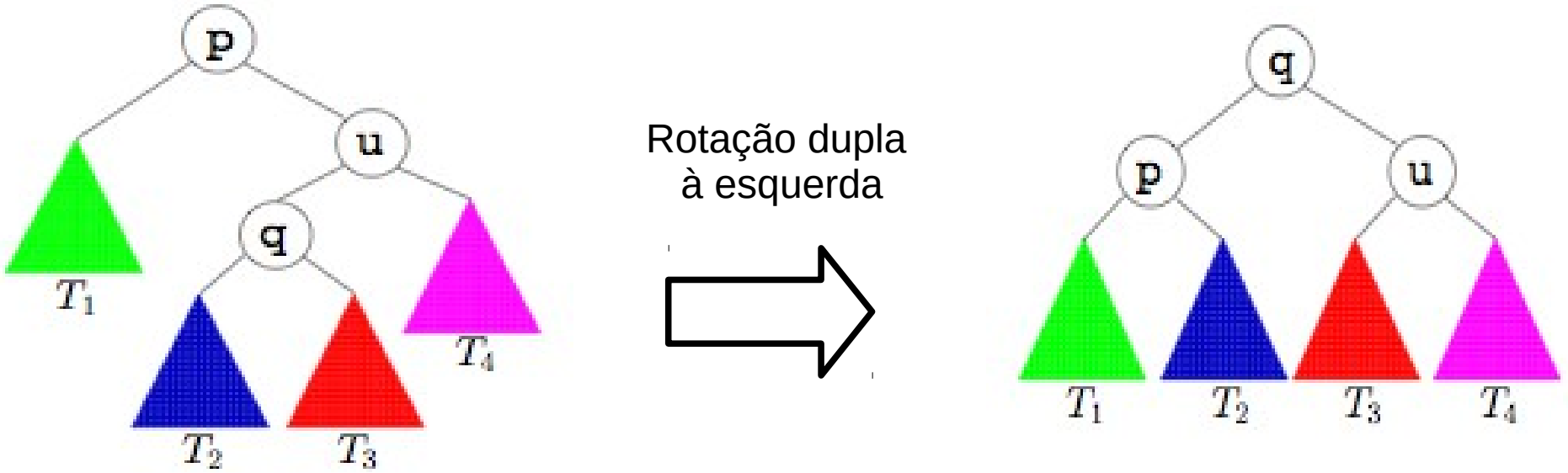


Árvores AVL

- Quando aplicar a rotação dupla à esquerda?

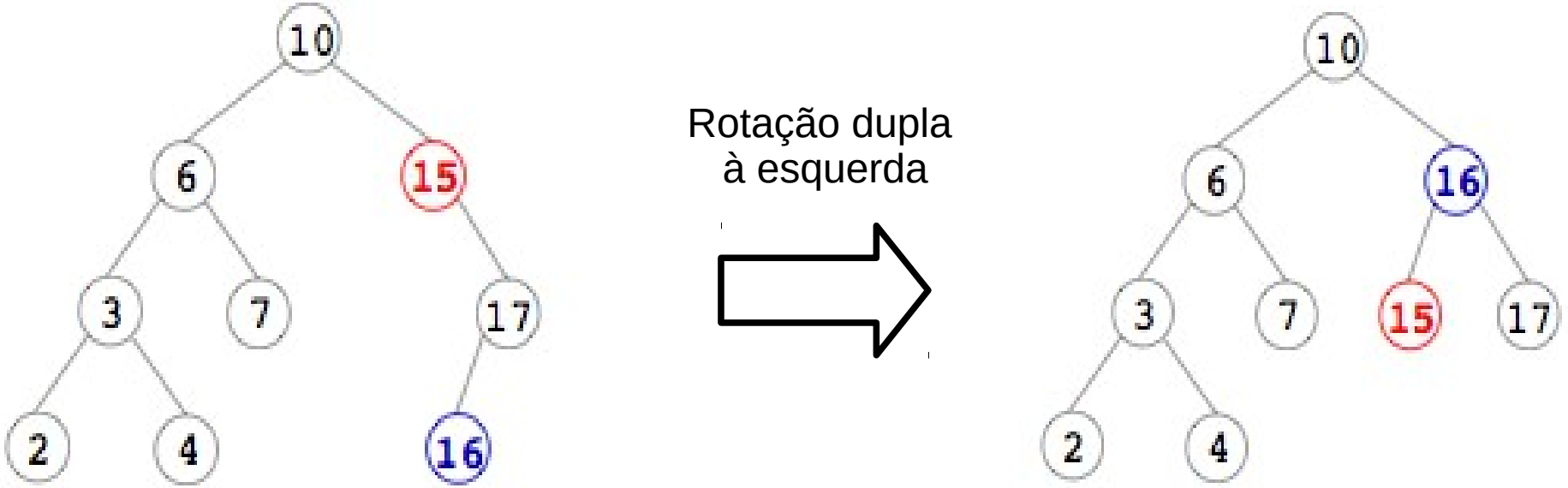
$$h_D(p) > h_E(p)$$

$$h_E(u) > h_D(u)$$



Exemplo

- Ao inserirmos o nó 16 na árvore, o nó 15 ficou desregulado.
- Então, primeiro se faz uma rotação à direita e depois uma rotação à esquerda tendo o nó 16 como pivô.



Árvores AVL

- Detalhes de implementação para inserção:

  1. Realizar a operação de inserção como em uma árvore de busca binária comum: *O(log n)*

  2. Verificar se existem nós desregulados. Para isso, deve-se atualizar o FB dos ancestrais do nó inserido: *O(log n)*

  3. Se existir um nó desregulado, toná-lo regulado, aplicando a rotação necessária: *O(1*) (um simples ajuste de ponteiros)

  - Complexidade temporal total no pior caso: *O(log n)*

Árvores AVL

- Detalhes de implementação para remoção:

  1. Realizar a operação de remoção como em uma árvore de busca binária comum: *O(log n)*

  2. Verificar se existem nós desregulados. Para isso, deve-se atualizar o FB dos ancestrais do nó removido: *O(log n)*

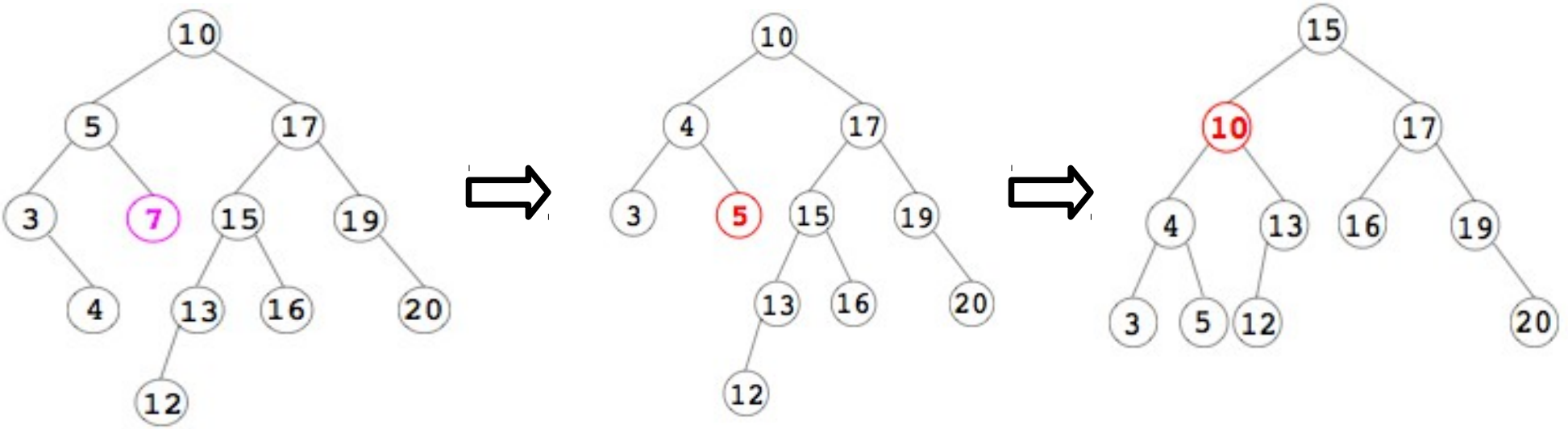
  3. Percorrer o caminho desde o pai do nó removido até a raiz, fazendo as operações de rotação apropriadas (pode ser mais de uma): *O(log n)*

  Obs: Se outro nó ocupar o lugar do nó removido, a análise deve começar no (antigo) pai desse nó.

  - Complexidade temporal total no pior caso: *O(log n)*

Exemplo

- Remova o nó com chave 7 da árvore AVL abaixo. Em seguida, aplique as rotações necessárias para garantir que a árvore resultante mantenha sua propriedade AVL.



Exercício

- Construir uma AVL com as chaves:

  (10, 20, 30, 5, 3, 50, 40, 70, 60, 90)

- Depois de construída a árvore AVL acima, remova os nós:

  (3, 30, 70)

  e mantenha o balanceamento da árvore.

Árvores Vermelho-Preto

- As árvores vermelho-preto (ou rubro-negras) constituem um entre muitos esquemas de árvores de busca binária que são “balanceadas”.

- Uma árvore rubro-negra é uma árvore de busca binária com um bit extra de armazenamento por nó que indica sua cor: **PRETA** ou **VERMELHA**.

- Essa estrutura de dados é complexa, mas eficiente na prática, ao garantir que suas operações demorem $O(\log n)$ no pior caso.

- Foram inventadas por Bayer sob o nome “Árvores Binárias Simétricas” em 1972, 10 anos depois das árvores AVL.

Árvores Vermelho-Preto

- Uma árvore de busca binária é uma árvore rubro-negra se ela satisfaz as seguintes propriedades:

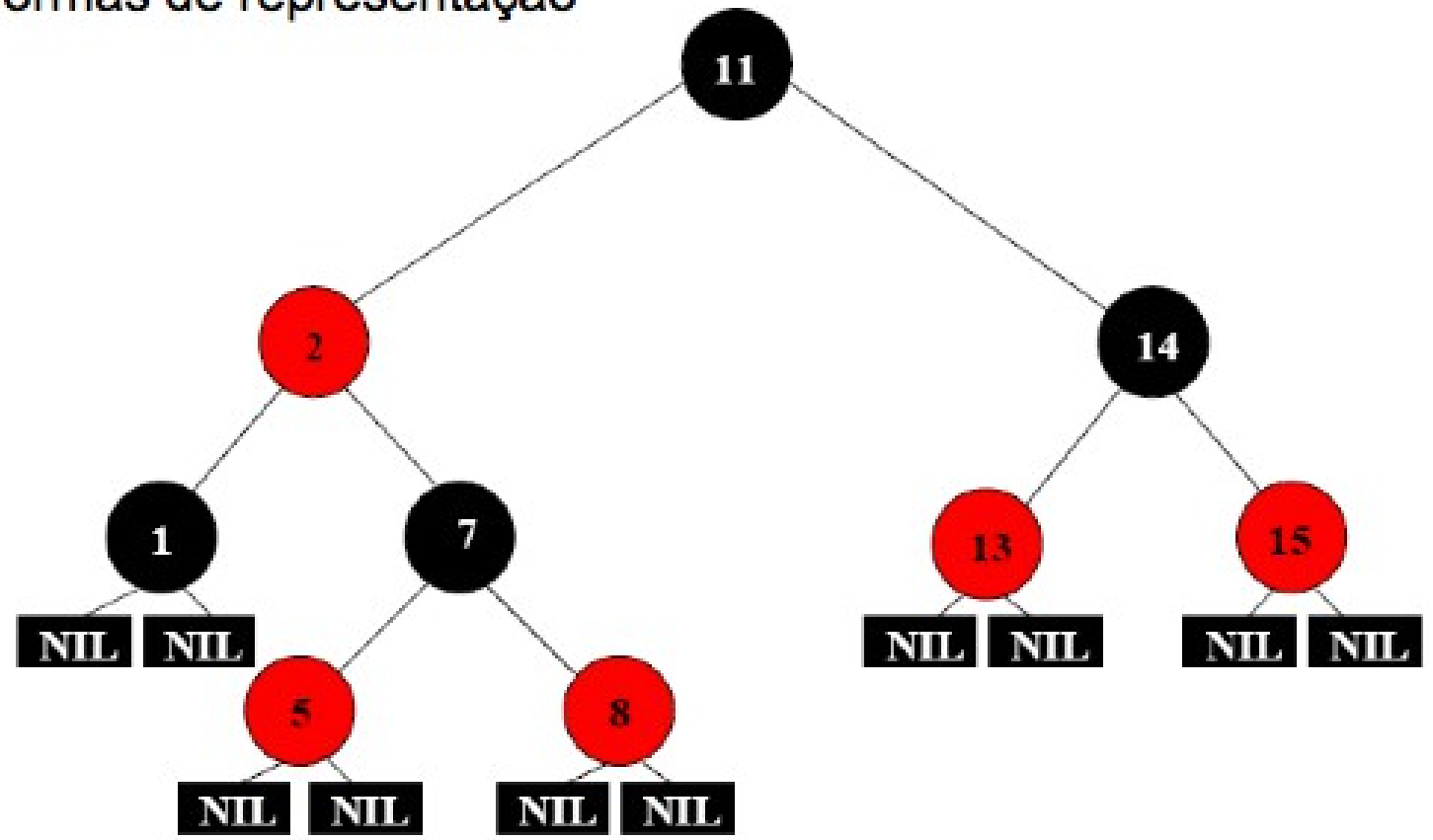
  1. Todo nó é vermelho ou preto;
  2. A raiz é preta;
  3. Todo nó externo (NIL) é preto;
  4. Se um nó é vermelho, então ambos os seus filhos são pretos;
  5. Todos os caminhos desde um nó até os nós externos descendentes contêm o mesmo número de nós pretos.

- Um nó que satisfaz as propriedades é denominado equilibrado, caso contrário é dito desequilibrado. Na árvore rubro-negra todos os nós estão equilibrados.

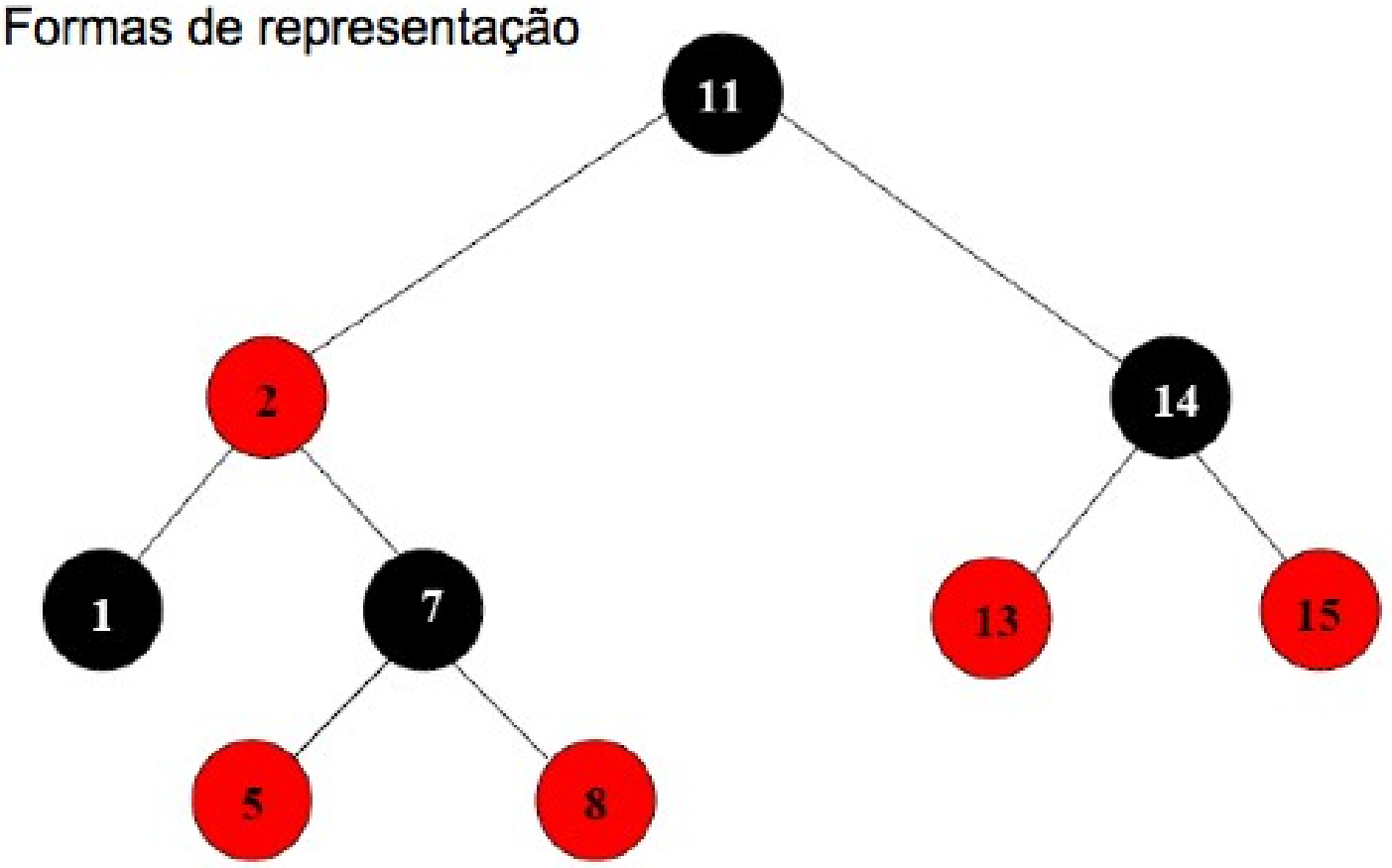
- Em um caminho da raiz até uma sub-árvore vazia não pode existir dois nós vermelhos consecutivos.

Árvores Vermelho-Preto

Formas de representação



Árvores Vermelho-Preto



Árvores Vermelho-Preto

- Lema:

  "Uma árvore vermelho-preto com *n* nós internos tem altura no máximo 2 log (n + 1).”

  A prova do Lema pode ser conferida na página 222 do livro texto.

- O lema mostra que as árvores vermelho-preto constituem boas árvores de busca, visto que sua altura é *O*(*log n*).

Árvores Vermelho-Preto

- As operações **Inserir** e **Remover** são mais complicadas nas árvores rubro-negras porque elas podem ferir alguma propriedade desse tipo de árvore.

- Como veremos, essas operações podem ser implementadas de forma bastante parecida com as respectivas operações nas árvores binárias de busca, bastando apenas modificar as cores dos nós para que as propriedades das árvores rubro-negras sejam satisfeitas.

- Como a inserção e remoção propriamente ditas já foram vistas para árvores binárias de busca, veremos apenas o que é necessário para acertar as cores da árvore.

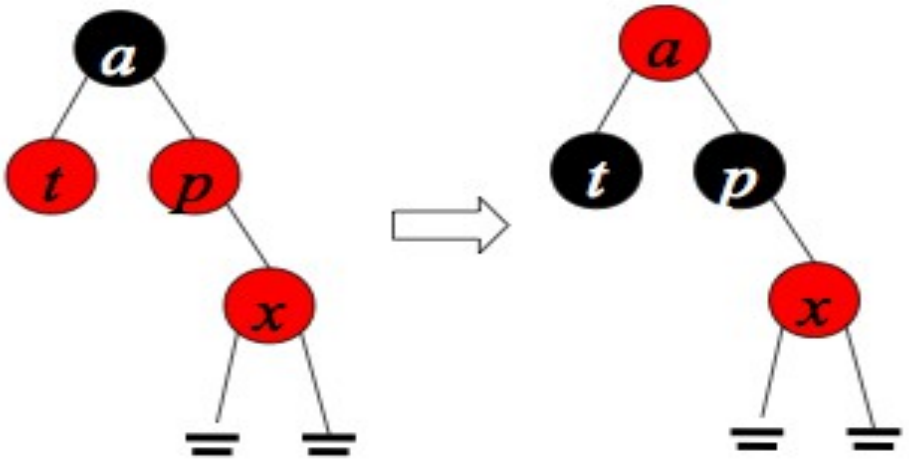
Árvores Vermelho-Preto

- Um nó é inserido sempre na cor vermelha.

- **Caso 1**: Caso a inserção seja feita em uma árvore vazia, basta alterar a cor do nó para preto, para manter a propriedade 2.

Árvores Vermelho-Preto

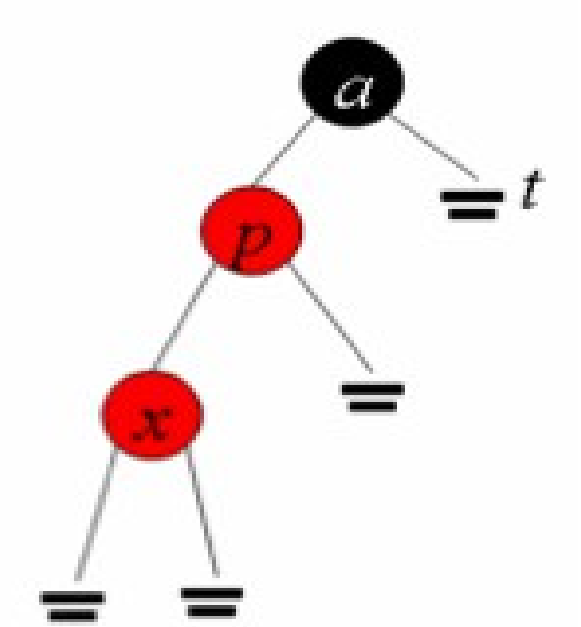
- **Caso 2**: Ao inserir *x*, se o tio de *x* é vermelho, é necessário fazer a recoloração de *a*, *t* e *p*.



- Se o pai do nó *a* é vermelho, o rebalanceamento tem que ser feito novamente, considerando o nó *a* como inserido.
- Se o nó *a* é raiz, então ele deve ser preto.

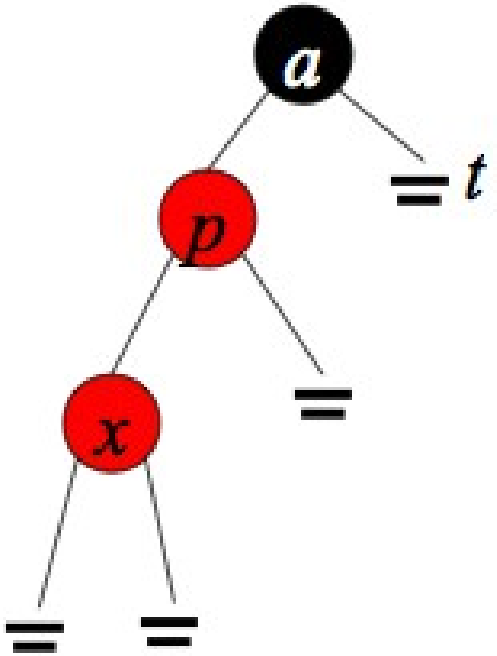
Árvores Vermelho-Preto

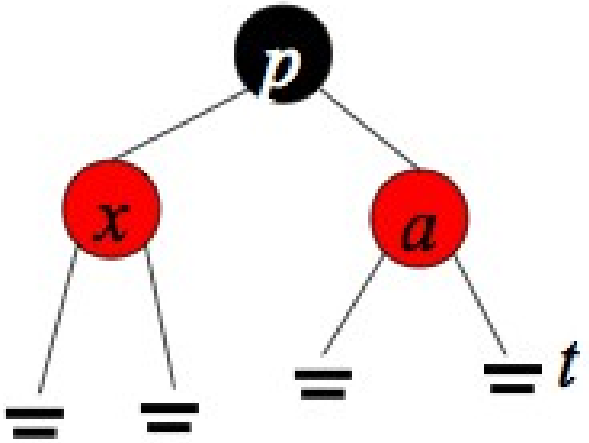
- **Caso 3**: Suponha que o tio do elemento inserido *x* seja preto. Nesse caso, para manter a propriedade 4 é preciso fazer rotações envolvendo *a*, *t*, *p* e *x*.
- Há 4 subcasos que correspondem às 4 rotações possíveis.



Árvores Vermelho-Preto

- **Caso 3a**: Rotação à direita.

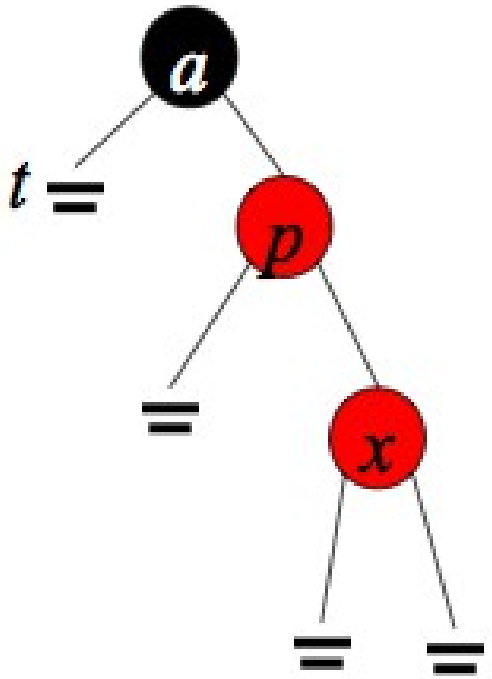


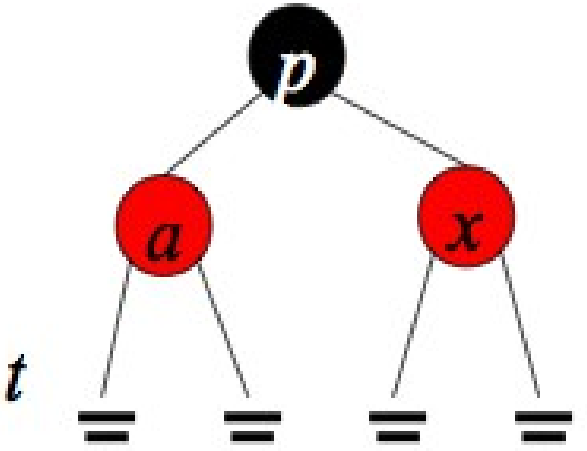


Recoloração de p e a

Árvores Vermelho-Preto

- **Caso 3b**: Rotação à esquerda.

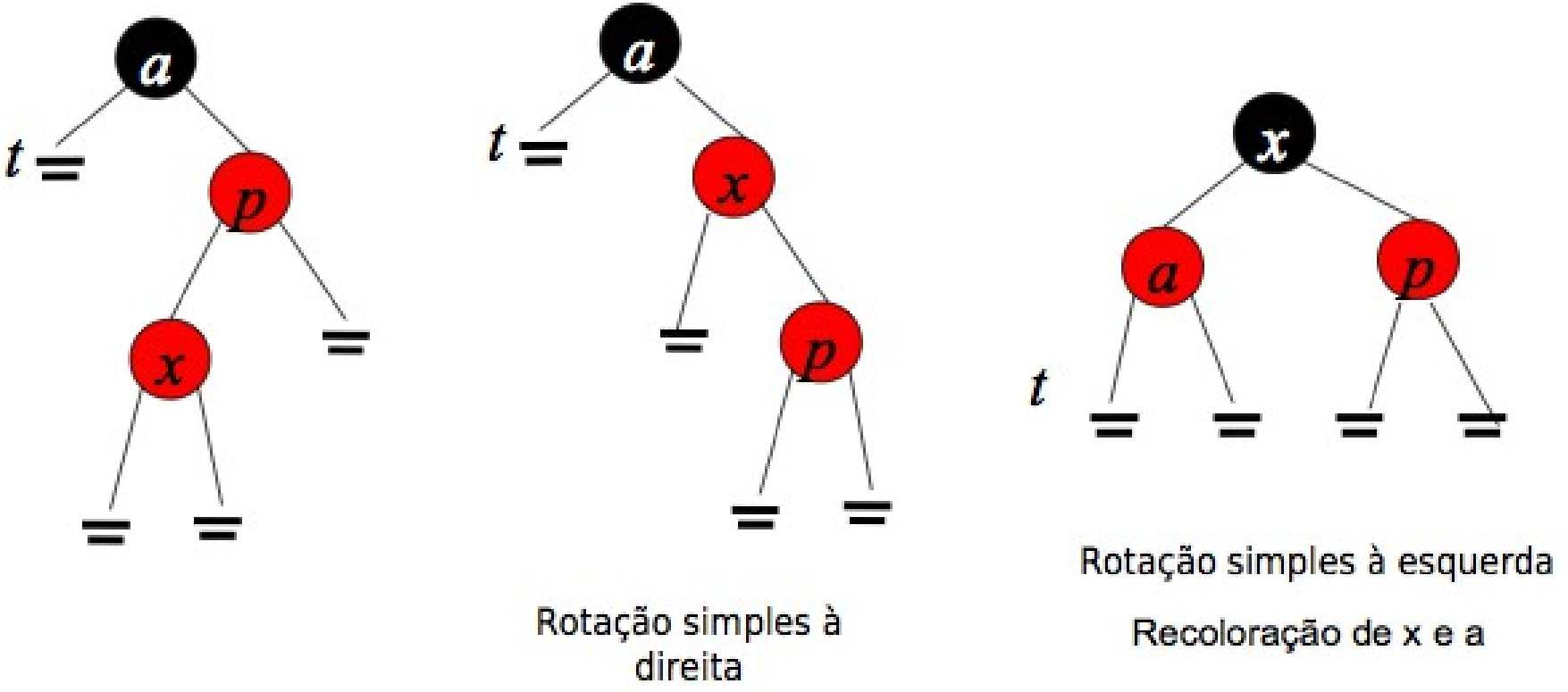




Recoloração de p e a

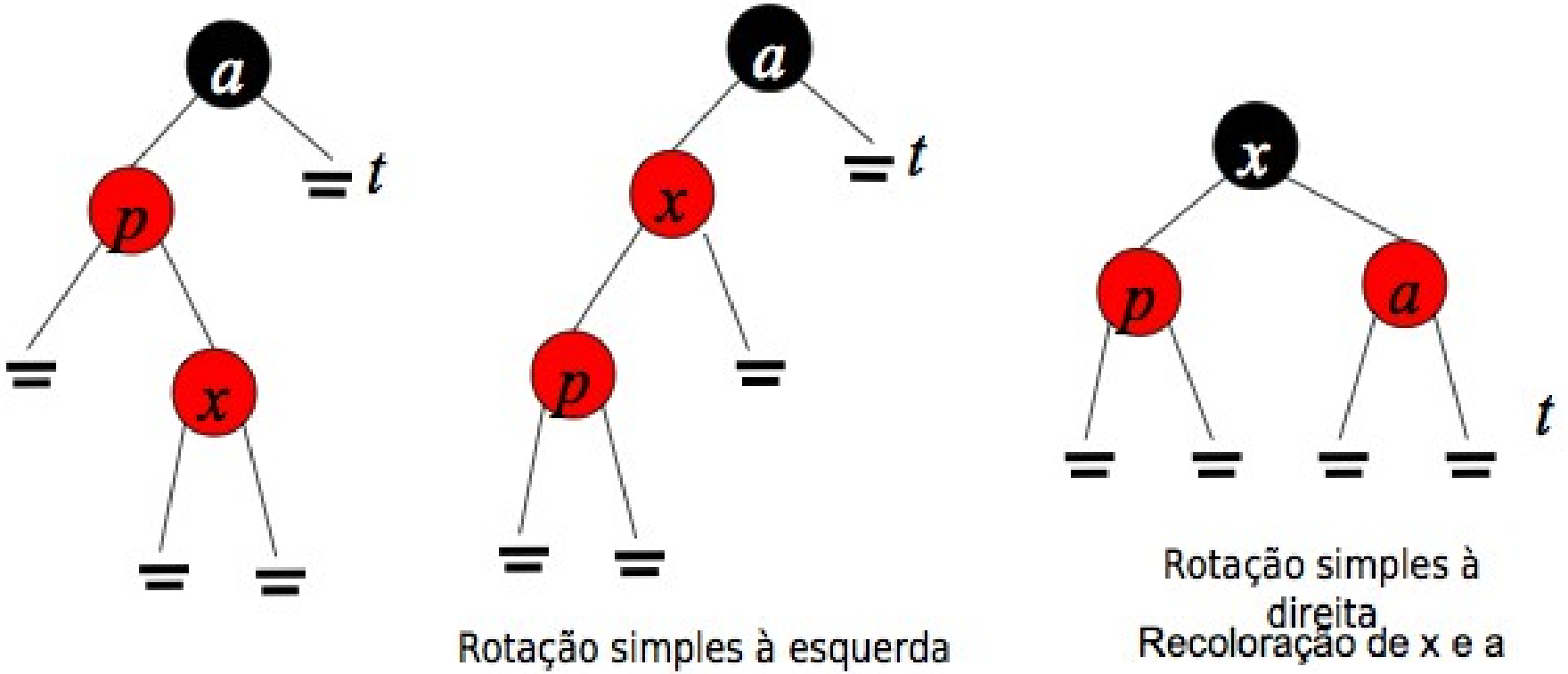
Árvores Vermelho-Preto

- **Caso 3c**: Rotação dupla à esquerda.



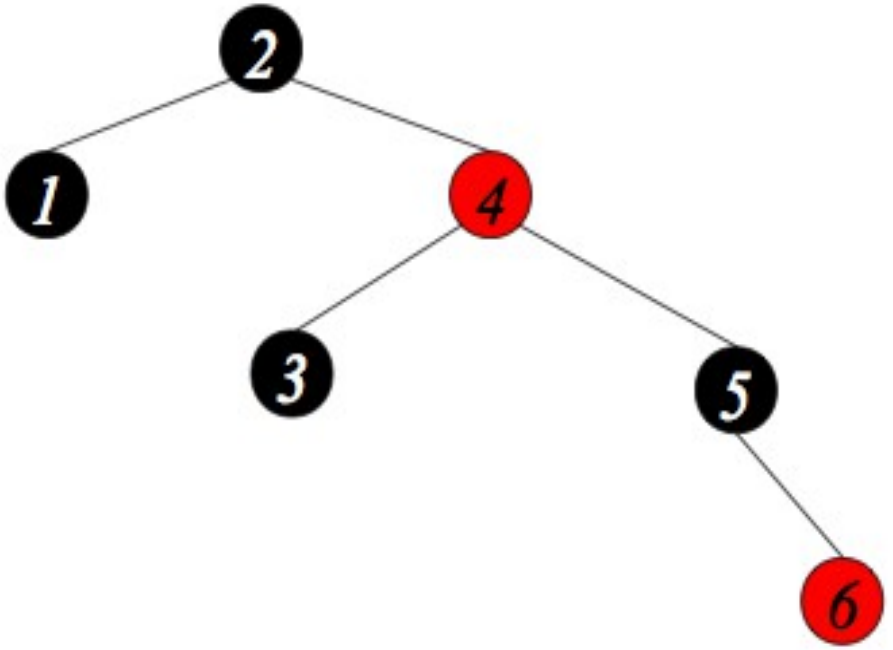
Árvores Vermelho-Preto

- **Caso 3d**: Rotação dupla à direita.



Exercício

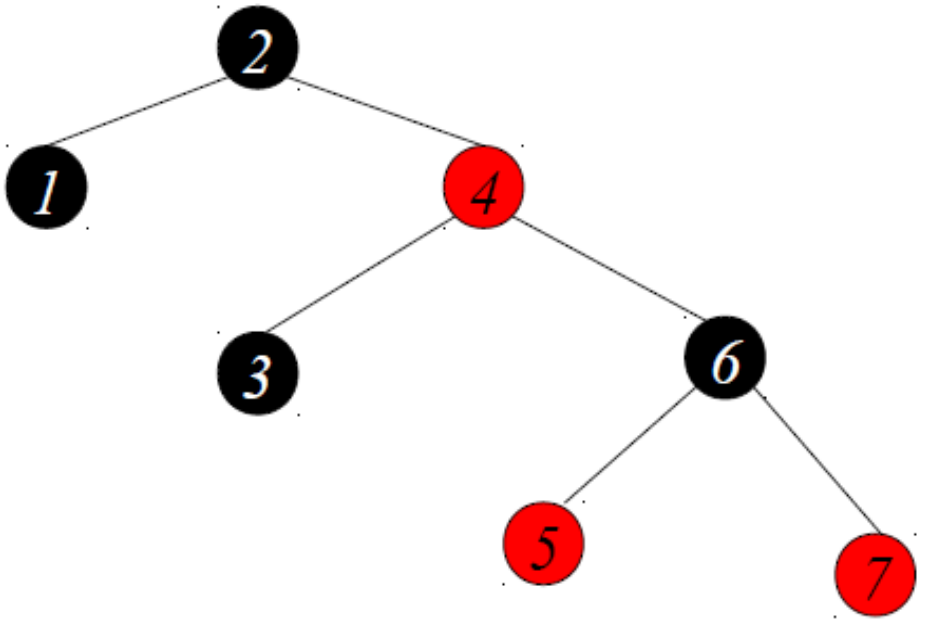
- Insira um nó com chave 7 na árvore rubro-negra abaixo e trabalhe para manter seu balanceamento.



Solução

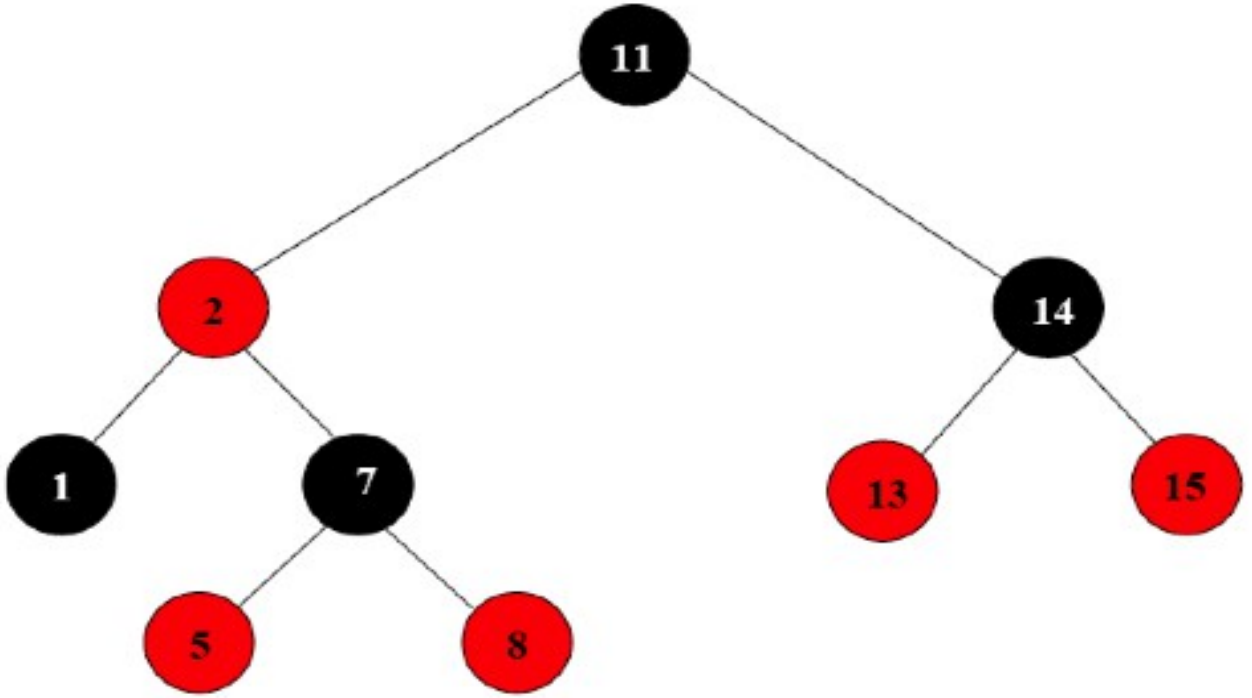
- Aplicar o **Caso 3b**:

  1. Rotação à esquerda dos nós 5, 6 e 7.
  2. Alteração da cor dos nós 5 e 6.



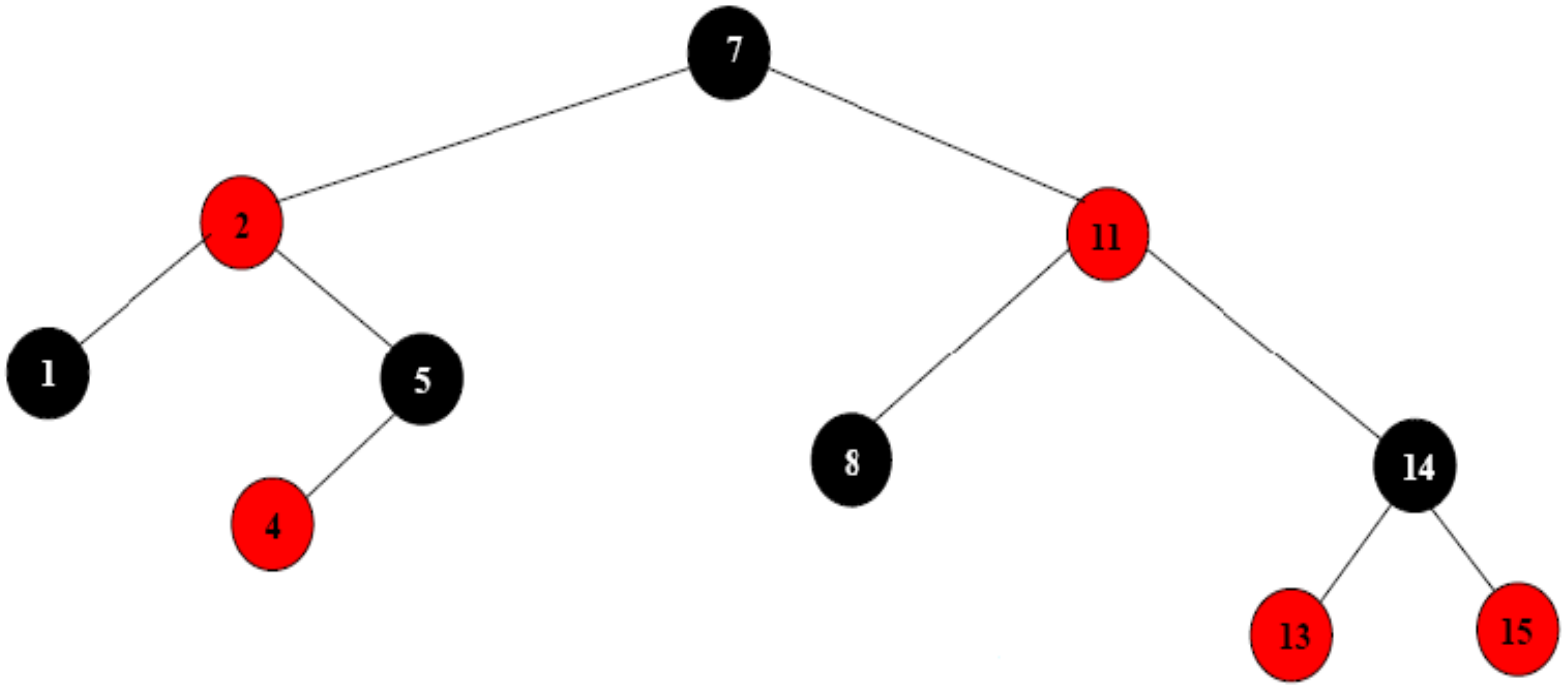
Exercício

- Insira um nó com chave 4 na árvore rubro-negra abaixo e trabalhe para manter seu balanceamento.



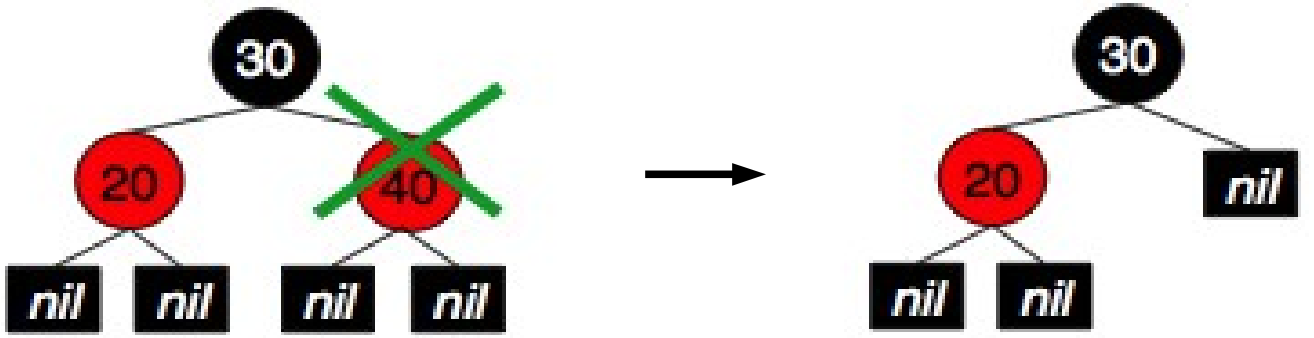
Solução

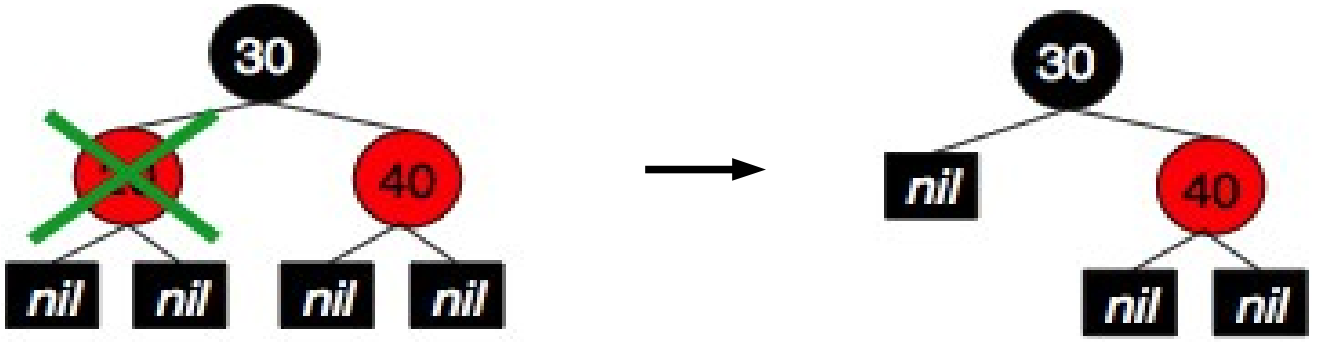
- Alteração de cor dos nós 5, 7 e 8 → **Caso 2**
- Rotação dupla à direita dos nós 2, 7 e 11 → **Caso 3d**



Árvores Vermelho-Preto

- A remoção de um nó vermelho **não** altera o balanceamento da árvore rubro-negra.





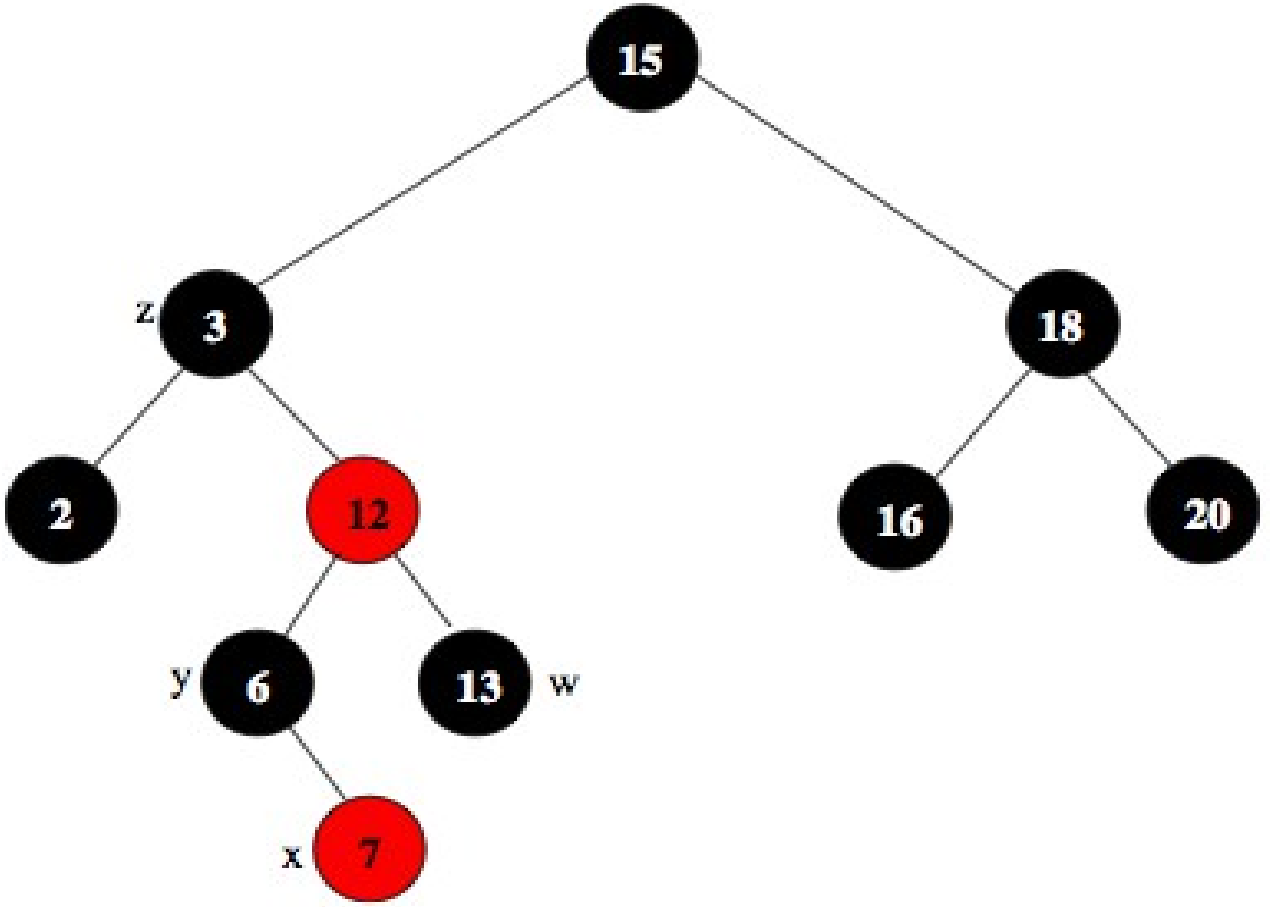
Árvores Vermelho-Preto

- Existem casos para corrigir as cores **após** a remoção de um nó preto, mas antes de defini-los, identificaremos alguns nós:

  - Seja *z* o nó a ser removido.
  - Seja *y* = *z*, se *z* possui um ou nenhum filho,

    ou *y* = *sucessor(z)*, se *z* possui dois filho.
  - Seja *x* o filho de *y* antes da remoção de *z*, ou NIL, caso *y* não possua filho.
  - Seja *w* o tio de *x* antes da remoção de *z*.

Árvores Vermelho-Preto



Árvores Vermelho-Preto

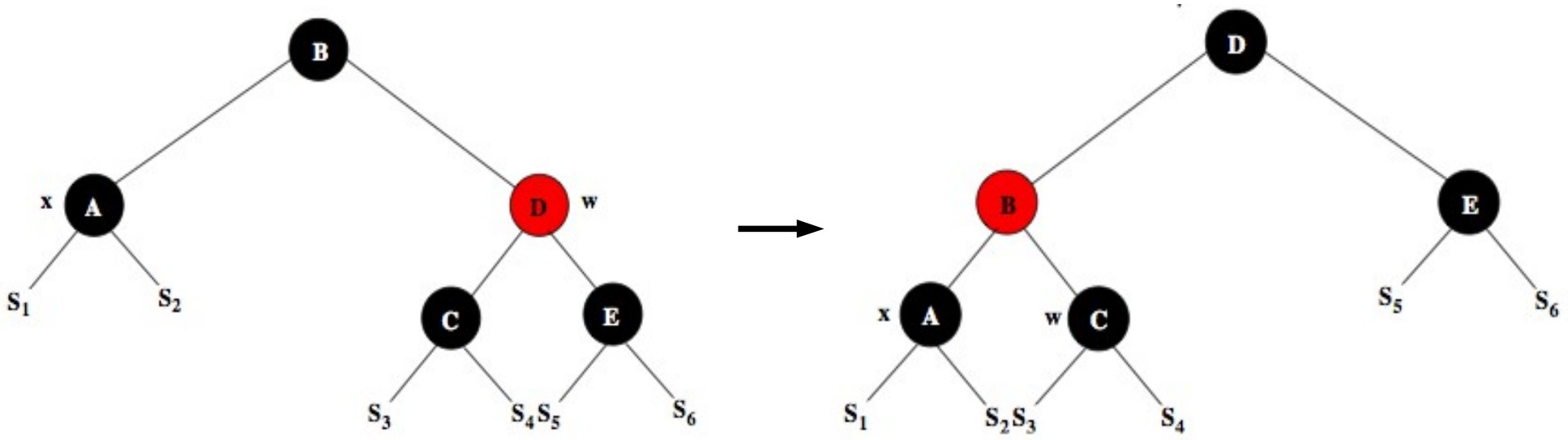
- Se o nó *x* for a raiz da árvore ou da cor vermelha, basta alterar sua cor para preto, após a remoção do nó *z*. Por exemplo, na remoção do nó com chave 3 da árvore do slide anterior.

- Mas, enquanto o nó *x* for diferente da raiz da árvore e sua cor for preta, 4 casos serão repetidos no intuito de restaurar as propriedades vermelho-preto da árvore de busca.

- Quando o critério de parada (descrito acima) for satisfeito, a cor preta é atribuída ao nó *x* e a árvore estará balanceada.

Árvores Vermelho-Preto

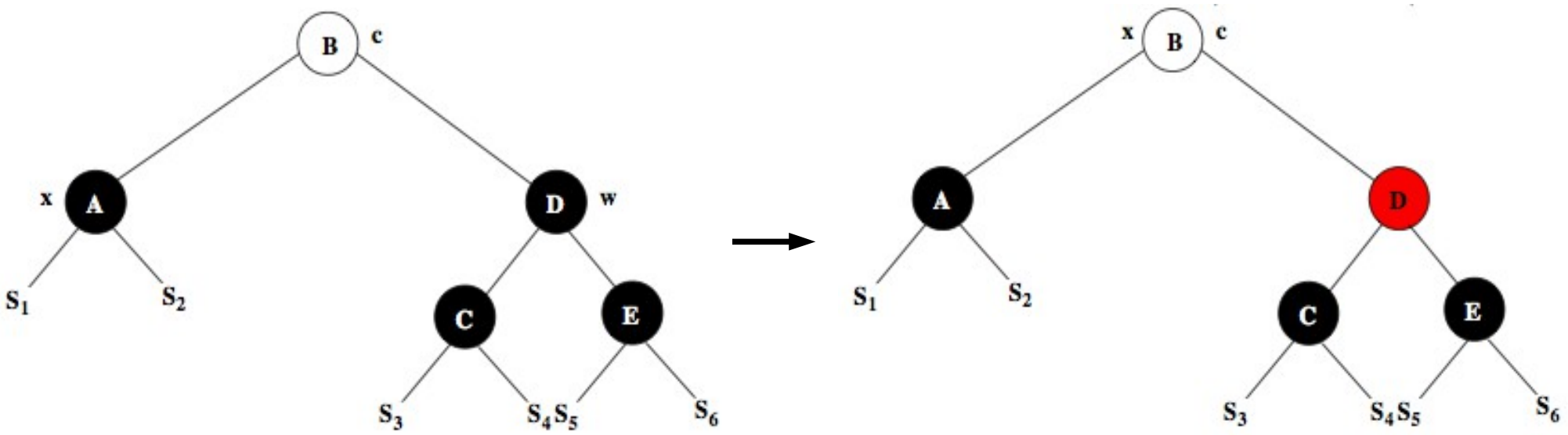
- **Caso 1**: O irmão *w* de *x* é vermelho.



- O caso 1 é transformado no caso 2, 3 ou 4 pela troca de cores dos nós B e D e pela execução de uma rotação à esquerda.

Árvores Vermelho-Preto

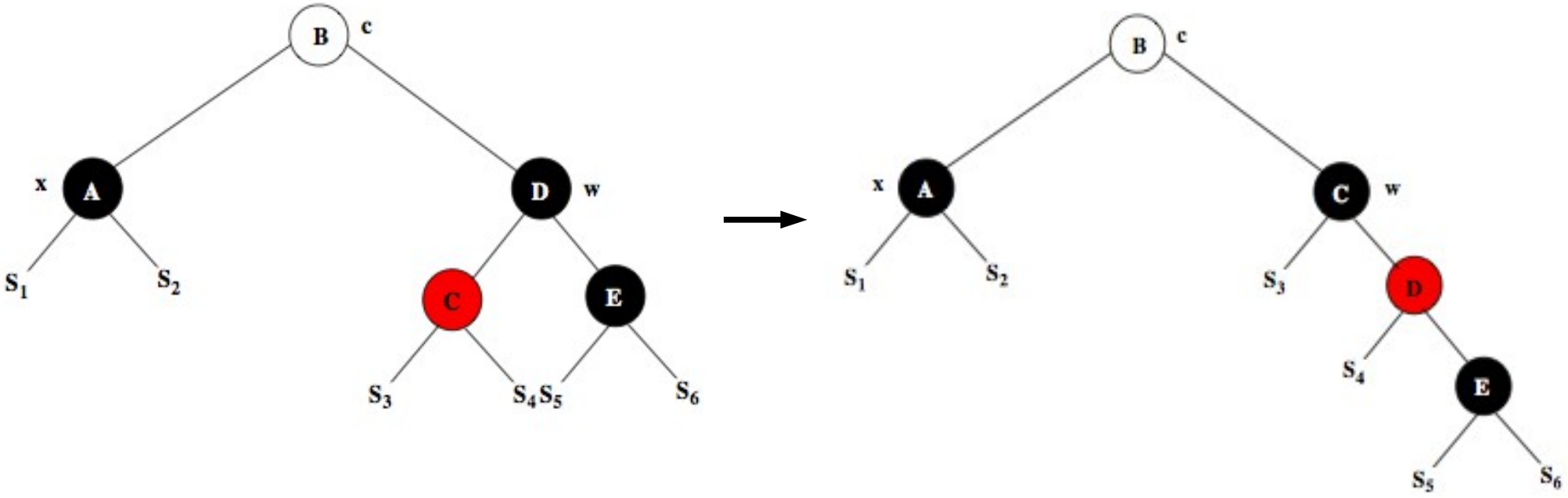
- **Caso 2**: O nó *w* é preto, e ambos os filhos de *w* são pretos.



- Se entrarmos no caso 2 através do caso 1, a árvore atenderá as propriedades das árvores rubro-negras, após a transformação.

Árvores Vermelho-Preto

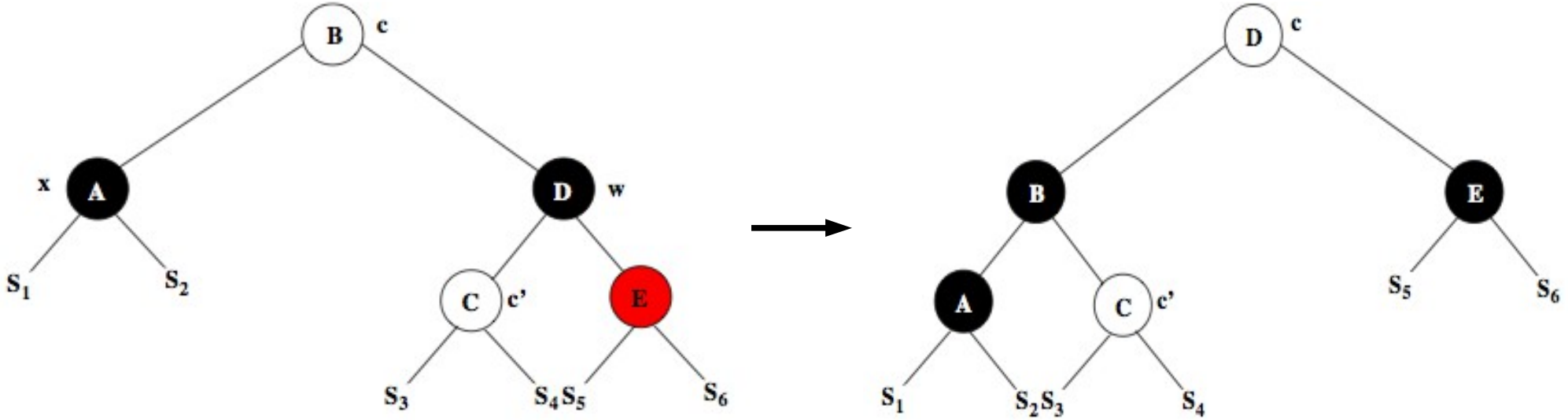
- **Caso 3**: O nó *w* é preto, e o filho da esquerda de *w* é vermelho e o filho da direita de *w* é preto.



- O caso 3 é transformado no caso 4 pela troca de cores dos nós C e D e pela execução de uma rotação à direita.

Árvores Vermelho-Preto

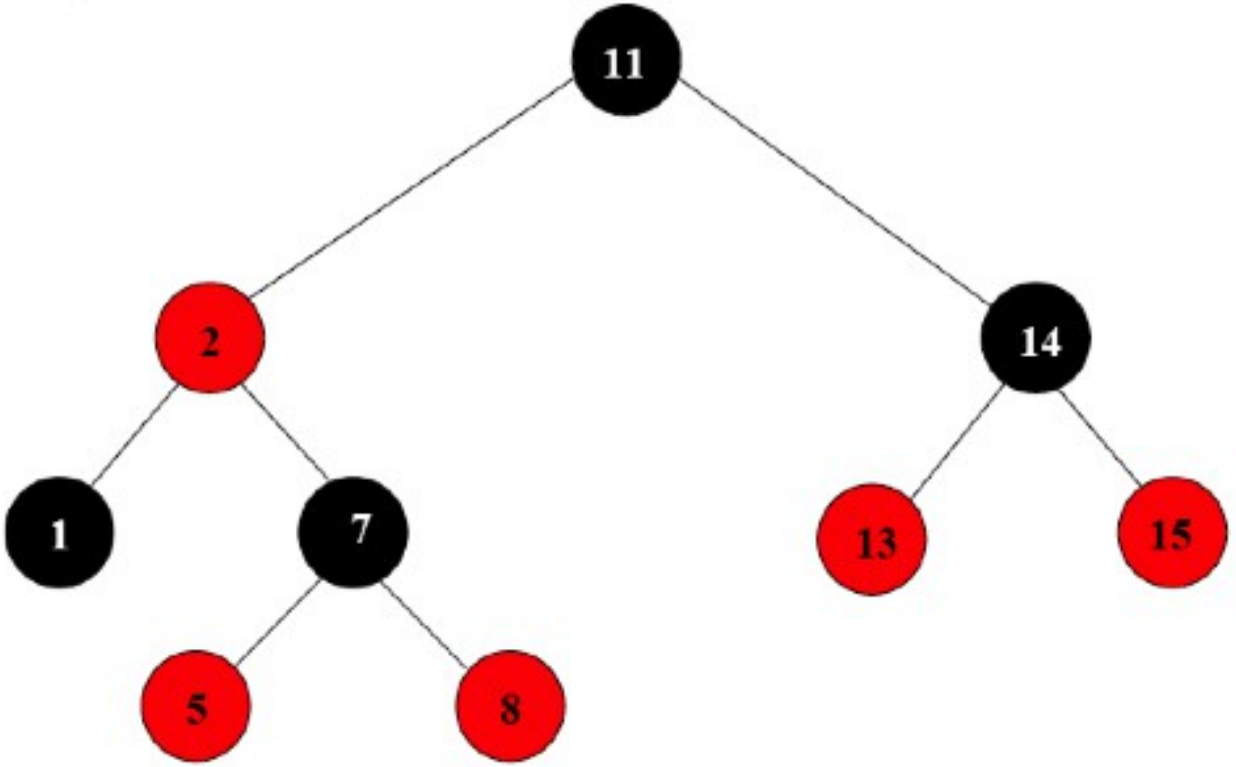
- **Caso 4**: O nó *w* é preto, e o filho da direita de *w* é vermelho.



- A árvore atenderá as propriedades das árvores rubro-negras, após a transformação. O novo *x* será a raiz da árvore.

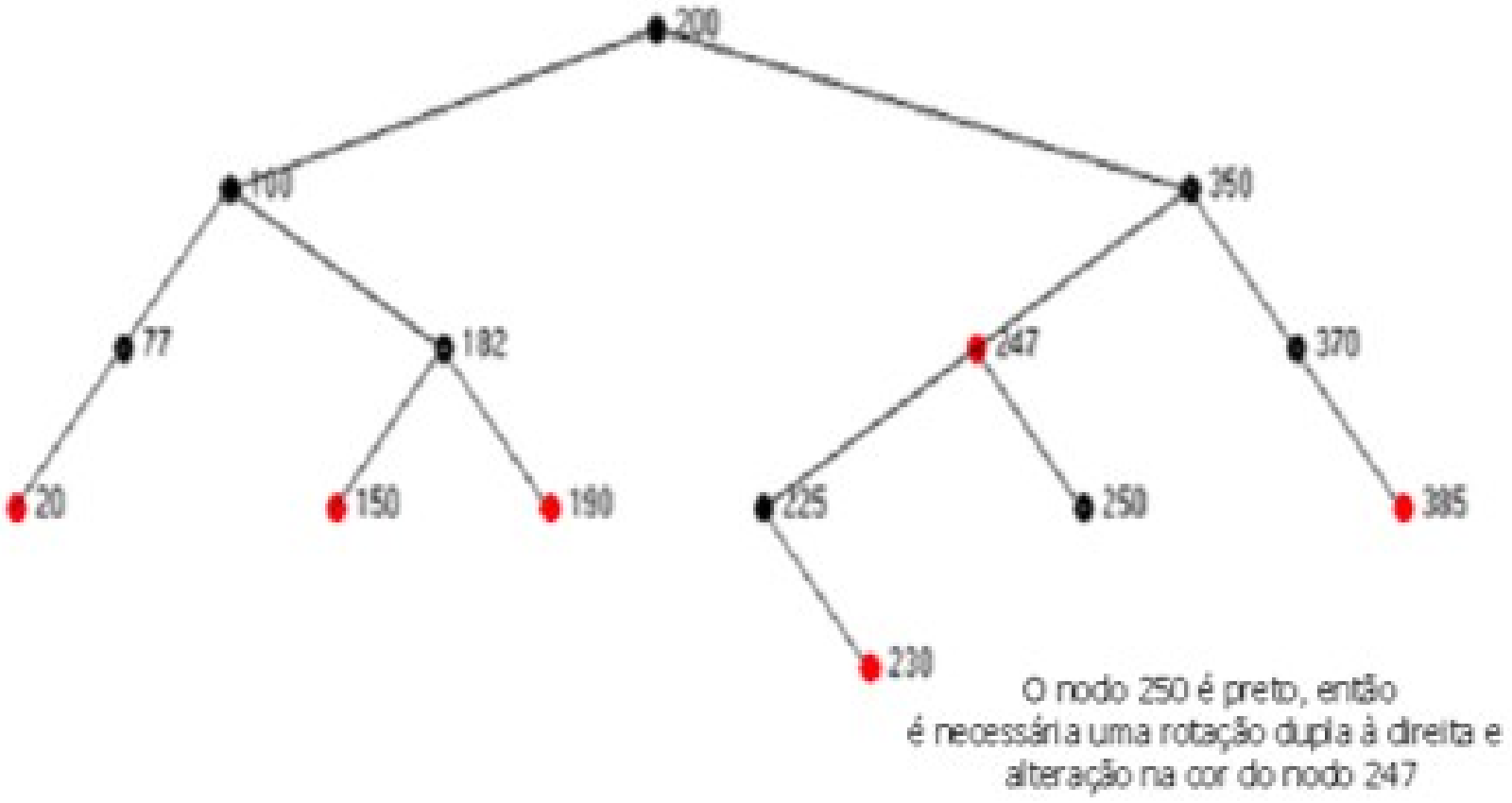
Exercício

1. Remova o nó com chave 1 da árvore rubro-negra abaixo e trabalhe para manter seu balanceamento.



Exercício

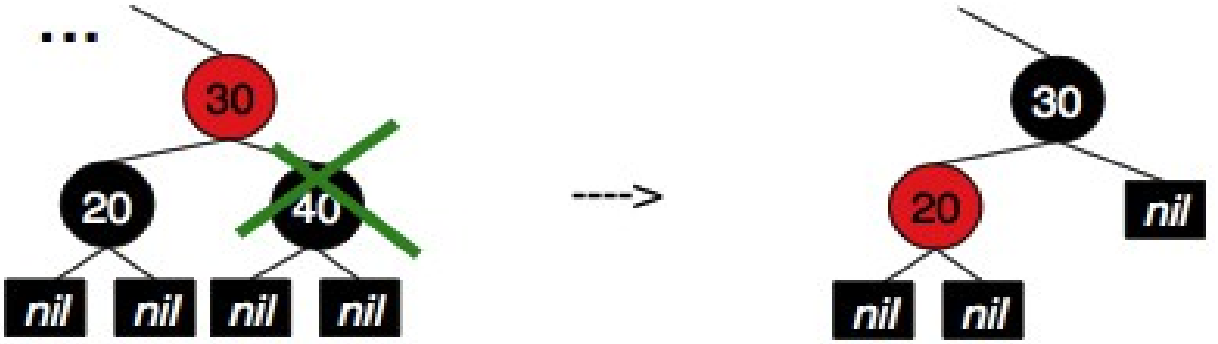
2. Remova o nó com chave 250 da árvore rubro-negra abaixo e trabalhe para manter seu balanceamento.



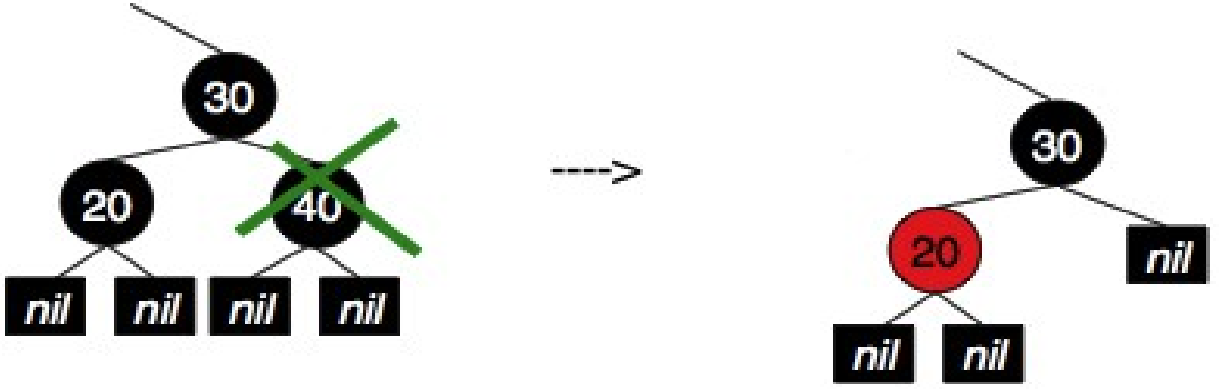
Exercício

3. Explique o procedimento realizado para a remoção da chave 40 nas situações (i) e (ii) abaixo.

(i)

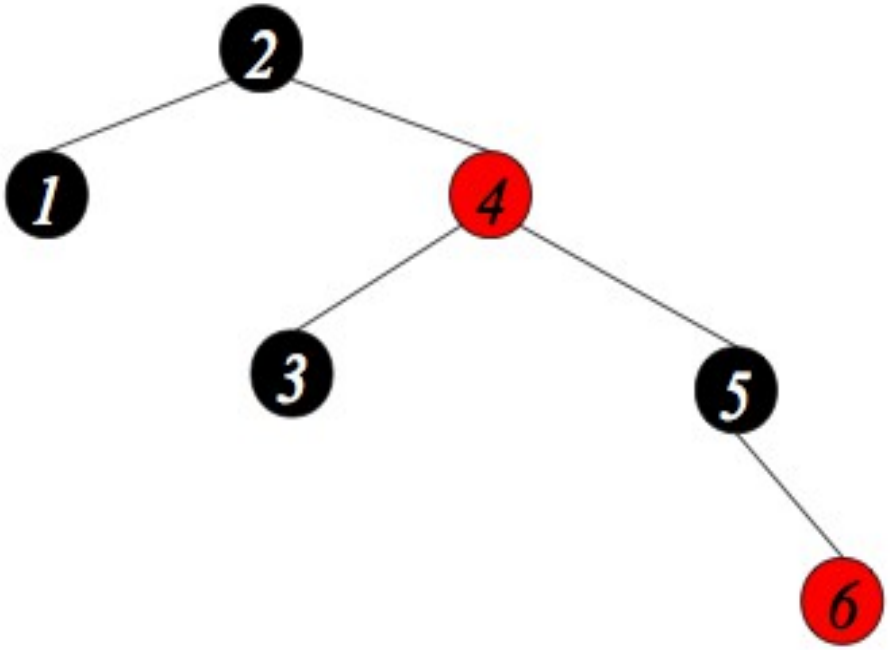


(ii)



Exercício

4. Remova o nó com chave 1 da árvore rubro-negra abaixo e trabalhe para manter seu balanceamento.



Soluções

- **Exercício 1:** Aplicar o Caso 4.

- **Exercício 2:** Aplicar o Caso 3 e, em seguida, o Caso 4.

- **Exercício 3:**
  - (i) Aplicar o Caso 2. Como o novo *x* (ou seja, a chave 30) é vermelho, o critério de parada foi satisfeito. Logo, basta mudar a cor do novo *x* de vermelho para preto.
  - (ii) Aplicar o Caso 2 e seguir com a análise.

- **Exercício 4:** Aplicar o Caso 1 e, em seguida, o Caso 2. Após aplicar o Caso 2, o novo *x* (ou seja, a chave 2) é vermelho, logo, a cor do novo *x* muda de vermelho para preto.

Árvores B

- Em muitas aplicações a tabela empregada é muito grande, de forma que o armazenamento do conjunto de chaves não pode ser efetuado na memória principal.

- Nesse caso, torna-se necessária a manutenção da tabela em memória secundária, o que acarreta um desperdício de tempo significativo para acessar um dado da tabela.

- Para essas aplicações, é interessante criar uma estrutura que minimize o tempo de acesso. A ideia é que ao invés de buscar um dado de cada vez, consiga-se transferir, em cada acesso, uma quantidade maior de dados.

Árvores B

- As árvores B, utilizando o recurso de manter mais de uma chave em cada nó da estrutura, chamado aqui de **página**, proporcionam uma organização de ponteiros tal que as operações de busca, inserção e remoção são executadas em tempo $O(\log n)$.

- Além disso, sua construção assegura que as páginas-folha se encontram todas em um mesmo nível, não importando a ordem de entrada dos dados.

- As árvores “tipo” B são largamente utilizadas como forma de armazenamento em memória secundária. Diversos sistemas comerciais de banco de dados as empregam, como Oracle, Sybase, entre outros.

Árvores B

- Seja *d* um número natural. Uma **árvore B de ordem *d*** é uma árvore ordenada que é vazia, ou que satisfaz as seguintes condições:

  (i) a raiz é uma folha ou tem no mínimo dois filhos;

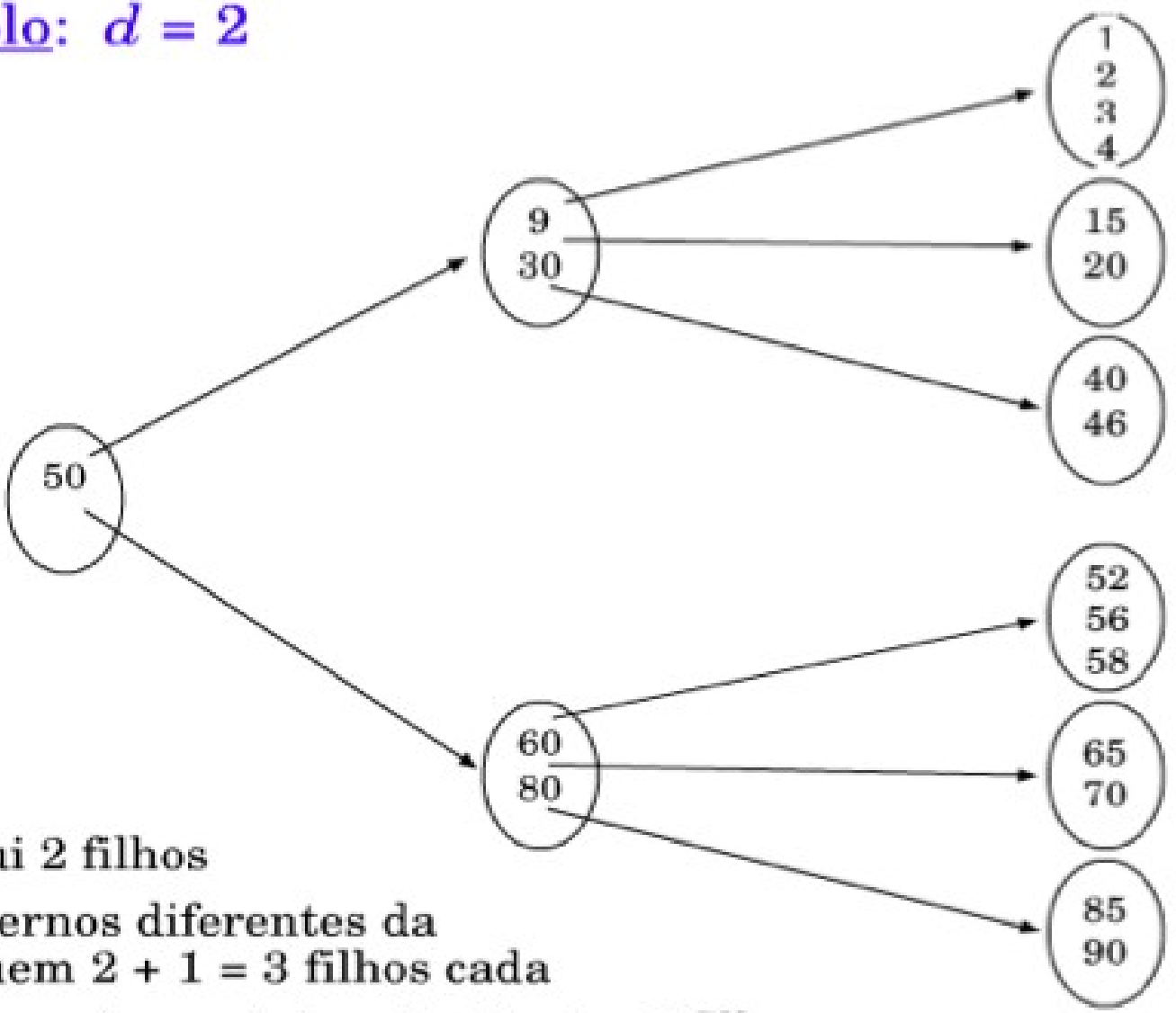
  (ii) cada nó diferente da raiz e das folhas possui no mínimo $d + 1$ filhos;

  (iii) cada nó diferente das folhas tem no máximo $2d + 1$ filhos;

  (iv) todas as folhas estão no mesmo nível.

- **Obs:** Uma árvore 2-3 é uma árvore B de ordem 1.

Exemplo: $d = 2$



Observe:

1) raiz possui 2 filhos
2) os nós internos diferentes da raiz possuem 2 + 1 = 3 filhos cada
3) cada nó possui no máximo $2 \times 2 + 1 = 5$ filhos
4) todas as folhas estão no nível 3

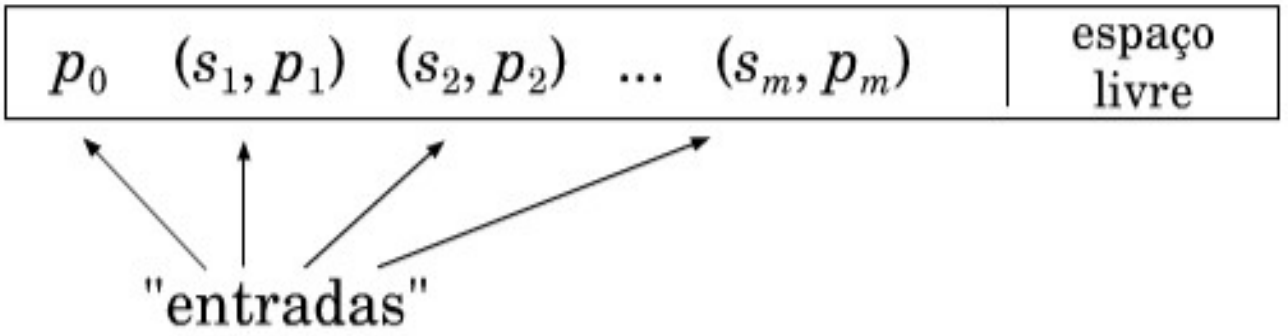
Árvores B

- Outras propriedades:

  a) Seja m o número de chaves em uma página P não folha. Então, P tem $m + 1$ filhos.

  b) Em cada página P, as chaves estão ordenadas: $s_1, \ldots, s_m$, sendo $d \leq m \leq 2d$, exceto para a página raiz onde $1 \leq m \leq 2d$. Além disso, P contém $m + 1$ ponteiros $p_0, p_1, \ldots, p_m$ para os filhos de P.

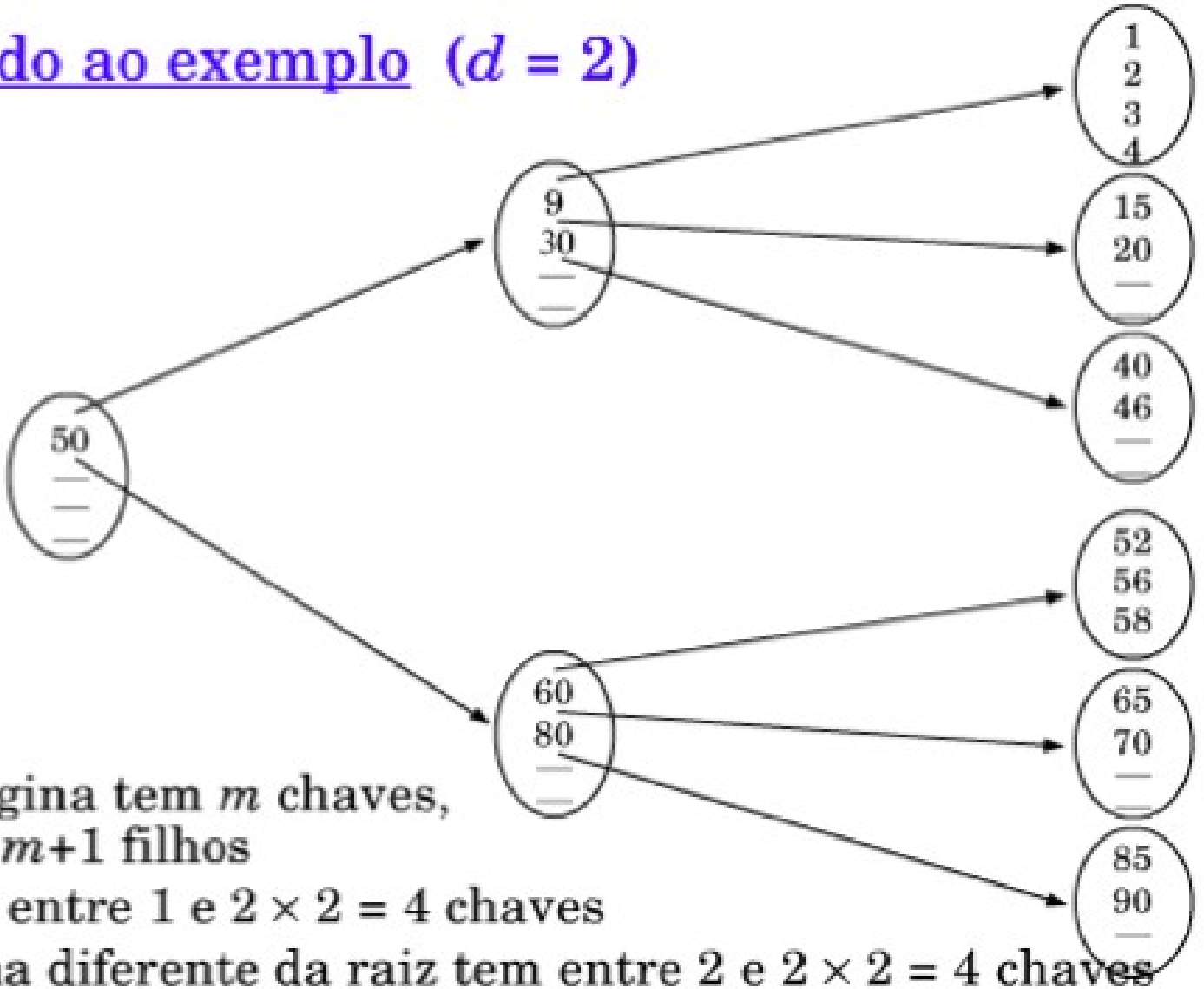
Árvores B



c) Seja uma página *P* com *m* chaves:

- Para qualquer chave *y*, pertencente à página apontada por p_0, $y < s_1$
- Para qualquer chave *y*, pertencente à página apontada por p_k, $1 \leq k \leq m - 1$, $s_k < y < s_{k+1}$
- Para qualquer chave *y*, pertencente à página apontada por p_m, $y > s_m$

Voltando ao exemplo ($d = 2$)



Observe:

a) se uma página tem m chaves, então tem $m+1$ filhos

b) a raiz tem entre 1 e $2 \times 2 = 4$ chaves

c) cada página diferente da raiz tem entre 2 e $2 \times 2 = 4$ chaves

d) em cada página as chaves estão ordenadas

e) de cada página com m chaves partem $m+1$ ponteiros (as folhas têm ponteiros nulos)

Exercícios

1. Seja uma árvore B de ordem *d* e altura *h*. Deduza o número máximo de páginas e elementos que essa estrutura pode conter.

2. Com base nos resultados da questão anterior, deduza cotas extremas para a altura *h*, em termos do número de elementos *n*.

3. Desenhe uma árvore B de ordem 3 que contenha as seguintes chaves:

1, 3, 6, 8, 14, 32, 36, 38, 39, 41, 43

Soluções

- Exercício 1:

$P_{max} = \frac{(2d+1)^h - 1}{2d}$, para $h \geq 1$

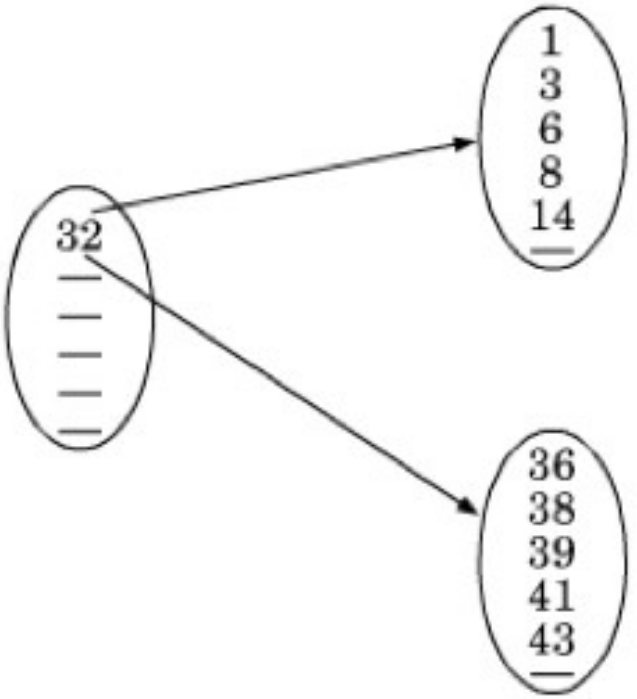
$n_{max} = (2d+1)^h - 1$, para $h \geq 1$

- Exercício 2:

$log_{2d+1}(n+1) \leq h \leq 1 + log_{d+1}(\frac{n+1}{2})$, para $n \geq 1$

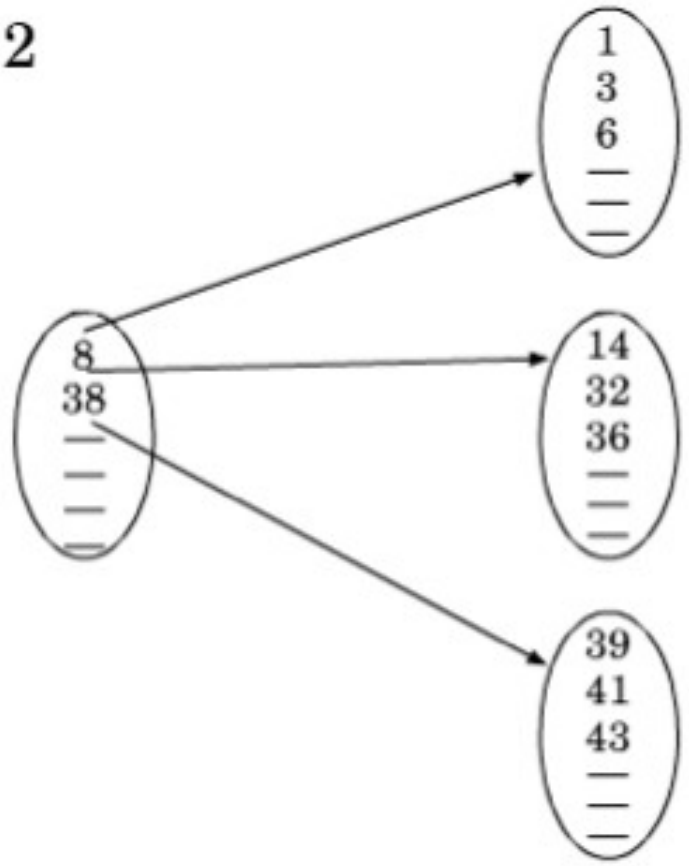
Exercício 3

Solução 1



Exercício 3

Solução 2

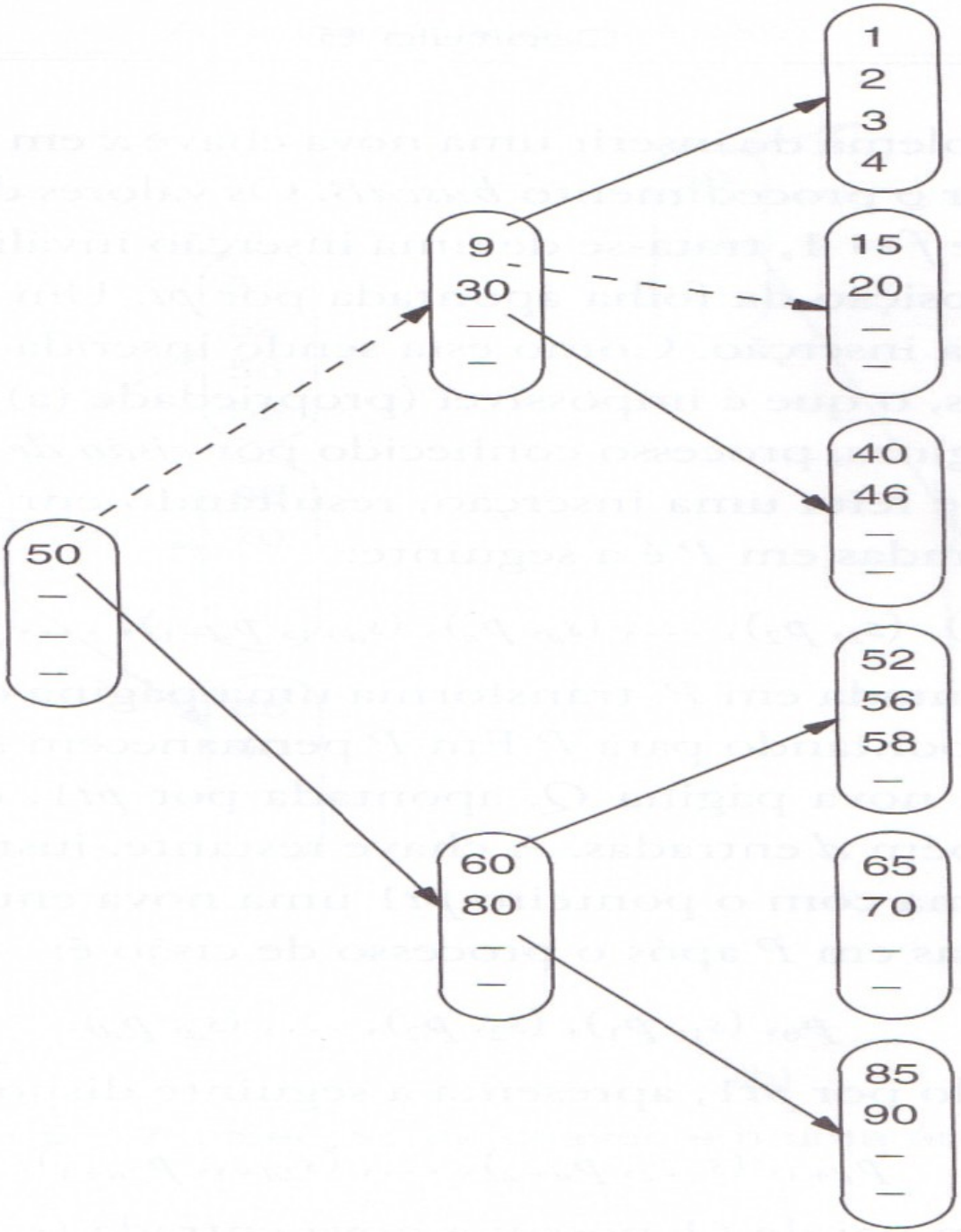


Operação de busca

- O algoritmo de busca compara a chave *x*, a chave procurada, com a chave (ou chaves) do nó-raiz.

- Caso a chave não seja encontrada na página em questão, a busca deve prosseguir em um certo filho dessa página, o qual é escolhido observando-se a propriedade (c).

- Exemplo: O slide seguinte apresenta uma árvore B de ordem 2. As linhas pontilhadas marcam o caminho percorrido em uma busca pelas chaves 10 e 20.

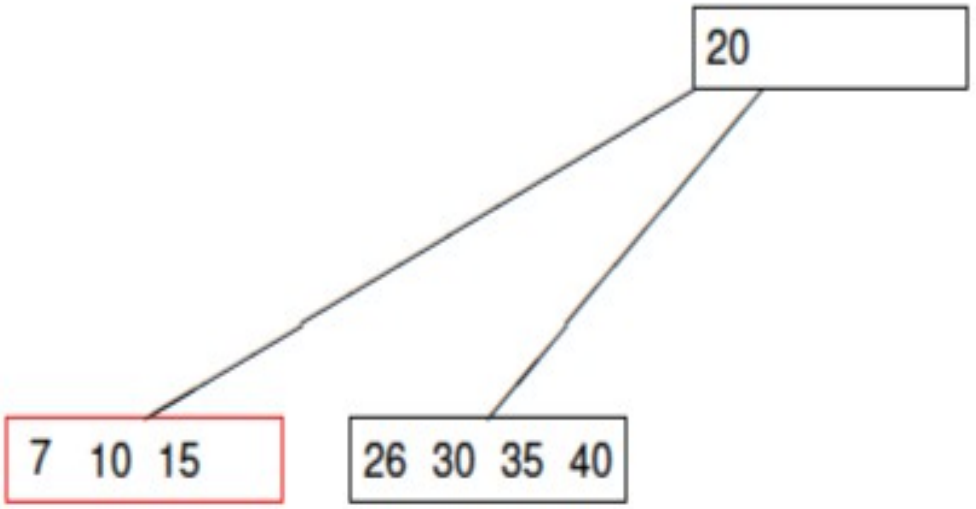

50
9
30
1
2
3
4
15
20
40
46
60
80
52
56
58
65
70
85
90

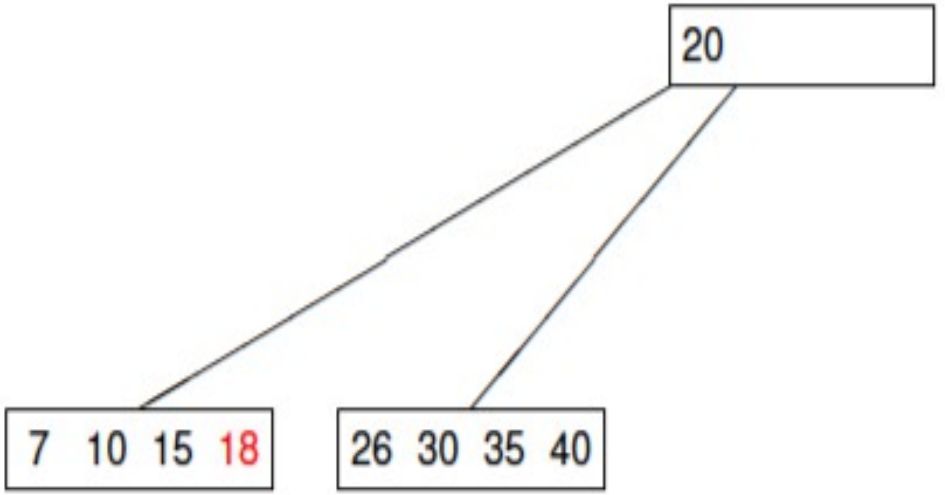
Operação de inserção

- Seja *x* a chave a ser inserida.
- Inicialmente, fazemos a busca da chave *x* na árvore.
- Se *x* for encontrado, nada a fazer.
- Se *x* não for encontrada, insere-se *x* na página-folha onde a busca se encerrou, mantendo a ordenação correta da lista de chaves.
- Se eventualmente a página-folha contém mais de 2*d* chaves, é preciso efetuar seu **particionamento** ou **cisão** (lembrando que 2*d* é o limite máximo para o número de chaves em uma página).

Operação de inserção

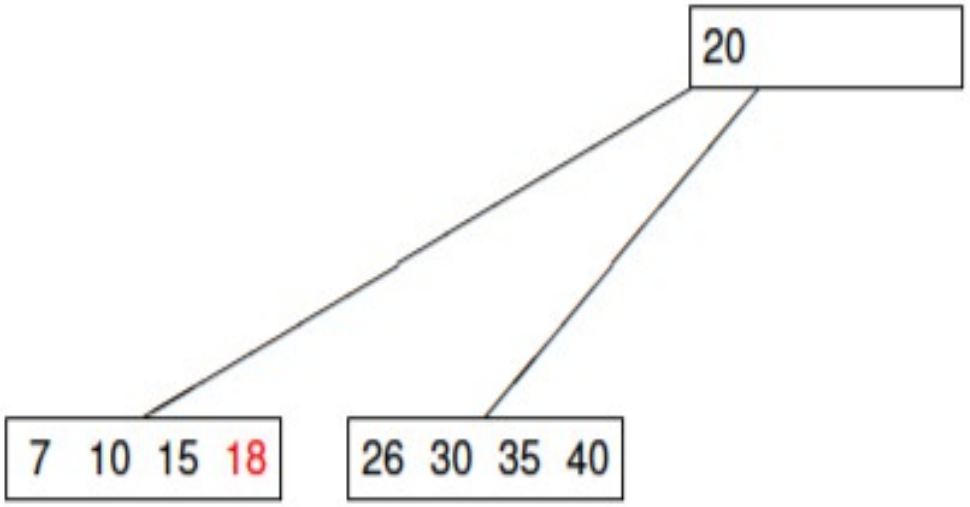
- Exemplo: Inserir a chave 18 na árvore B de ordem 2 abaixo.

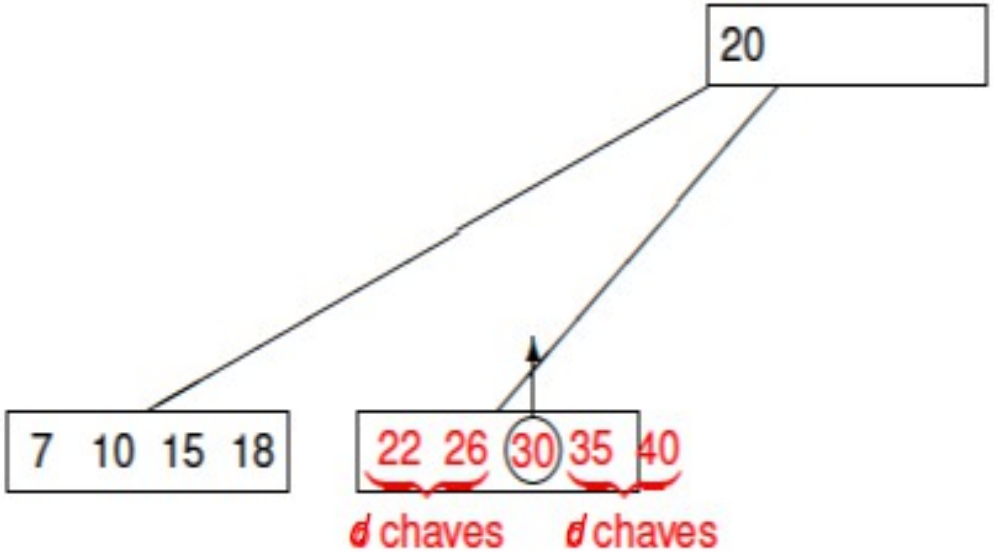




Operação de inserção

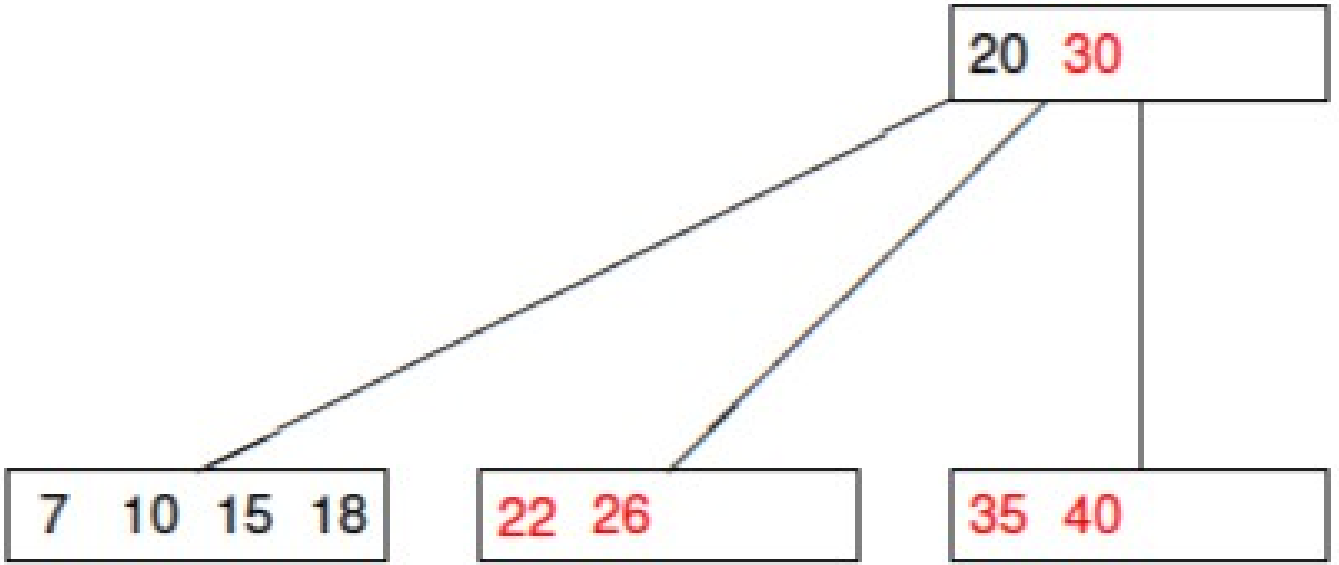
- Exemplo: Inserir a chave 22 na árvore B abaixo. Percebe-se a necessidade de uma cisão no nó-folha onde a chave foi inserida.





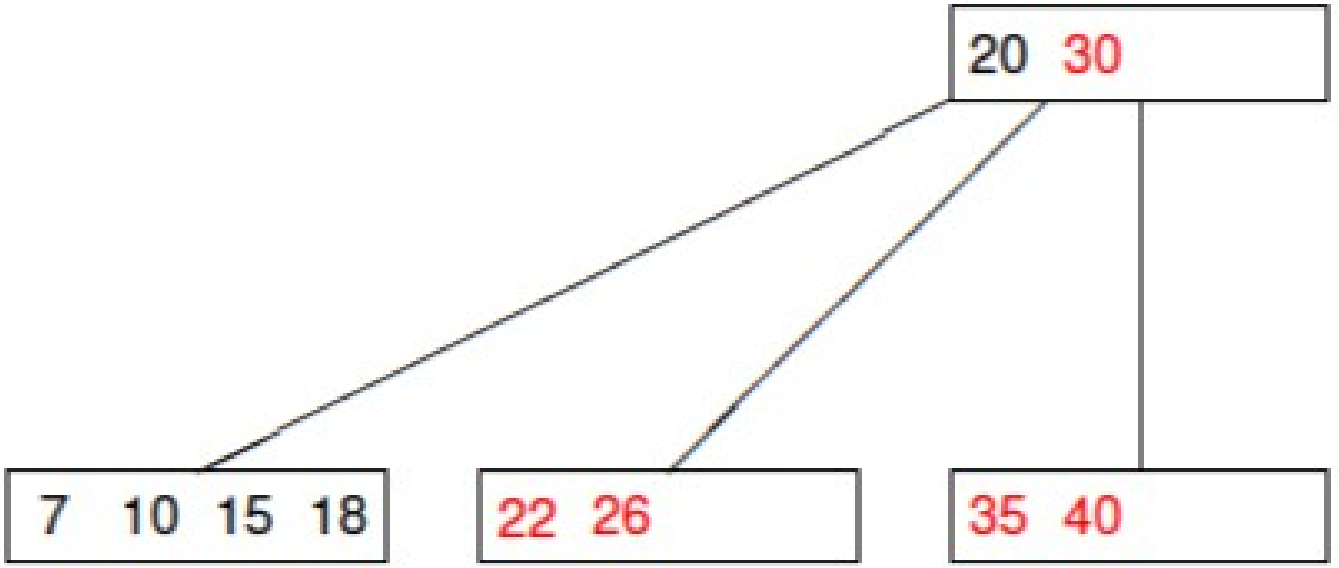
Operação de inserção

- Árvore B após a inserção da chave 22.



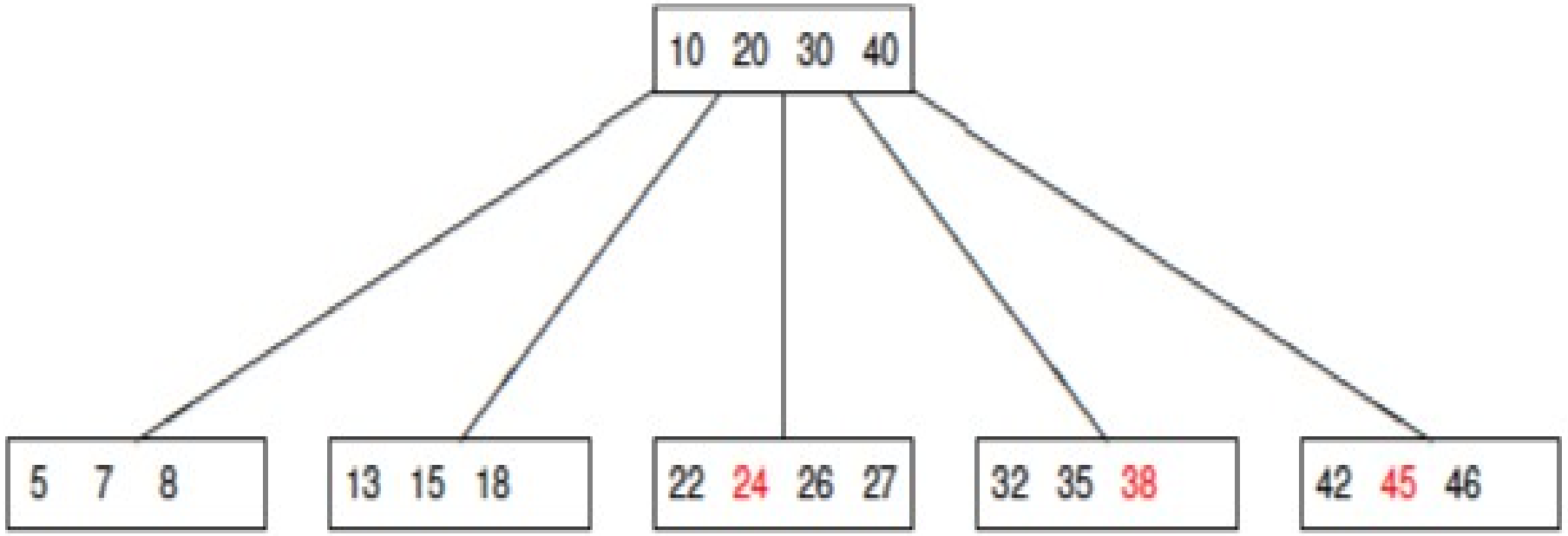
Operação de inserção

- Exemplo: Considerando a árvore B abaixo, adicione as chaves: 5, 42, 13, 46, 27, 8, 32, 38, 24, 45.



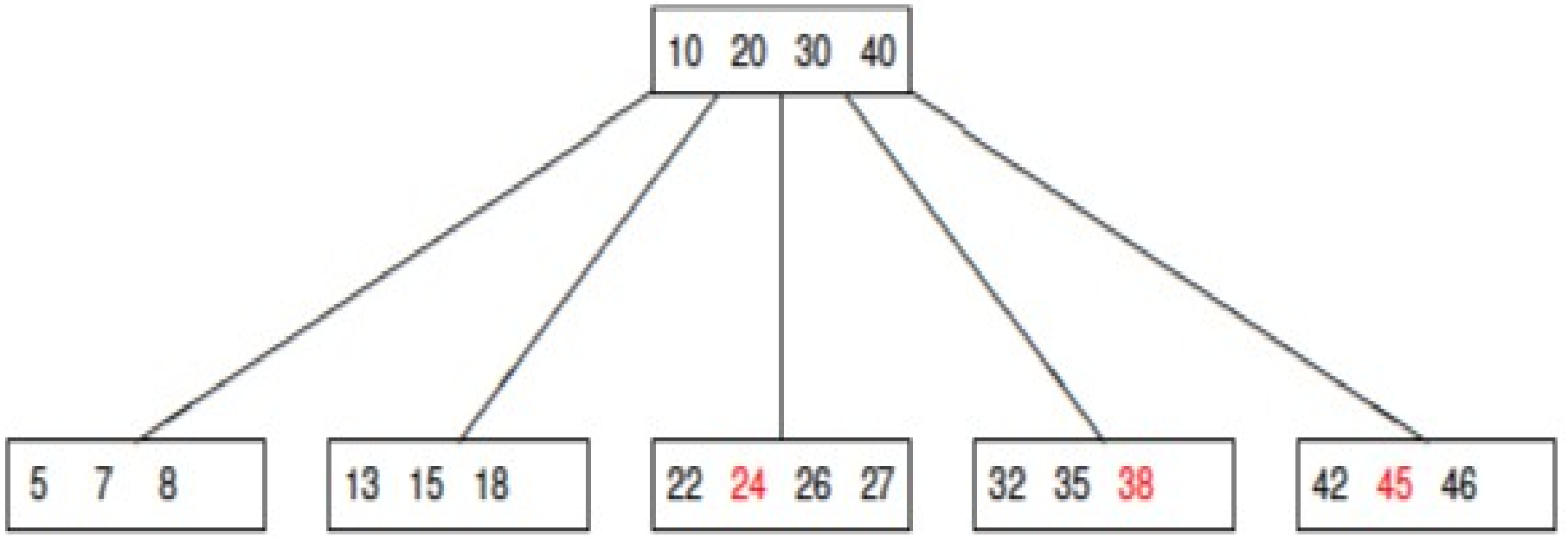
Operação de inserção

- Árvore B após as inserções pedidas no slide anterior.



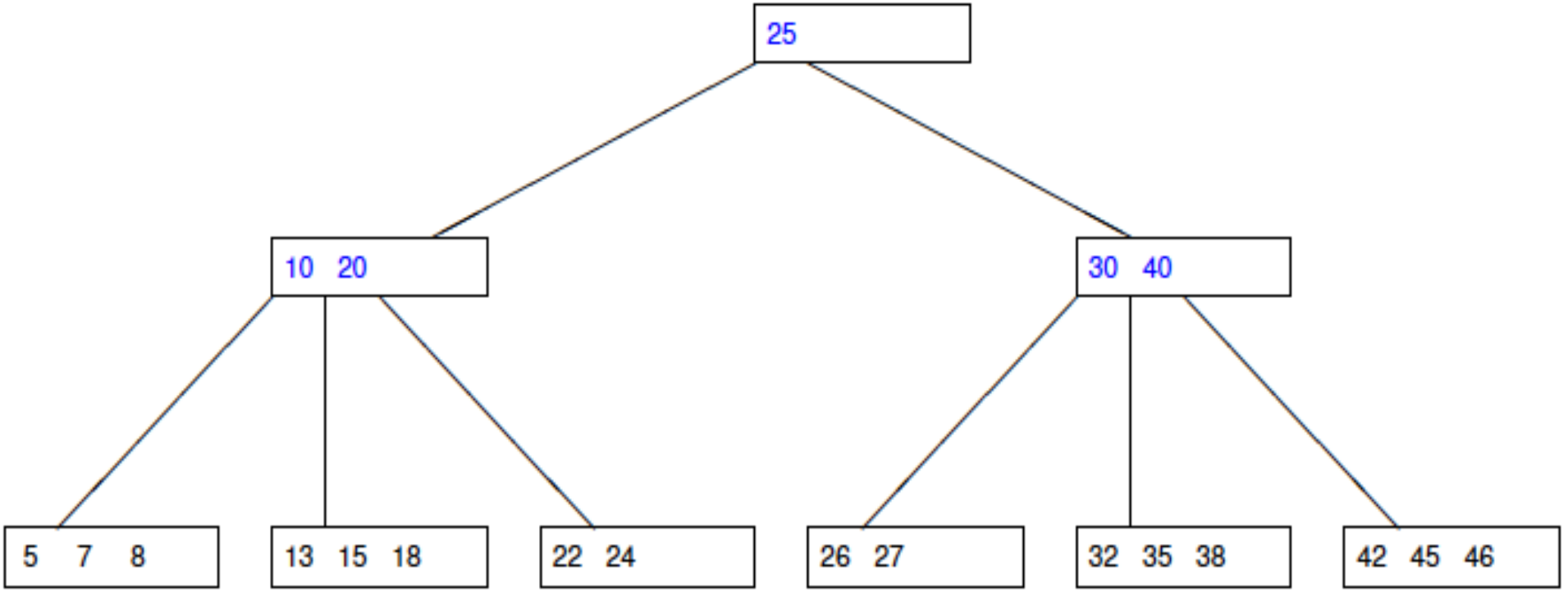
Operação de inserção

- Exemplo: Inserir a chave 25 na árvore B abaixo.



Operação de inserção

- Árvore B após a inserção da chave 25. Houve necessidade de duas cisões.



Operação de remoção

- Primeiro localizamos a página *P* onde se encontra a chave *x* a ser removida. Sabe-se que *P* pode ser uma folha ou uma página interna.

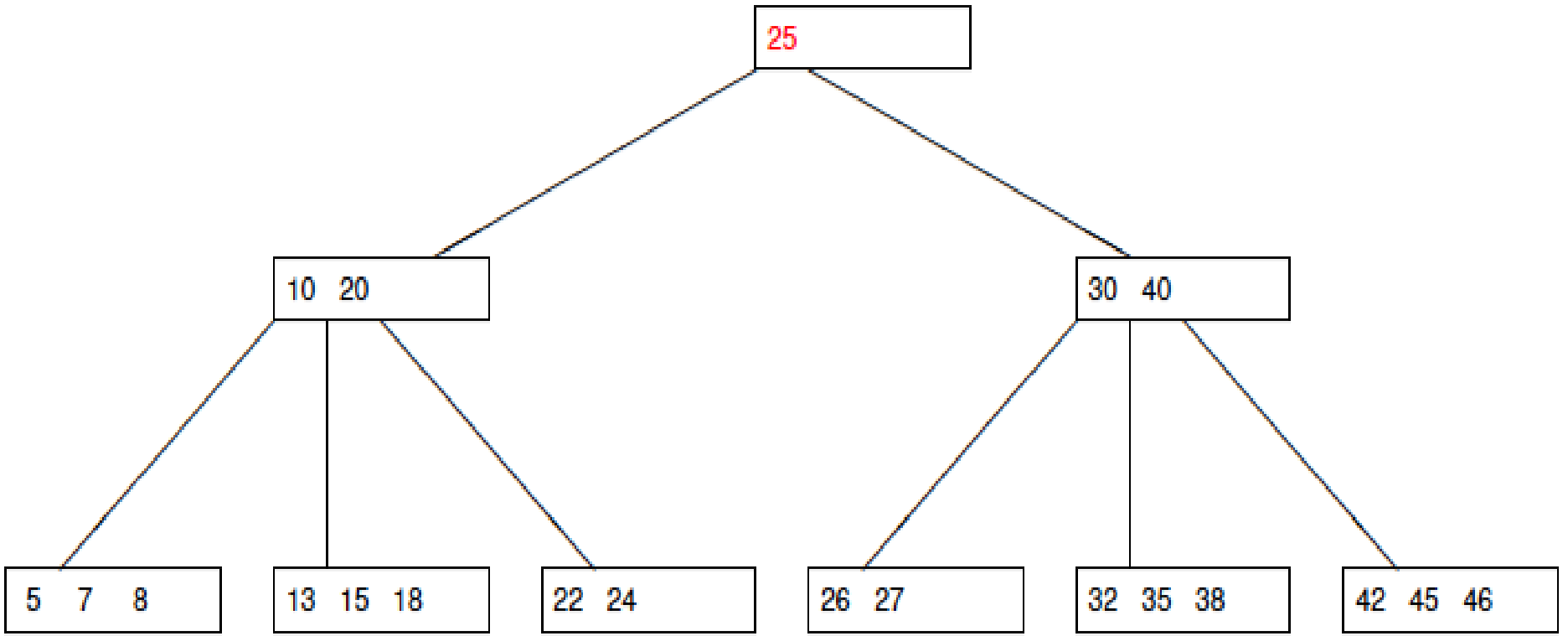
- Caso 1: *P* é uma página-folha. Quando a chave é retirada, o número de chaves da página pode ficar menor que *d*, o que não é permitido. Existem dois tratamentos: **concatenação** e **redistribuição**.

- Duas páginas podem ser concatenadas se são irmãs-adjacentes e juntas possuem menos de 2*d* chaves. Do contrário, redistribuir.

- Caso 2: *P* é uma página interna. **Substitui-se chave *x* pela chave *y* de maior valor na subárvore esquerda**. A retirada de *y* de uma folha pode recair no Caso 1.

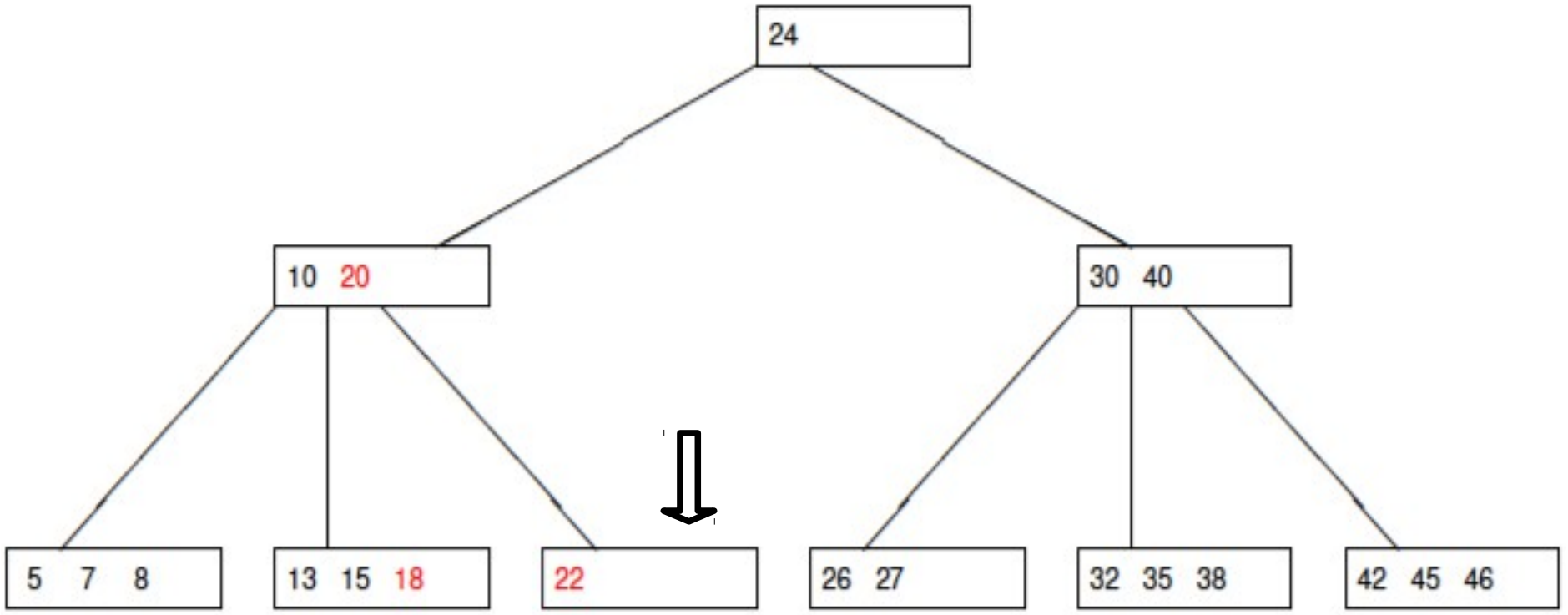
Operação de remoção

- Exemplo: Remover a chave 25, na árvore B abaixo.



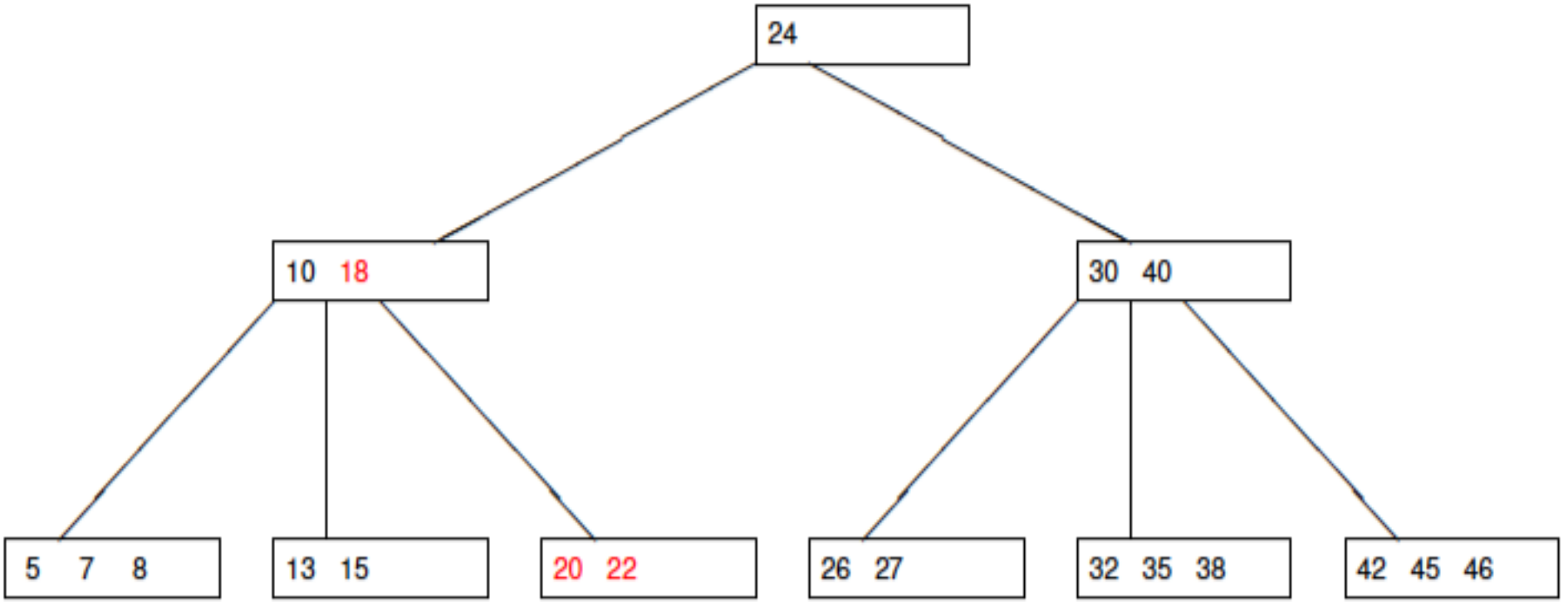
Operação de remoção

- A página com a chave 22 ficou com poucas chaves. **Redistribuir** as chaves com a página irmã.



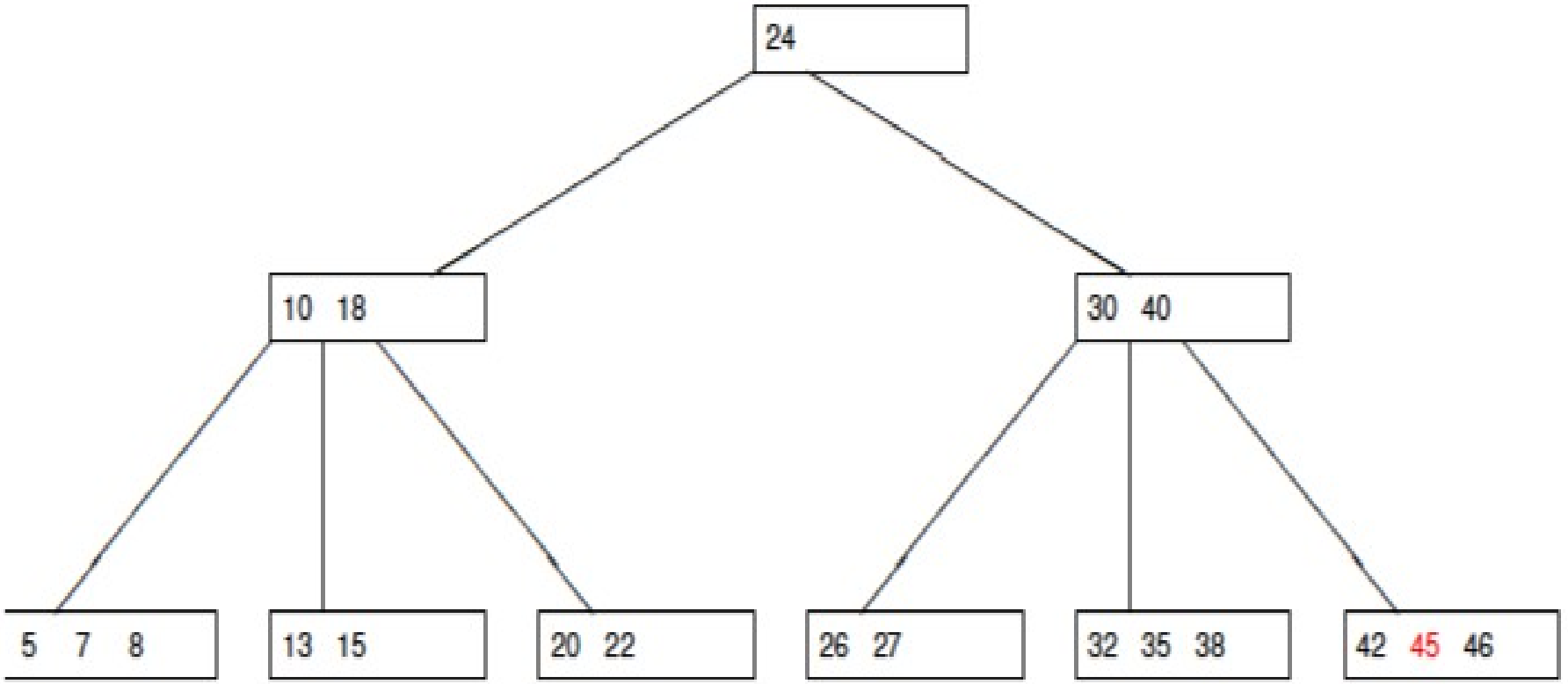
Operação de remoção

- Agora a página tem número aceitável de chaves.



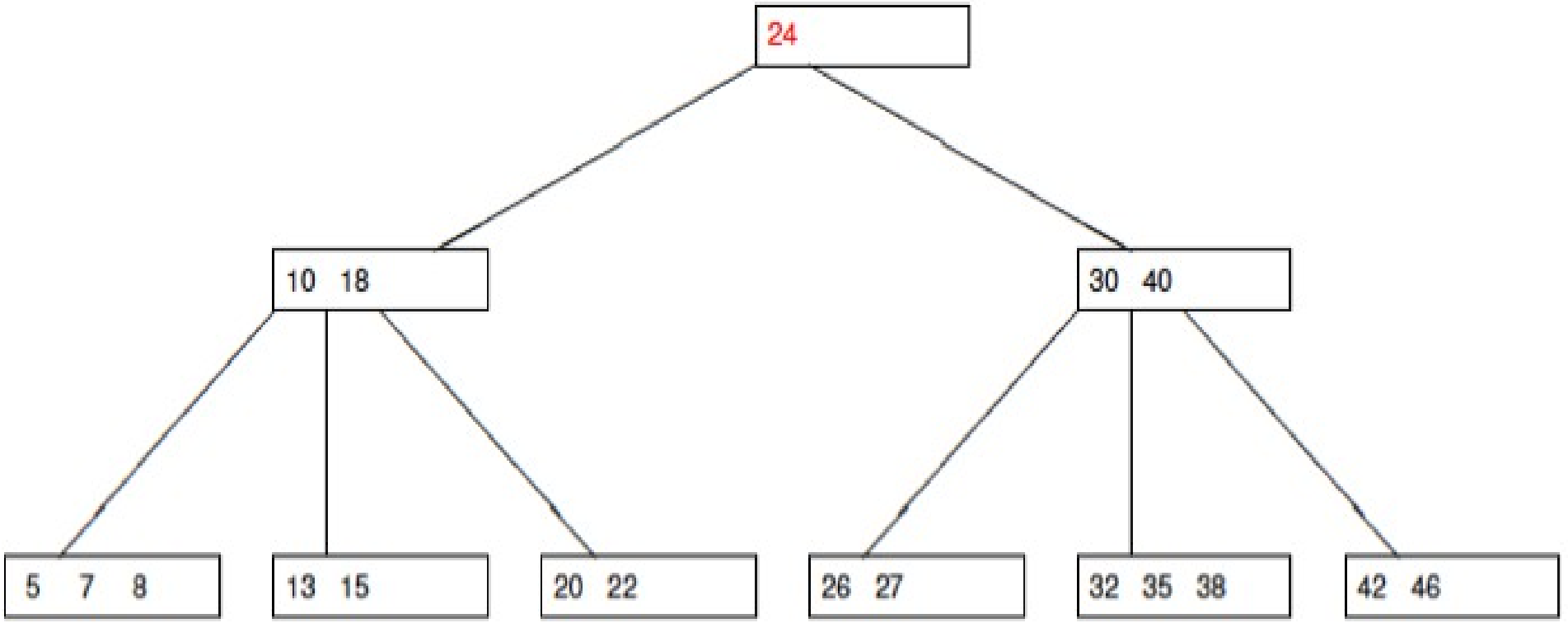
Operação de remoção

- Exemplo: Remover a chave 45, na árvore B abaixo.



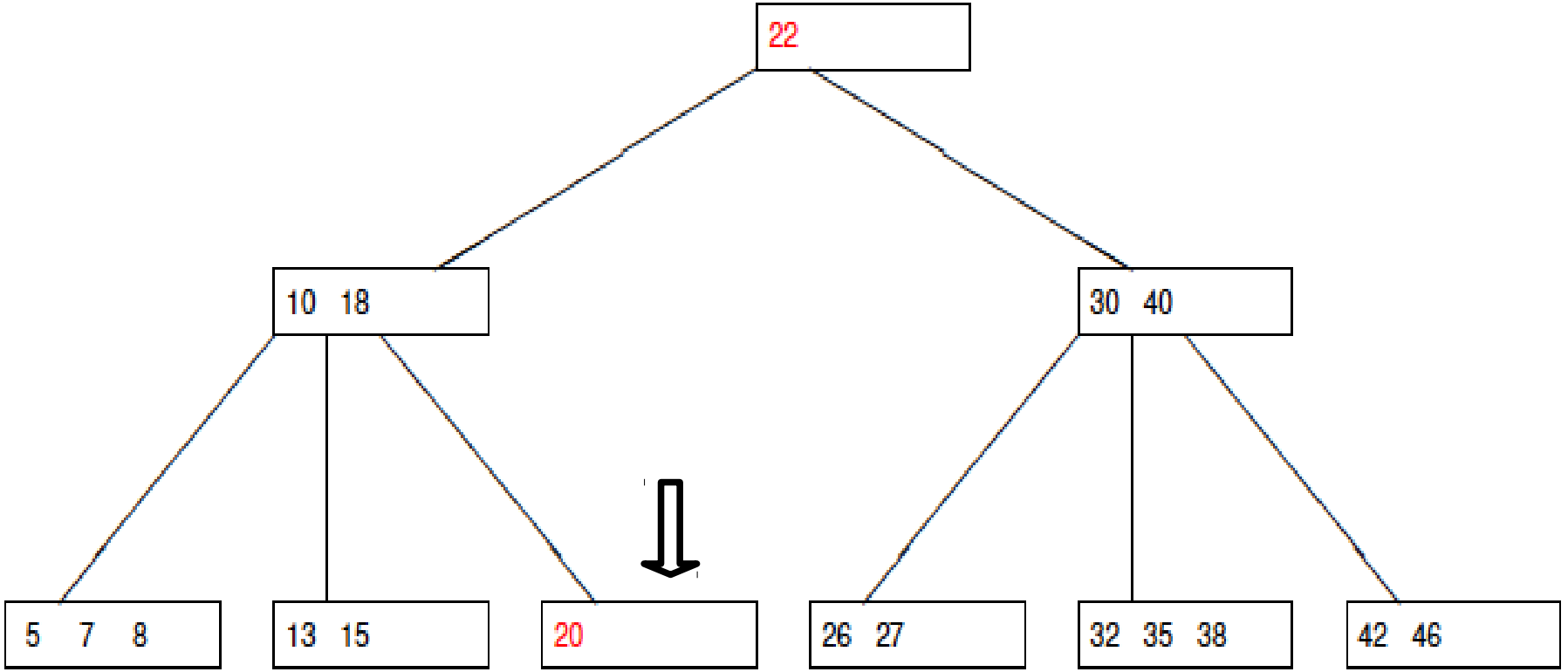
Operação de remoção

- Exemplo: Remover a chave 24, na árvore B abaixo.



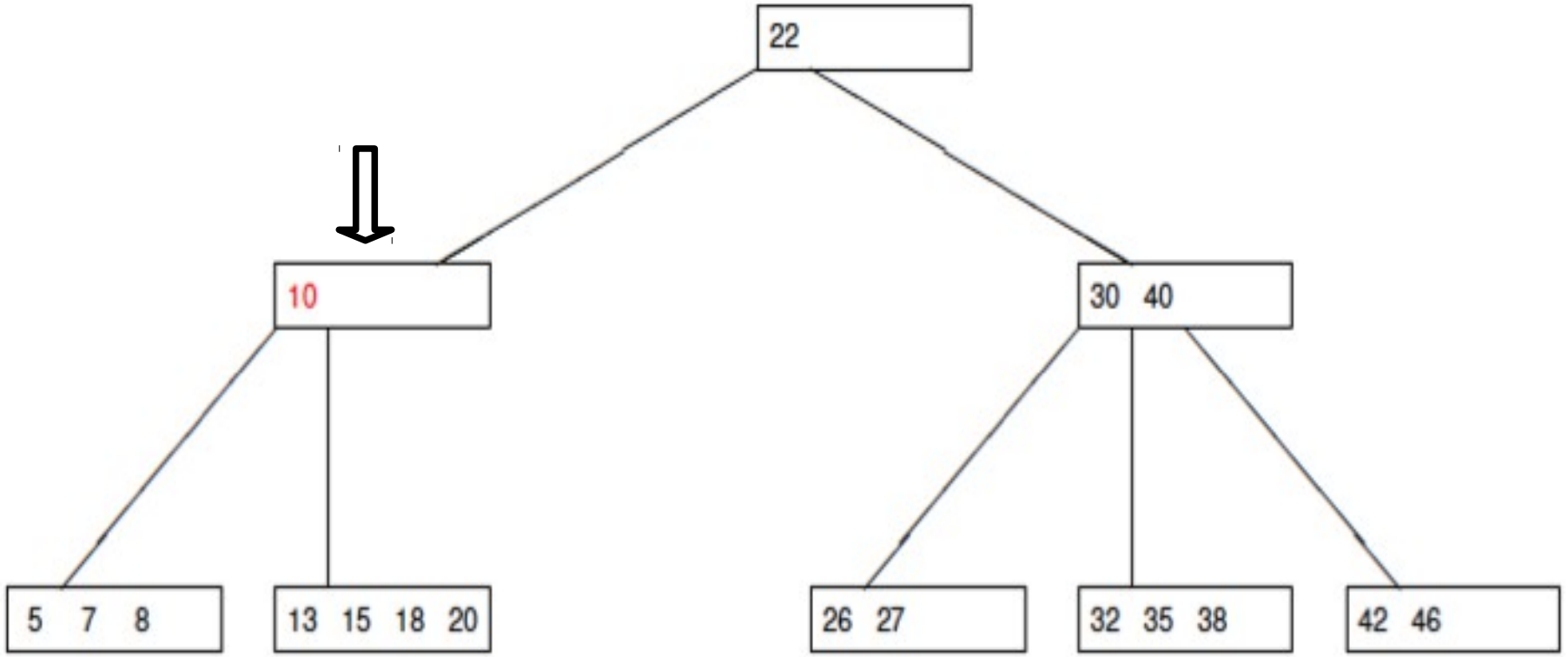
Operação de remoção

- A página com a chave 20 ficou com poucas chaves. **Concatenar** com as chaves da página irmã.



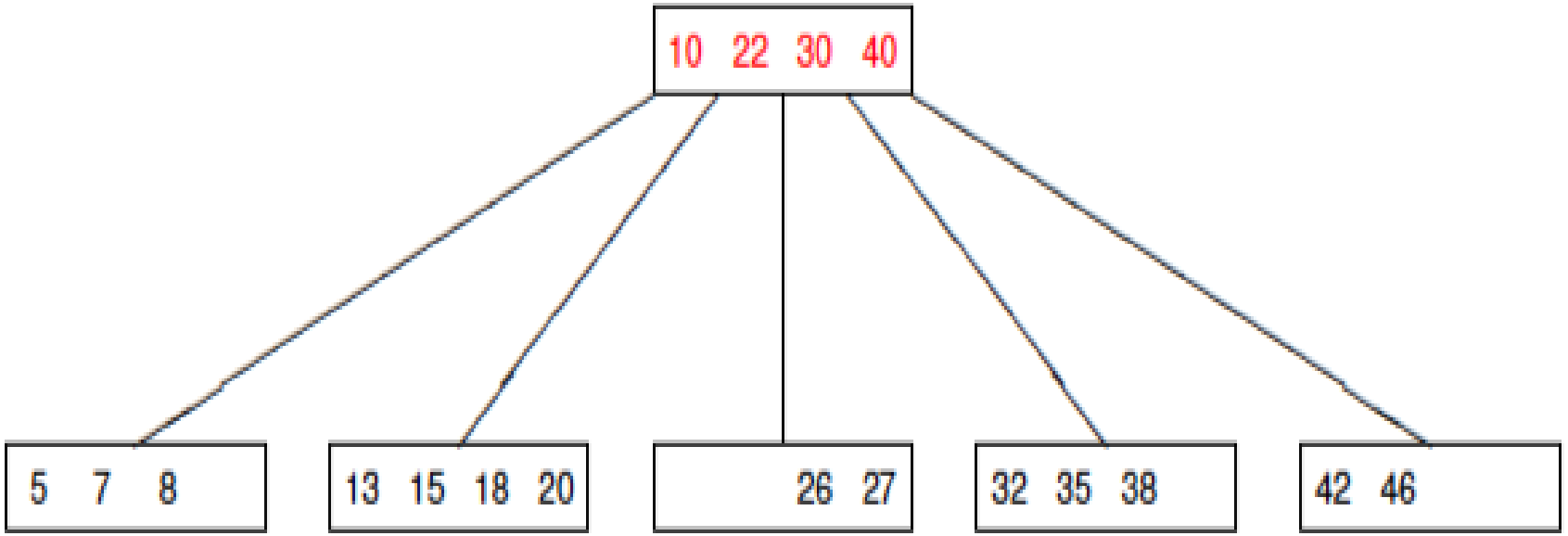
Operação de remoção

- Agora a página ficou número aceitável de chaves. Mas surgiu outro problema. A página com a chave 10 tem poucas chaves. **Concatenar** de novo.



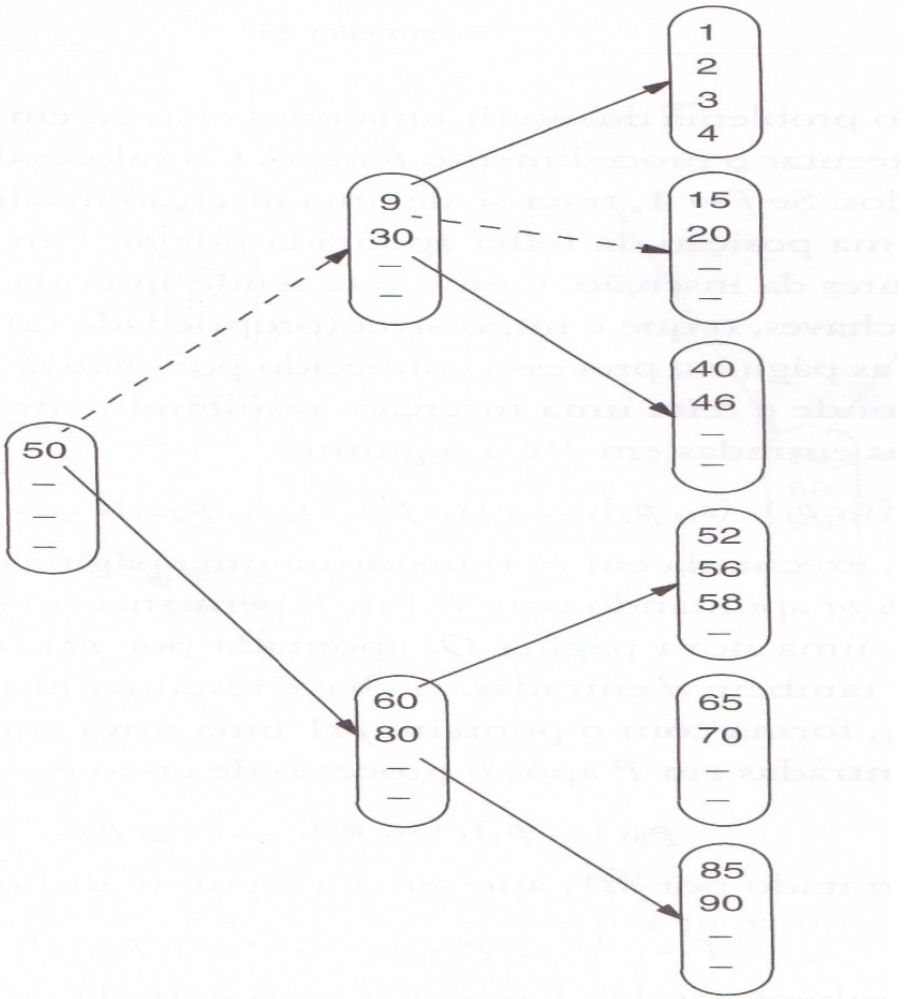
Operação de remoção

- Agora a página tem número aceitável de chaves.

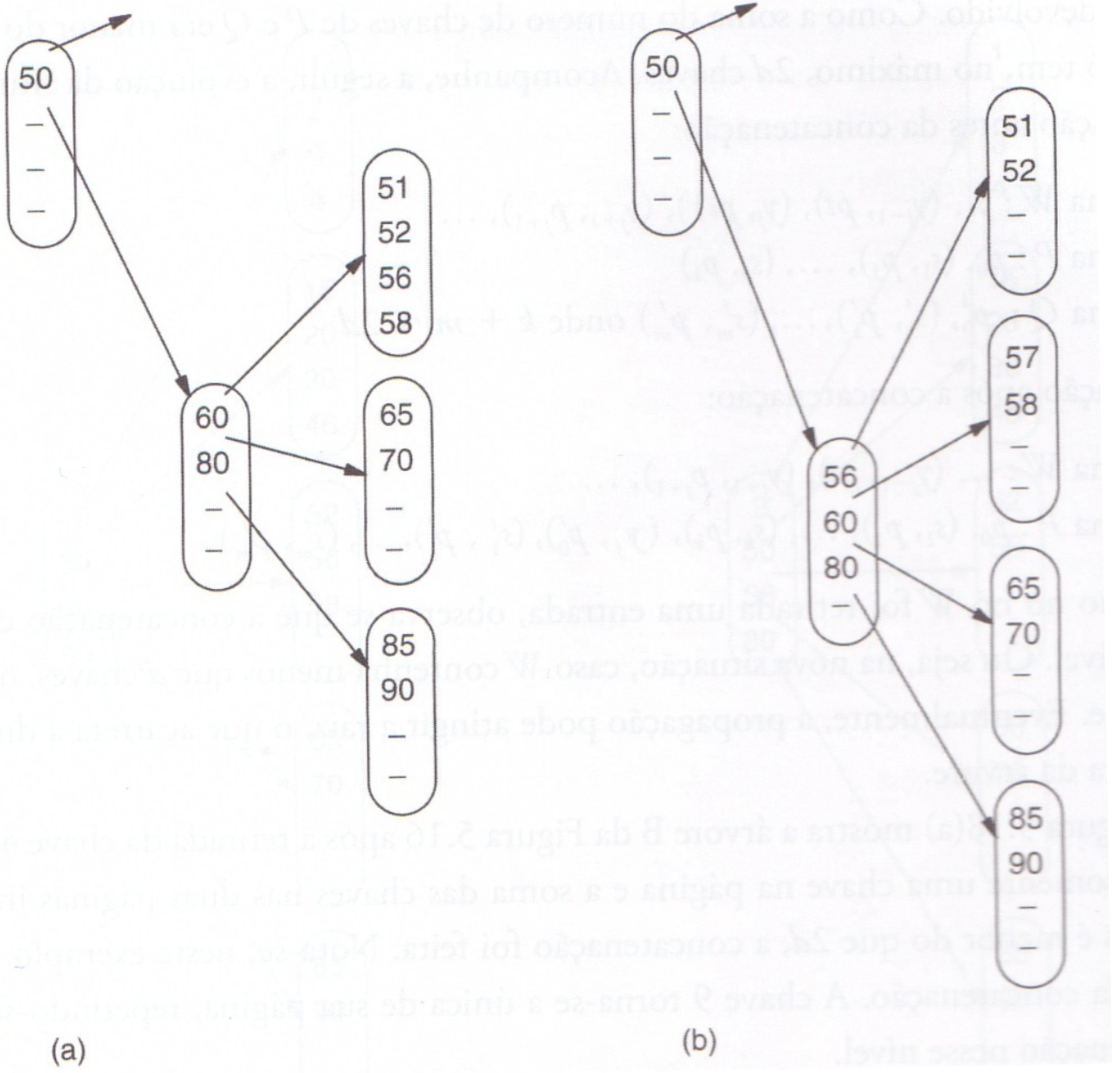


Exercício

Dada a árvore B de ordem 2 abaixo, mostre sua representação após a inserção das chaves 51 e, em seguida, 57.

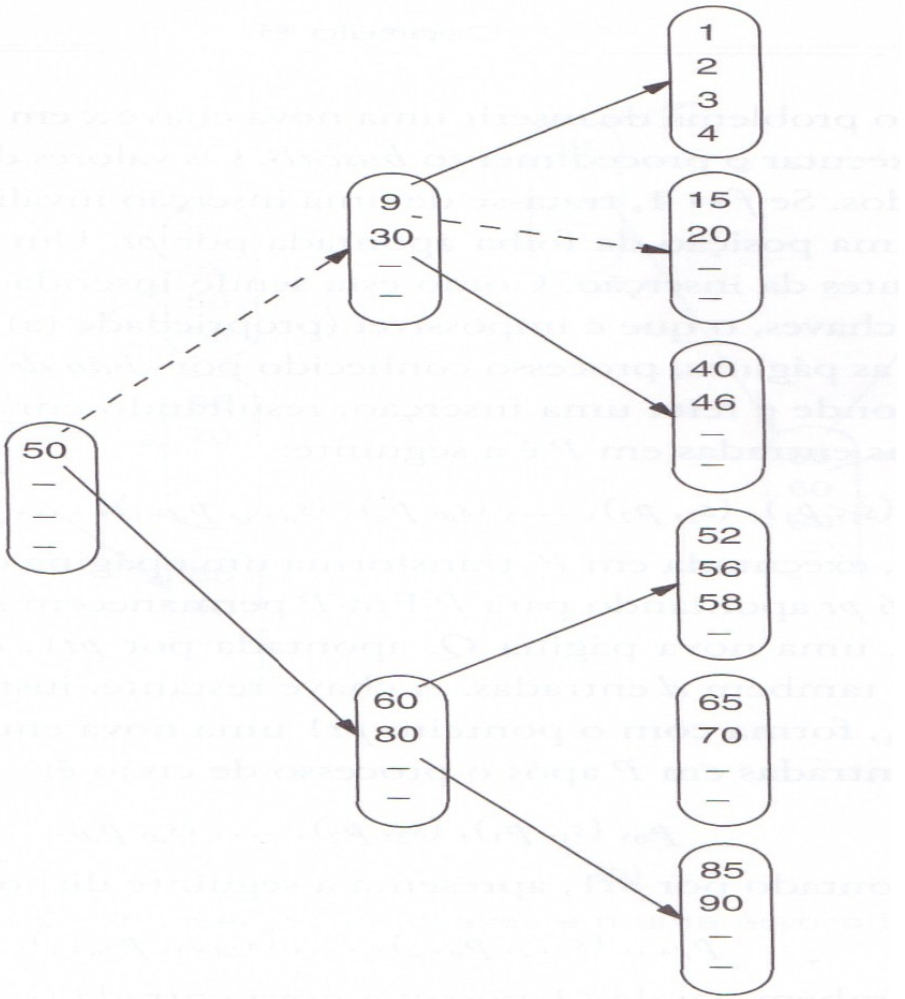


Solução

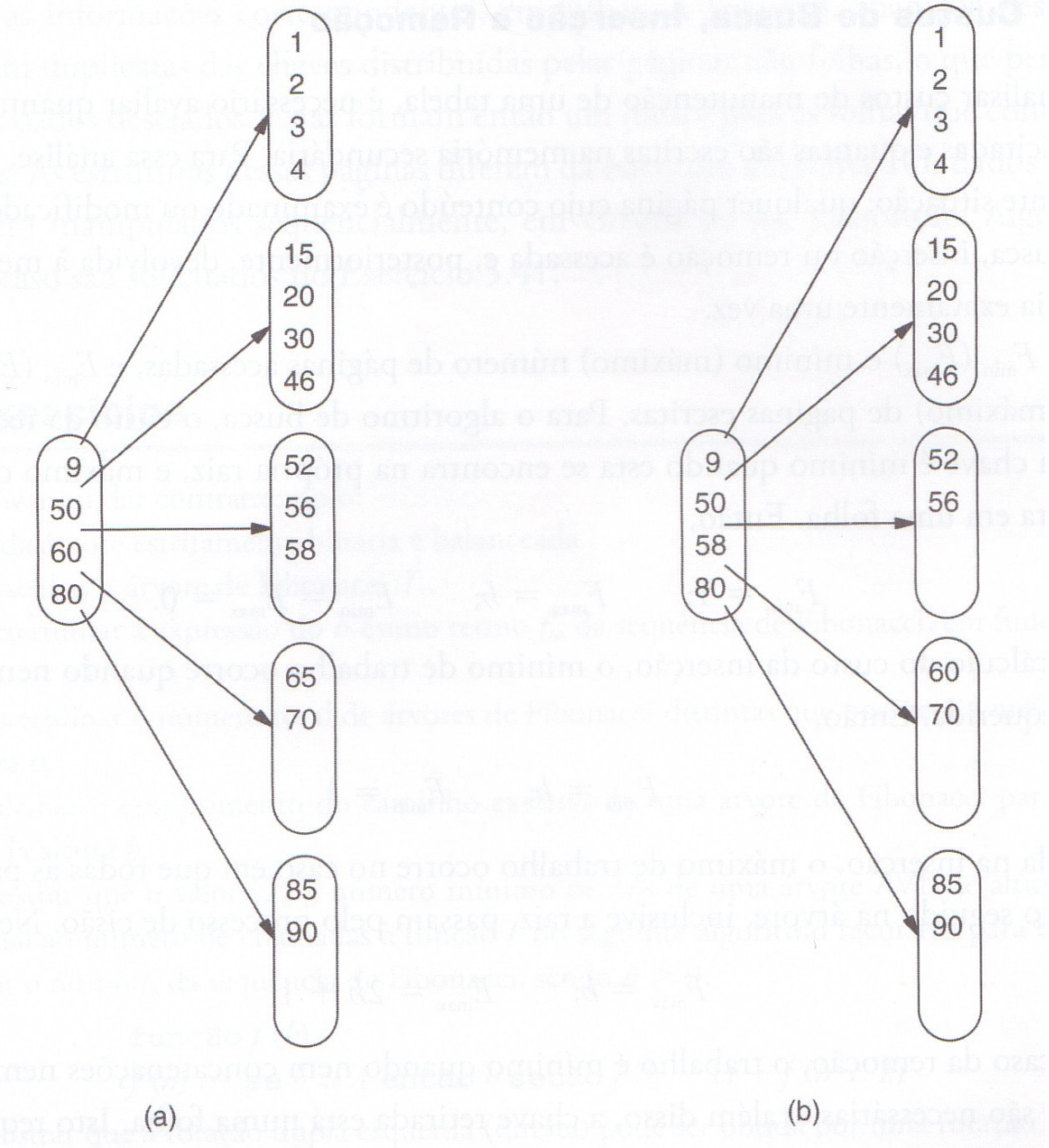


Exercício

Dada a árvore B de ordem 2 abaixo, mostre sua representação após a remoção das chaves 40 e, em seguida, 65.



Solução



É melhor redistribuir do que concatenar. Isso porque a redistribuição não é propagável, ao contrário da concatenação.

Conclusões

- Árvore de busca binária completa: inserções/remoções não são viáveis. Alto custo para mantê-la completa.
- Árvore binária balanceada: alternativa suficientemente boa.
- Busca, inserção, remoção em árvores balanceadas: $O(\log n)$.
- Árvores balanceadas são muito usadas na prática: *TreeMap* e *TreeSet* do Java.util. Em C++, *Map* e *Set* do STL.

Conclusões

- A árvore rubro-negra, assim como a AVL, necessita no máximo de 1 (uma) rotação para balancear na inserção. Contudo, pode ter *log(n)* trocas de cores.

- Na operação de remoção, a rubro-negra faz no máximo 1 (uma) rotação (simples ou dupla), enquanto a AVL pode fazer *log(n)* rotações.

Conclusões

- A árvore rubro-negra tem melhor pior caso que a árvore AVL:
  - Isso faz com que a árvore rubro-negra seja utilizada em aplicações de tempo real (críticas).
  - AVL é uma estrutura mais balanceada que a rubro-negra, o que leva a AVL a ser mais lenta na inserção e remoção, porém mais rápida na busca.
  - A árvore rubro-negra pode ser usada para construir blocos em outras estruturas de dados que precisam de garantias no pior caso. Por exemplo: estruturas de dados em geometria computacional podem ser baseadas nesse tipo de árvore.

Conclusões

- Diversas variações interessantes existem na literatura para as árvores B. Uma das mais conhecidas é a **Árvore B+**. A ideia desta variação é manter todas as chaves de busca em seus nós folha de modo que o acesso sequencial ordenado das chaves de busca seja um processo mais eficiente do que em árvores B.