Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Mestrado Profissional em rede nacional - PROFMAT
Curso de Pós-graduação em Matemática

José Vicente da Silva Filizzola

Uma Abordagem Didática para o Ensino de Máximo Ou Mínimo na Função Quadrática e o o uso do Software GeoGebra

Macapá

2014

José Vicente da Silva Filizzola

Uma Abordagem Didática para o Ensino de Máximo Ou Mínimo na Função Quadrática e o o uso do Software GeoGebra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROFMAT - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco

Macapá

2014

Filizzola, José Vicente da Silva

Uma Abordagem Didática para o Ensino de Máximo Ou Mínimo na Função Quadrática e o o uso do Software GeoGebra / José Vicente da Silva Filizzola - 2014

57.p

1.Ensino de Matemática 2. Função Quadrática.. I.Título.

CDU 536.21

José Vicente da Silva Filizzola

Uma Abordagem Didática para o Ensino de Máximo Ou Mínimo na Função Quadrática e o o uso do Software GeoGebra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROFMAT - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 10 de Outubro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Guzman Eulalio Isla Chamilco

Doutor em Matemática - UNIFAP

Fernando Enrique Echaiz Espinoza

Doutor em Matemática - UFAL

José Walter Cardenas Sotil

Doutor em Matemática - UNIFAP

Erasmo Senger

Doutor em Matemática - UNIFAP

Dedico essa dissertação aos meus queridos pais, a minha esposa e companheira e a todo corpo docente que participou dessa etapa da minha formação.

Resumo

No 1^{o} ano do ensino médio é estudada a função quadrática. Neste trabalho damos atenção à evolução do pensamento científico passando pelos povos antigos, como por exemplo, os babilônios, egípcios, indianos e os gregos. Ainda na evolução do pensamento matemático destacamos as contribuições de Pitágoras, Galileu, Arquimedes, Euclides, Nicolau Copérnico, Kepler, Descartes e Viète, até a forma como conhecemos hoje a representação desta função. Também fazemos uma abordagem histórica de como vários povos resolviam uma equação quadrática e chegamos ao ponto central deste texto que é a abordagem do estudo do ponto máximo ou mínimo da função quadrática. Nesse é utilizado o software GeoGebra para facilitar o entendimento por parte do aluno dos conteúdos abordados e principalmente como apoio a fixação de conteúdos de maneira mais dinâmica e interessante, tornando assim a aula mais interativa.

Palavras - Chaves: Função Quadrática. Parábola.GeoGebra.

Abstract

In the 1st year of high school function is studied quadratic. In this paper we pay attention to the evolution Mathematical of Science passing by ancient peoples, such as the Babylonians, Egyptians, Indians and Greeks. Still in the evolution of mathematical thought we highlight the contributions of Pythagoras, Galileo, Archimedes, Euclid, Copernicus, Kepler, Descartes and Viète, how to know today representation of this function. We also do a historical approach how many people solved a quadratic equation and we get the central point of this text is to approach the study of point maximum or minimum of the quadratic function. We use GeoGebra software to facilitate understanding for students the content covered and mainly as supporting the establishment of content more dynamic and interesting way, thus making the most interactive class.

Keywords: Quadratic function. Parabola.GeoGebra.

Agradecimentos

A Deus por ser a fonte de todo o conhecimento.

Aos amigos do PROFMAT-UNIFAP pelos inúmeros auxílios diante das dificuldades enfrentadas.

Ao Professor Doutor Guzman Eulalio Isla Chamilco pelas constantes contribuições.

Aos professores do PROFMAT pela imensa contribuição na minha formação continuada.

Ao professor Walter Cardenas pelas suas aulas didaticamente bem construídas.

Ao professor Erasmo Senger pela coordenação do nosso curso.

Ao professor Gilberlândio de Jesus pelo rigor em suas correções, o que nos motiva na busca de uma melhora constante na escrita dos textos matemáticos.

A professora Simone Delphin pelas trocas de experiências profissionais.

"A educação sozinha não muda a sociedade; sem ela, tampouco a sociedade muda".

Paulo Freire

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

As mudanças tecnológicas que vem acontecendo atualmente no mundo devem estar presentes na educação. Por isso levantamos alguns questionamentos, tais como: É útil e proveitoso o uso de computadores na escola?

O computador é uma ferramenta para ajudar o professor a ensinar e aluno a aprender de maneira prática e participativa. Esses objetivos são alcançados com o uso de software educacionais.

Vários desses softwares são livres e gratuitos, como o GeoGebra, software de matemática dinâmica que é a reunião de um sistema geométrico dinâmico e de um sistema algébrico.

Assim, este trabalho, mostra um debate sobre o uso do computador e software GeoGebra e quais são as vantagens e as desvantagens do uso deste programa nas escolas. Para isso, trabalhamos o conceito de função quadrática, utilizando o GeoGebra.

No segundo capítulo faremos um apanhado histórico da evolução do pensamento científico e matemático, abordando desde a matemática antiga até a alvorada da matemática moderna.

No terceiro capítulo, definiremos função quadrática e suas propriedades, dando uma visão breve, todavia sem deixar de lado o rigor necessário do conteúdo relacionado ao tema. Como por exemplo, as raízes, as coordenadas do vértice, o gráfico, o cojunto imagem e o eixo de simetria.

No quarto capítulo, utilizaremos o software GeoGebra como recurso para o melhor entendimento do gráfico da função quadrática, assim como comprender a ideia de foco da parábola e de ponto máximo ou mínimo da parábola. Citaremos também, as propriedades da função quadrática de forma dinâmica.

2 A evolução do pensamento científico e matemático

A Matemática como conhecemos hoje passou por lentas a profundas mudanças ao longo dos tempos. Esta ciência foi construída, muitas vezes, derrubando pré-conceitos sociais e religiosos, e isso na maioria das vezes gerou conflitos entre ciência e religião. Mas, mesmo assim o avanço matemático ao longo dos tempos foi enorme, vem mudando a maneira como nos relacionamos com a natureza em nossa volta e com a sociedade que vivemos. Desta forma é importante conhecermos um pouco da historia da evolução do pensamento cientifico matemático.

2.1 A Matemática na Antiguidade

2.1.1 A matemática na Mesopotâmia

Os primeiros registros da Matemática datam de cerca de 4000 a.C, na civilização Suméria, que vivia na região da Mesopotâmia, e da civilização Egípcia. Com desenvolvimento do comercio e da agricultura, se fez necessário um sistema de comunicação aceito por todos e que possuísse símbolos próprios para representar produtos comprados, vendidos e armazenados.

Segundo Eves (2002), a ideia de número surgiu com a necessidade de representar quantidades cada vez maiores. Pois com o crescente número de pessoas nas civilizações antigas as demandas por alimentos, direcionaram a sociedade da época a se organizarem para atender essas necessidades.

De acordo com Boyer (2003) o povo Babilônico era mais preparado para realizarem os cálculos, pois seu sistema de numeração era posicional o que propiciava melhor desenvolvimento das operações básicas.

É importante destacar que as civilizações antigas da Mesopotâmia são chamadas comumente de babilônicas. A região sofreu diversas invasões de outros povos que ao

Figura 2.1: Região da Mesopotâmia

Fonte: Wikipédia

invés de interferirem negativamente em sua cultura, no entanto, adotaram e apreenderam muitos conhecimentos mesopotâmicos.

A escrita era cuneiforme e estão registradas em cerâmicas e tabuletas com mais informações do que os papiros egípcios, devido sua conservação.

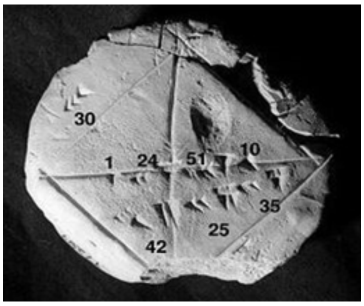

Figura 2.2: Tabuleta de argila babilônica com inscrições.

Fonte: Wikipédia

Observe que ao contrário da maioria das civilizações o sistema numérico mesopotâmico tinha como base o valor sessenta. Até hoje, o sucesso desse sistema de numeração se reflete em nossas unidades de tempo, 60 segundos para 1 minuto, 3600 segundos para 1 hora, as medidas de ângulos na circunferência, uma volta completa na circunferência equivale a 360º.

Segundo Boyer (2003) assim como os papiros Egípcios, as tabuletas mesopotâmicas não descreviam os procedimentos, mas apenas davam resultados das questões neles propostas. Isso sugeriu algum desenvolvimento geométrico entre lados de um triângulo e do próprio teorema de Pitágoras usado corretamente para resolver o problema de uma prancha de comprimento 0,3 (1/2 na nossa notação) que está apoiada em uma parede. Nesta questão pergunta-se de quanto a extremidade inferior se afastará da parede se a superior escorregar para baixo de uma distância 0,6 unidades.

Problemas que recaem numa equação do 2º grau já eram conhecidos pelos babilônicos, como encontrar dois números conhecendo sua soma S e seu produto P.

Segundo Lima (2012) o estudo da função quadrática tem sua origem na resolução da equação do segundo grau.

O método usado pelos babilônicos para achar dois números conhecidos a soma S e produto P, era o seguinte:

1º Passo: eleve ao quadrado a metade da soma: $\left(\frac{S}{2}\right)^2$

2º Passo: subtraia o produto do 1º passo: $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P$

3º Passo: extraia a raiz quadrada do 2º passo: $\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$

4º Passo: some ao resultado do 3º passo a metade da soma: $\left(\frac{S}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$

5º Passo: a outra raiz é dado por: $S - x = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$

Hoje em dia usamos a fórmula $x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$, os babilônicos não se ocupavam com respostas negativas pois seus números S e P eram sempre positivos.

2.1.2 A Matemática no Egito Antigo

Ao longo das margens do rio Nilo desenvolveu-se a civilização Egípcia, pois suas margens férteis, fora propícias para à agricultura, irrigação e construção de diques, isso possibilitou a fixação de numeroso grupo de pessoas nas proximidades do rio. Pelo fato de que a sociedade egípcia era uma sociedade extremamente fixa, centrada na pessoa do faraó, que não permitia uma maior abertura para as classes inferiores, as ciências também foram prejudicadas. Mas, mesmo assim houve um grande avanço científico e matemático neste período.

No antigo Egito, a medicina teve avanço significativa, pois os sacerdotes (os médicos) egípcios possuíam um grande conhecimento na medicina, como bem comprovam as múmias de vários faraós descobertas nos dois últimos séculos, assim como a descoberta de vários papiros, mostram o registro de certo desenvolvimento na matemática egípcia, como exemplo temos a descoberta do papiro de Moscou ou Golenischev e os Papiros de Rhind.

Segundo Eves (2002), o papiro de Moscou ou Golenischev data de aproximada de 1850 a.C, é um texto matemática que contém 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado. O papiro foi adquirido pelo colecionador russo Golenischev e agora se encontra no Museu de Belas Artes de Moscou. Já o papiro de Rhind ou Ahmes, data de aproximdamnete 1650 a.C, um texto em forma de manual prático que contém 85 problemas em escrita hierática pelo escriba Ahmes. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo depois comprado pelo museu britânico. Outra fonte de informações do conhecimento egípcio da época é o papiro Matemático Caíro, que foi descoberto em 1938 e investigado em 1962. O papiro data de 300 a.C aproximadamente e contém quarenta problemas de matemática, sendo que nove tratam exclusivamente com o Teorema de Pitágoras, o que mostra que os egípcios dessa época sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, também que acontecia o mesmo com os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29.

A matemática egípcia sempre foi essencialmente prática. Quando o rio Nilo estava no período das cheias, começavam os problemas para as pessoas. Para resolver este problema foram desenvolvidos vários ramos da matemática, foram construídas obras hidráulicas, reservatórios de água e canais de irrigação no rio Nilo. Procedeu-se também a drenagem de áreas alagadas.

Nesse período outra ciência que teve avanço significativo à época foi a Astronomia, pois os sacerdotes desenvolveram cálculos para determinar quando teria a ocorrência do período de cheia do rio Nilo. Baseando-se nestes cálculos foi construído um calendário de doze meses e trinta dias.

A construção das grandes pirâmides nos leva a crer que a geometria era outra prática desenvolvida no Egito antigo, pois as mesmas apresentam impressionante acertos na sua construção para as limitações de equipamentos e técnicas de construção daquela época. Podemos observar que a matemática egípcia foi um dos pilares da matemática grega, a qual foi a base para a nossa matemática moderna. Isto em geometria, trigonometria ou mesmo na astronomia.

2.1.3 A matemática na Grécia Clássica ou Período de Ouro do Povo Grego

Segundo Boyer (2003) as origens gregas tiveram forte influência de vários povos da Europa central e da Ásia, porém vale destacar a intervenção dos Cretenses, esses habitantes da ilha de Creta, desde aproximadamente 3000 a.C, tinham destaque no comercio marítimo, no comercio com os Egípcios e a Síria, as atividades de comercio eram registradas em papiros com registros de escrita de fácil aceitação pelos mercadores da época. Isso foi um fator facilitador de troca de informações entre as culturas Egipcia e Babilônica e o povo Grego. Esse período de Ouro da cultura Grega vai de aproximadamente 2000 a.C até 40 a.C. quando então ocorre a dominação pelos Romanos.

Os gregos, como povo invasor, vindo do norte, abrindo caminho até o mar, não trouxeram tradição matemática ou literária consigo, entretanto tinham grande interesse de apreender, e não demoraram a melhorar o que lhe fora ensinado. Por exemplo, tomaram talvez para si um alfabeto, provavelmente Fenício, só de consoantes, e logo lhe acrescentaram as vogais.

Os Gregos obtiveram sua evolução matemática partindo de uma ideia simples. Enquanto os outros povos da época, Babilônios e Egípcios, se perguntavam "como?"os estudiosos Gregos perguntavam-se "por quê?"Então a partir desse momento a matemática que tinha caráter preponderantemente prático passou a ser mais desenvolvida na direção dos conceitos, axiomas e teoremas.

Os gregos de hoje ainda se chamam de helenos, nome usado por seus antigos antepassados, que se estabeleceram ao longo da costa do Mediterrâneo. Os primeiros jogos Olímpicos se realizaram em 776 a.C, e por esse período já se observava uma literatura desenvolvida como podemos destacar as obras de Homero e Hesíodo. Da Matemática grega da época, pouca coisa sabemos. Então durante o sexto século a.C., aparecem dois homens, Tales e Pitágoras que tiveram na matemática papel de grande relevância.

Segundo Eves (2002), Os Pitagóricos afirmavam que "tudo é número", ou seja para eles, os Pitagóricos, "tudo na natureza está arranjado conforme as formas e os números". Outro estudo atribuído a estes estão ligados a geometria, aritmética, música e Astronomia, esse estudo era chamado de quadrivium. São atribuídas duas descobertas importantes a Pitágoras principalmente, a ideia de número irracional feito por meio de segmentos de retas incomensuráveis e a relações entre os lados de um triângulo retângulo, mais conhecido como teorema de Pitágoras, que já era desenvolvido pelo povo da Mesopotâmia (babilônios).

O retângulo áureo teve atenção especial dos Pitagóricos, sendo ele qualquer retângulo ABCD com a propriedade de possuir lados de medidas a e a + b, e se suprimirmos dele um quadrado de lado a, o retângulo restante será semelhante ao retângulo áureo ABCD. Um exemplo deste retângulo é o símbolo usado pela sociedade brasileira de matemática SBM.Obs:

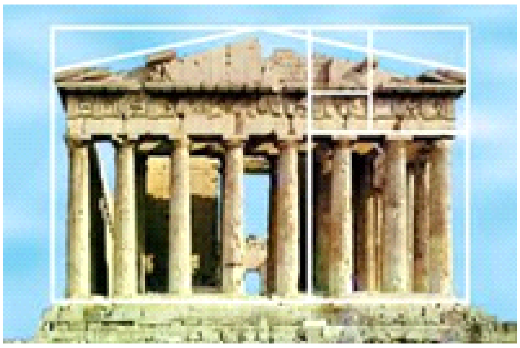

Figura 2.3: Pathernon.

Fonte: Wikipédia

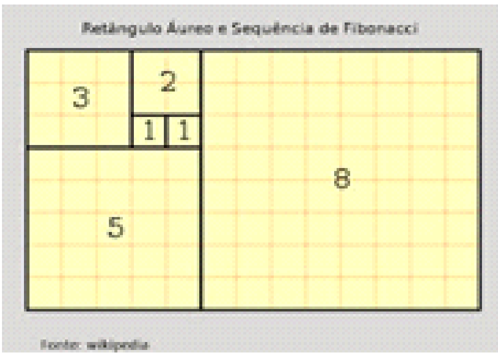

Figura 2.4: Número de ouro .

Fonte: Wikipédia

A idade áurea da matemática é um período compreendido de 300 a.C a 200 a.C e é marcada pela contribuição de três grandes estudiosos, Euclides, Arquimedes e Apolônio.

Arquimedes é considerado o maior matemático da antiguidade Grega, acabou morto na guerra entre Romanos e Gregos, no famoso cerco a Siracusa. Essa guerra tem uma passagem histórica, sem comprovação documental, que foi passada ao longo do tempo, onde durante o cerco, Arquimedes teria ordenado aos soldados de Siracusa que polissem seus escudos e que se colocassem, durante o dia, lado a lado, formando um arco de parábola, com a finalidade de concentrar os raios solares nas velas dos navios romanos e com isso queimando as velas e consequentemente os navios, e com isso evitará a invasão romana, adiando a queda de Siracusa. Arquimedes deu contribuição na engenharia, onde

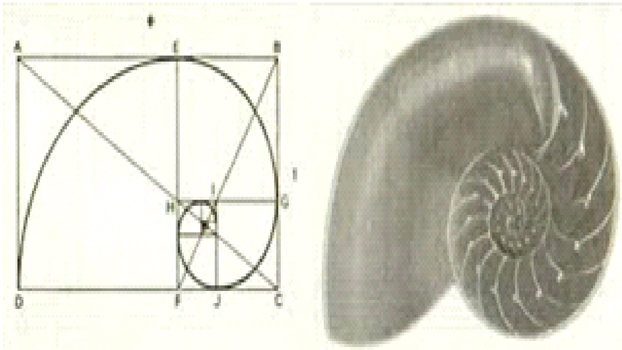

Figura 2.5: Nautilus .

Fonte: Wikipédia

construiu varias máquinas de guerra e assim ajudou também a desenvolver a mecânica. Outro estudo atribuído a Arquimedes é o estudo da Quadratura da parábola, que consiste em calcular a área da região delimitada por uma reta e uma parábola. Teve contribuição, no que chamamos de cálculo integral, pelo chamado método da exaustão.

Euclides viveu por volta de 306 a.C - 283 a.C , seu trabalho que ficou mais conhecido foi os elementos, uma coleção de 13 volumes, onde pela primeira vez o conhecimento existente na época foi sistematizado e escrito com tratamento geométrico e algébrico, baseando-se em axiomas, postulados, definições e teoremas, como nunca antes tinha sido feito. Esta coleção é uma das mais impressas da matemática.

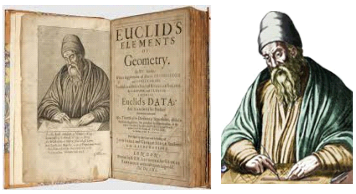

Figura 2.6: Euclides .

Fonte: Wikipédia

Euclides e Arquimedes foram os mais famosos Gregos na matemática, porém Apolônio teve grande destaque no desenvolvimento das secções cônicas, que esta muito ligada a questão da duplicação do cubo, que é um problema onde dada uma aresta de um cubo, e com uso de compasso e régua, o cubo é duplicado, tendo o dobro do volume do cubo inicial.

Apolônio viveu em Alexandria entre 246 a.C e 221 a.C, entre suas obras a mais importante são As Cônicas, onde se chama pela primeira vez as curvas de parábola, hipérbole e elipse.

Segundo Boyer (2003) Apolônio mostrou que de apenas um único cone poderia se obter as três formas de curvas ou secções cônicas. É dele também a definição moderna usada de cone circular. No caso da parábola obtêm-se a mesma seccionando o cone por um plano que seja paralelo a geratriz do cone.

Aristóteles, filósofo Grego, teve grande influência na cultura ocidental, nasceu na Macedônia, e foi para Atenas estudar com Platão, e aplicou a palavra parábola como figura de linguagem, ou seja, Parábola é originário do grego parabole, que significa curta narrativa, é uma narrativa figurada onde fazemos comparações.

2.1.4 A matemática na China e Índia

Segundo Boyer (2003), as civilizações da China e da Índia são bem mais antigas que as civilizações ocidentais, mas não mais antigas que as civilizações egípcia e mesopotâmica. Há um consenso entre os historiadores de que é muito difícil estabelecer datas corretas a respeito das produções chinesas dentro da matemática. O clássico mais famoso da China antiga, Chou Pei Suang Ching, que trata de cálculos astronômicos, uma introdução de propriedades dos triângulos retângulos e rudimentos sobre frações, tem uma variação de mais de mil anos entre as datas prováveis de sua escrita. Isso ocorre por que foi escrito por várias pessoas, em períodos diferentes. No Chou Pei existem indicações do Teorema de Pitágoras tratado sob forma algébrica. A obra tem o formato de um diálogo entre um príncipe e seu ministro a respeito do calendário, o ministro diz ao príncipe que a arte dos números deriva do circulo e do quadrado, o quadrado pertencente à Terra e o círculo aos céus. A geometria chinesa era essencialmente um exercício de aritmética ou álgebra. Outra publicação chinesa antiga, é o livro Chui Chang Suan Shu (Nove capítulos sobre a arte da matemática) por volta de 1200 a.C. com 246 problemas e destaque aos problemas sobre mensuração de terras, agrimensura, engenharia, impostos, propriedades dos triângulos retângulos, solução de equações. Nestas soluções aparecem soluções precisas com imprecisas, elaboradas e primitivas, do mesmo modo como ocorria com os egípcios.

Na mesma época em que Pitágoras desenvolvia seus teoremas e axiomas na Grécia, Buda agia na Índia desenvolvendo uma nova filosofia por volta de 500 a.C. encontrado muitos adeptos com os mais pobres. Alguns estudiosos acreditam que Pitágoras esteve em contato com Buda e que desenvolveu seu mais famoso teorema com os Hindus.

Como os egípcios os indianos tinham também seus esticadores de corda e os primeiros registros geométricos dos indianos foi chamado de Sulvasutas ou esticadores de cordas, a origem dos Sulvasutas são incertas. Podemos destacar varias nomes da Índia antiga que contribuíram para o desenvolvimento da matemática, entre eles citamos em especial:

Brahmagupta, segundo Eves (2002), trabalhou na solução de quadráticas com raízes negativas, seu trabalho mais importante foi generalização da fórmula de Heron. Já Bhaskara é considerado importante matemático entre o período 1114 a.C - 1185 a.C. nascido em uma família tradicional de astrólogos indianos, em seus trabalhos intitulados Vija - Ganita e Lilavati (A Bela) apresenta tópicos sobre equações quadrática, progressões, triadas pitagóricas, divisão por zero e radicais (www.somatematica.com.br, 2014). Não podemos deixar neste momento de nos referirmos a fórmula de Bhaskara que é usada para resolver equações quadráticas (de 2º grau). Na literatura fora do Brasil não se dá o nome de Bhaskara para essa fórmula. Como já descrevemos acima os babilônios já resolviam equações quadráticas muito antes de Bhaskara. Nestes textos que vimos era uma espécie de receita para resolver essas equações, sem o uso rigoroso de símbolos. Na Grécia a solução era dada por meio de construção geométrica, alias método esse usado por Euclides no século III a.C. Na época de Bhaskara todas essas regras eram já conhecidas, tinham forma de poesia e iam descrevendo passo a passo opreções a serem realizadas para se chegar a solução do problema. Segundo Eves (2002) para resolver as equações quadráticas os indianos usavam a seguinte regra:

"Multiplique ambos os membros da equação pelo número que vale quatro vezes o coeficiente do quadrado e some a eles um numero igual ao quadrado do coeficiente original da incógnita. A solução desejada é a raiz quadrada disso".

Exemplo 2.1. Resolva a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solução:

1º Passo: $4x^2 - 4 \cdot 5 \cdot x + 4 \cdot 6 = 4 \cdot 0$

2º Passo: $4x^2 - 4 \cdot 5 \cdot x + 24 + 1 = 0 + 1$

3º Passo: $4x^2 - 20x + 25 = +1$

4º Passo: $(2x - 5)^2 = 1$

5º Passo: $2x - 5 = \pm 1$

6º Passo: $x_1 = 2$ ou $x_2 = 3$

Segundo Eves (2002) Bhaskara conhecia a regra acima, porém não foi descoberta por ele. Esta regra já era conhecida pelo matemático Sridara, que viveu mais de 100 anos antes de Bhaskara.

Não podemos deixar de destacar a participação de Bhaskara para o desenvolvimento da matemática. Porém segundo artigo da Revista do Professor de Matemática nº 39(1999) não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula para solução da equação quadrática. Pois esse hábito de atribuir o nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação do 2º grau ocorreu no Brasil a partir de 1960. Esse costume não é justificado pois os babilônicos já enunciavam em versos e prosa a forma de resolver equações do segundo grau há quatro mil anos atrás, e até o fim do século XVI não se usava fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau. O crédito de demonstrar, algebricamente e depois geometricamente, a solução de equação do segundo grau, deve ser dado aos árabes.

2.1.5 A matemática no Renascimento

Segundo Eves (2002) no século XV e XVI, quase mil anos após a queda de Roma, a civilização europeia começa por fim dar lugar à civilização moderna. O interessante é que o caminho para a modernização começa por um interesse pelas ciências antigas e pela arte. Varias cidades italianas foram impulsionadas pelo comercio com os mulçumanos e os gregos bizantinos, dentre elas temos, Veneza, Gênova e Florença. A aristocracia desses lugares se encantou com os produtos do oriente e também com o saber e sua cultura. Os árabes transmitiam seus conhecimentos aos mercadores italianos, pois estes tinham conservado as artes e ciências do tempo de Roma e da Grécia. Neste período o interesse por exploração geográfica, comércio, astronomia, e agrimensura aumentou. Dentre os eruditas italianos do renascimento figuram Leonardo Fibonacci (1175 - 1250), Leonardo da Vinci (1452 - 1519)e Michelangelo (1475 - 1564), neste período a cultura ocidental se espalhou pelo norte da Europa e os frutos logo surgiram nos trabalhos de Nicolau Copérnico (1473 - 1543) e no seu sucessor o dinamarquês Tycho Brahe (1546 - 1601).

Este período foi marcado por forte oposição da igreja católica aos avanços intelectuais do Renascimento. Muitos intelectuais da época, temendo perseguição da igreja, relutavam em publicar suas teorias, principalmente no campo da astronomia. Como por exemplo, Nicolau Copérnico.

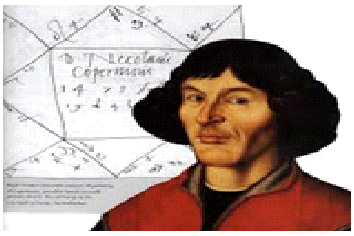

Figura 2.7: Nicolau Copérnico .

Fonte: Wikipédia

Segundo Ribeiro (2013), coube aos europeus aprimorar a técnica de resolução das equações do segundo grau, desenvolvida pelos árabes. O francês François Viète (1540 - 1603) introduziu boa parte do simbolismo algébrico que conhecemos hoje, desenvolveu a prática de representar incógnitas por vogais e grandezas por consoantes. Viète usava, para as varias potências, de uma quantidade, a mesma letra. Por exemplo, hoje usamos x, x^2, x^3 e Viète usava A, A quadratum e A cubum. Seu mais famoso trabalho foi In Artem.

Figura 2.8: Viète.

Fonte: Wikipédia

2.1.6 A alvorada da matemática moderna

Por volta de 1575, a Europa ocidental tinha recuperado boa parte das principais obras antigas. A álgebra árabe tinha sido aperfeiçoada, nas resoluções de equações e no uso parcial do simbolismo. O período era propicio para o desenvolvimento científico, pois tinha como base, as contribuições da cultura antiga, medieval e renascentista. A transição entre o renascimento e o mundo moderno tem varias figuras intermediarias, onde destacamos, Galileu (1564 - 1642) e Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) que vieram da Itália. Henry Briggs, Thomas Harriot e William Oughtred, eram ingleses. Dois deles Simon Steven e Albert Girard, eram flamengos; outros vieram de várias partes como John Napier da Escócia e Johannes Kepler da Alemanha.

Figura 2.9: Kepler.

Fonte: Wikipédia

Nesta época Galileu desenvolve importante teoria da queda livre dos corpos cuja conclusão foi que corpos com pesos diferentes gastam o mesmo tempo para chegar ao solo quando abandonados de uma mesma altura quando desprezado a resistência do ar. Essa conclusão era contrária a de Aristóteles que pensava que objetos mais pesados caiam mais rápido. Em outras palavras, Galileu estabeleceu que a distância (s) percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo (t) de queda, ou $s = \frac{gt^2}{2}$. Galileu demonstrou ainda que a trajetória de lançamento dos projéteis é uma parábola e iniciou o estudo dentro da Dinâmica. Como muitos pensadores da época Galileu era religioso devoto. Porém, vivia angustiado por ver suas teorias sendo combatidas pela igreja católica. Acabou sendo perseguido e colocado em prisão domiciliar pela inquisição. Segundo o sítio ecalculo/USP, outro estudioso que se destaca nesta época foi Evangelista Torricelli, nascido em Roma, na Itália, foi discípulo de Galileu. Desenvolveu estudos sobre o princípio de funcionamento do barômetro, em uma experiência que ficou conhecida pelo seu próprio nome e sobre projeteis. Este último estudo foi enviado a Galileu que ficou impressionado com o detalhamento analítico e matemático do estudante. Torricelli resolveu problemas propostos por Fermat relacionados com a quadratura de curvas, tais como a parábola, hipérboles e espirais. Ainda na matemática desenvolveu uma equação para calcular a velocidade final de um corpo, sem conhecer o intervalo de tempo do movimento. Essa equação pode ser escrita da seguinte forma: $V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \triangle S$, onde V é a velocidade final, V_0 é a velocidade inicial, a é a aceleração e $\triangle S$ é deslocamento escalar.

Outro nome que merece destaque neste período é o Frances René Descartes

Figura 2.10: Renê Descartes .

Fonte: Wikipédia

que estudou no colégio jesuíta em La Flèche. Mais tarde, graduou-se em direito sem muito entusiasmo, seu trabalho marcante, no campo matemático-filosófico foi Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências. Segundo o sítio Wikipédia, descartes viveu em uma época de guerras religiosas entre protestantes e católicos na Europa e foi considerado pai do racionalismo, e defendeu a tese que a dúvida era o primeiro passo para se chegar ao conhecimento. Descartes observou que os costumes, a história de um povo, sua tradição cultural, influenciam a forma como as pessoas veem e pensam naquilo que acreditam. Utilizou pela primeira vez um sistema de eixos para representar as coordenadas em um gráfico. Descartes foi matemático e filósofo, seu sistema ficou conhecido como sistema cartesiano. Descartes sugeri nesta época que o termo x^2 era o quarto termo da proporção $1 : x = x : x^2$ e foi o desenvolvedor da geometria analítica. Segundo a revista infoescola, no frio da Suécia, Descartes passou a sair da cama cedo, ao contrário do que fez a vida toda, pois ministrava aulas para a rainha às 5 horas da manhã. Fragilizado pela mudança de habito e pelo frio intenso, acabou pegando uma pneumonia e morreu em nove de fevereiro de 1650.

3 Função Quadrática

Definição 3.1. Uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou função polinomial do 2º grau quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo x real.

Exemplo 3.1. São funções quadráticas:
a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, sendo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.
b) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$, sendo $a = -1$, $b = 5$ e $c = 6$.
c) $f(x) = x^2 - 9$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$.
d) $f(x) = -3x^2 - 12x$, sendo $a = -3$, $b = -12$ e $c = 0$.
e) $f(x) = 2x^2$, sendo $a = 2$ e $b = c = 0$.

3.1 Valor da Função Quadrática

A função quadrática é definida por uma lei envolvendo um trinômio de segundo grau. Por isso, também é conhecida como função polinomial de segundo grau. Em alguns problemas é importante o cálculo do valor da função quadrática num ponto; assim como, dada a imagem da função quadrática, calcular os elementos do domínio correspondentes. Isto é: dado $x \in \mathbb{R}$, calcular $f(x)$ ou dada a equação $y = f(x)$, calcular x.

3.2 Gráfico

Seja a função $f(x) = x^2$ e seus valores de acordo com a tabela:

x	$f(x) = x^2$	(x, y)
-3	9	$(-3, 9)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$

Representando e ligando os pontos em XOY, obtemos o seguinte gráfico:

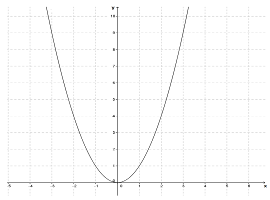

Figura 3.1: Grafico da função $f(x) = x^2$.

O gráfico de uma função quadrática é a curva aberta chamada de parábola. De acordo com Lima (2012), chama-se parábola de foco F e diretriz d ao conjunto dos pontos equidistantes de d e F, em que d é uma reta e F é um ponto fora dela.

Observações:

1) A parábola aparece quando fazemos, de determinada maneira, a secção de um cone por um plano.

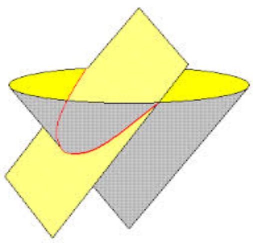

Figura 3.2: Parábola .

Fonte: Wikipédia

2)A parábola é uma curva simétrica.

3)A parábola tem um ponto extremo (vértice).Ponto extremo máximo, maior valor assumido pela função ou ponto extremo mínimo, menor valor assumido pela função.

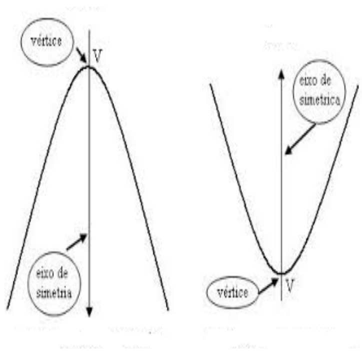

Figura 3.3: Eixo de simetria e vértice da parábola .

Fonte: Wikipédia

4) Crescimento e decrescimento do gráfico da função quadrática.

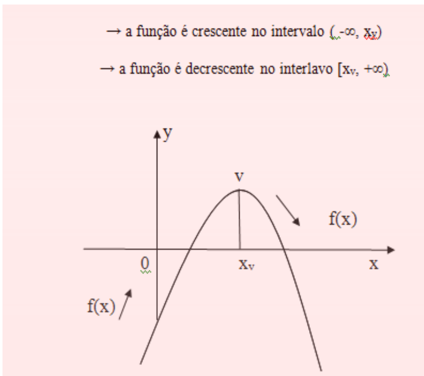

Figura 3.4: Crescimento e decrescimento da função quadrática .

Fonte: Wikipédia

3.3 Construção da parábola usando régua, esquadro e barbante

O barbante, que deve ter o mesmo comprimento do cateto maior do esquadro, é preso ao ponto F e à extremidade R do esquadro que fica encostado na régua. À medida que o esquadro vai se movimentando, o lápis vai mantendo o barbante esticado e encostado no lado do esquadro, enquanto risca o papel. O desenho obtido é a parábola de foco F e diretriz d. A justificativa da construção da parábola se dá ao fato que o comprimento

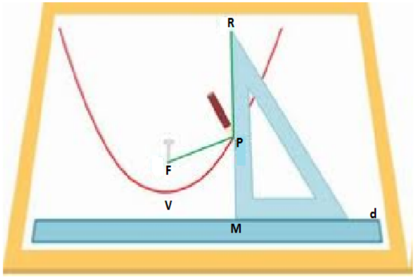

Figura 3.5: Construção da Parábola .

Fonte: Wikipédia

do barbante é constante e igual ao cateto maior do esquadro, então $PF = PM$, ou seja, $d(P, F) = d(P, d)$ que é por definição a prábola de foco F e diretriz d.

3.4 Prova de que o gráfico de $f(x) = x^2$ é uma parábola.

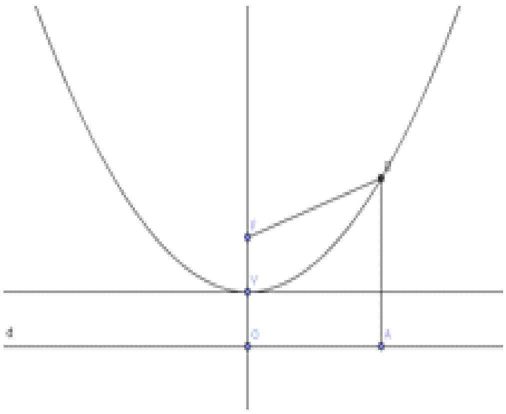

Figura 3.6: Gráfico de $f(x) = x^2$.

Sejam $A = (x, -k)$, $B = (x, x^2)$ e $F = (0, k)$ com $y = -k$ (equação da diretriz d). Como:

$$d(BA) = x^2 + k$$

e

$$d(BF) = [x^2 + (x^2 - k)]^{\frac{1}{2}}$$

E, pela definição da parábola, temos que:

$$d(BA) = d(BF)$$

$$x^2 + k = [x^2 + (x^2 - k)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$(x^2 + k)^2 = [x^2 + (x^2 - k)^2]$$

$$x^4 + 2x^2k + k^2 = x^2 + x^4 - 2x^2k + k^2$$

$$4x^2k - x^2 = 0$$

$$(4k - 1)x^2 = 0$$

$$k = \frac{1}{4}$$

Portanto, $f(x) = x^2$ é uma parábola de foco $F(0, \frac{1}{4})$ e cuja diretriz d é uma reta horizontal $y = \frac{-1}{4}$.

Sabendo que o gráfico de $f(x) = x^2$, é a parábola de foco $F(0, \frac{1}{4})$ e cuja diretriz d é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4}$, observe a figura abaixo e veja como provar isso.

Seja $P(x, x^2)$ coordenadas de um ponto qualquer de $f(x) = x^2$. Então, temos que:

$$PF^2 = (x - 0)^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2 = x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}$$

o que equivale a

$$PF^2 = (x^2 + \frac{1}{4})^2 \Leftrightarrow PF = x^2 + \frac{1}{4}$$

e

$$PD^2 = (x - x)^2 + (x^2 + \frac{1}{4})^2$$

o que equivale a

$$PD^2 = (x^2 + \frac{1}{4})^2 \Leftrightarrow PD = x^2 + \frac{1}{4}.$$

Como PF e PD são positivos então, $d(P, F) = d(P, D)$, ou seja, o gráfico é uma parábola de foco $F(0, \frac{1}{4})$ e diretriz $y = -\frac{1}{4}$.

3.5 Representação gráfica da parábola no plano cartesiano ortogonal $X0Y$ e os coeficientes a, b e c.

3.5.1 Coeficiente a

Exemplo 3.2. Construir os gráficos das funções dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ e $h(x) = 3x^2$.

Atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente para cada x e, obtemos a seguinte tabela.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 2x^2$	$h(x) = 3x^2$
-3	9	18	27
-2	4	8	12
-1	1	2	3
0	0	0	0
1	1	2	3
2	4	8	12
3	9	18	27

Depois, representamos e ligamos os pontos em $X0Y$, obetemos o seguinte gráfico.

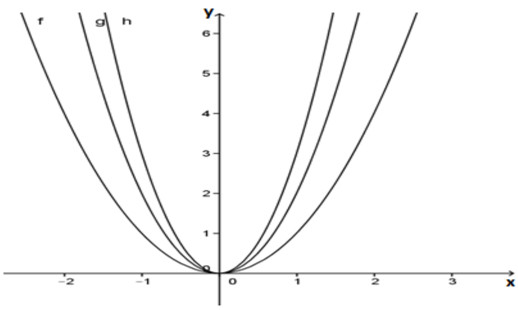

Figura 3.7: Gráfico das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ e $h(x) = 3x^2$.

Exemplo 3.3. Construir os gráficos das funções dadas por $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ e $h(x) = -3x^2$.

Atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente para cada x e, obtemos a seguinte tabela.

x	$f(x) = -x^2$	$g(x) = -2x^2$	$h(x) = -3x^2$
-3	-9	-18	-27
-2	-4	-8	-12
-1	-1	-2	-3
0	0	0	0
1	-1	-2	-3
2	-4	-8	-12
3	-9	-18	-27

Depois, representamos e ligamos os pontos em $X0Y$, obtemos o seguinte gráfico.

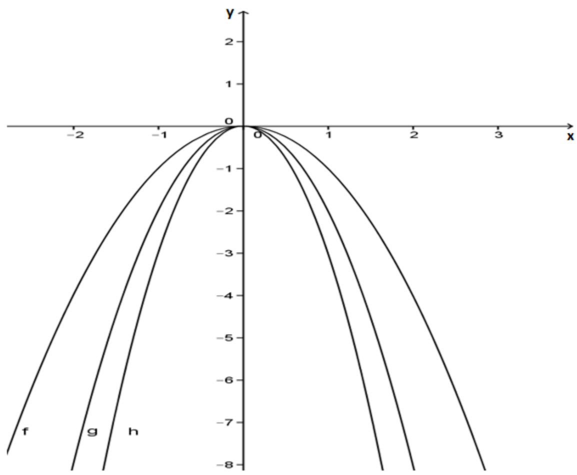

Figura 3.8: Gráfico das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ e $h(x) = -3x^2$.

Conclusão

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2$, notamos sempre que:

- Se $a > 0$, a abertura do gráfico é para cima e o vértice é um ponto de mínimo (menor valor assumido pela função).

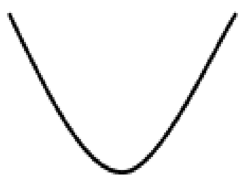

Figura 3.9: $a > 0$.

- Se $a < 0$, a abertura do gráfico é para baixo e o vértice é um ponto de máximo (maior valor assumido pela função).

Figura 3.10: $a < 0$.

- Quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola (parábola mais fechada).

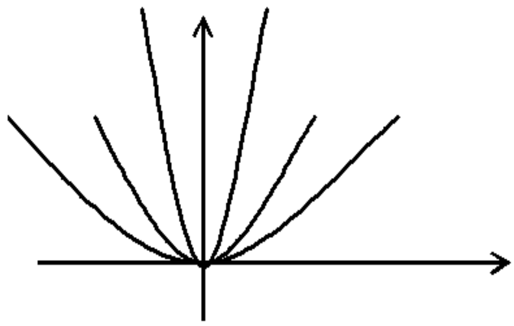

Figura 3.11: Maior valor absoluto de a .

- Os gráficos das funções quadráticas $f(x) = ax^2 (a > 0)$ e $g(x) = -ax^2 (a > 0)$ são simétricos em relação ao eixo x e são chamados reflexões em relação ao eixo x.

3.5.2 Coeficiente c

Exemplo 3.4. Construir os gráficos das funções dadas por $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^2 + 1$.

Atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente para cada x e obtemos a seguinte tabela e o seguinte gráfico.

x	$f(x) = x^2 - 1$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2 + 1$
-3	8	9	10
-2	3	4	5
-1	0	1	2
0	-1	0	1
1	0	1	2
2	3	4	5
3	8	9	10

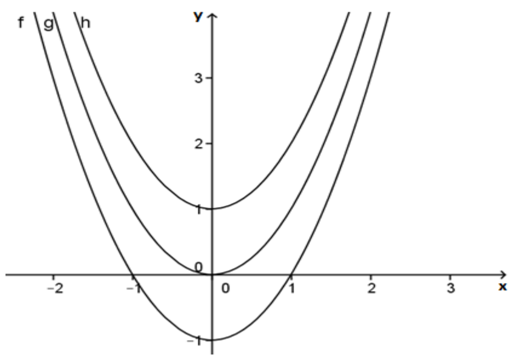

Figura 3.12: Gráfico das funções $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^2 + 1$.

Analisando os dados obtidos na tabela acima, podemos inferir que os valores de $f(0)$ em $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^2 + 1$ são, respectivamente, -1, 0 e 1. Portanto, o coeficiente c indica a ordenada do ponto em que a parábola intersecta o eixo y, uma vez que no eixo y todos os valores de x valem zero. Com efeito, para $f(x) = ax^2 + bx + c$, fazendo $x = 0$, obtemos: $f(0) = c$.

3.5.3 Coeficiente b

Dos gráficos representados anteriormente observamos que as parábolas são simétricas em relação ao eixo y, daí, concluímos que, para $b = 0$ o vértice da parábola está sobre o eixo y.

Analisaremos o coeficiente b fazendo $c = 0$.

Para as funções $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = -x^2 + 4x$,$h(x) = x^2 - 4x$ e $i(x) = -x^2 - 4x$ podemos construir a seguinte tabela:

x	$f(x) = x^2 + 4x$	$g(x) = -x^2 + 4x$	$h(x) = x^2 - 4x$	$i(x) = -x^2 - 4x$
-3	-3	-21	21	3
-2	-4	-12	12	4
-1	-3	-5	5	3
0	0	0	0	0
1	5	3	-3	-5
2	12	4	-4	-12
3	21	3	-3	-21

Fazendo uso do programa geogebra, podemos construir, no mesmo sistema de eixos os gráficos das funções f, g, h e i, vejamos:

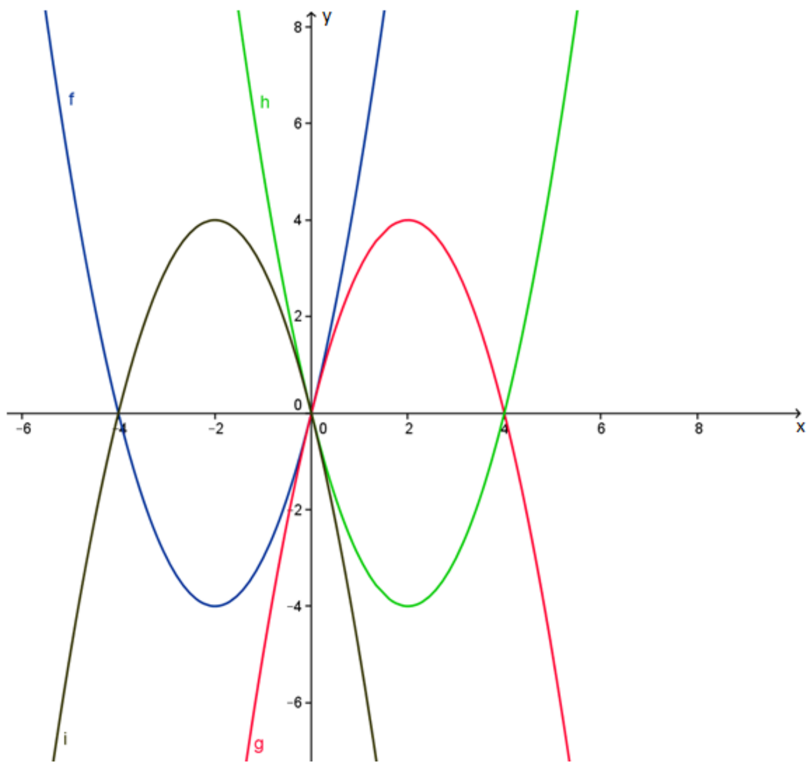

Figura 3.13: Gráfico das funções: $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = -x^2 + 4x$, $h(x) = x^2 + 4x$ e $i(x) = -x^2 - 4x$.

Assim, o coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente da parábola. Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente e se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente.

3.6 Zeros ou raízes

São os valores de x reais tais que $f(x) = 0$. Ou seja, as soluções da equação do 2° grau: $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Admitindo que $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$) , podemos escrever:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A demonstração será feita após a prova das coordenadas do vértice.

Observação: As raízes são as abscissas dos pontos onde a parábola intercepta o eixo dos x. Três casos podem ocorrer:

1º Caso ($\Delta > 0$): A equação tem duas raízes reais e distintas ($x_1 \neq x_2$). A parábola intersecta o eixo dos x em dois pontos distintos.

2º Caso ($\Delta = 0$): A equação tem duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo dos x.

3º Caso ($\Delta < 0$): A equação não tem raízes reais, ou seja, a parábola não intersecta o eixo dos x.

3.7 Coordenadas do vértice

Quando $a > 0$, a parábola tem abertura voltada para cima e um ponto de mínimo V; quando $a < 0$, a parábola tem abertura voltada para baixo e um ponto de máximo V, o ponto V é chamado vértice da parábola.

Escrevendo a fórmula da função quadrática na forma canônica, temos que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}].$$

Completando o quadrado, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}].$$

Ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}].$$

Assim,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}].$$

De $f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$, podemos notar que: a, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes, apenas x é variável. Daí,

- Se $a > 0$, então o valor mínimo de $f(x)$ ocorre quando tivermos o valor mínimo para $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $(x + \frac{b}{2a})^2$ é sempre maior que ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$; nesta situação, o valor mínimo de $f(x)$ é $-\frac{\Delta}{4a}$.
- Se $a < 0$, então o valor máximo de $f(x)$ ocorre quando tivermos o valor máximo para $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $(x + \frac{b}{2a})^2$ é sempre maior que ou igual a zero, seu valor máximo ocorre quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$; nesta situação, o valor máximo de $f(x)$ é $-\frac{\Delta}{4a}$.

Conclusão: Em ambos os casos as coordenadas do vértice V são dadas por:

$$(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}).$$

3.7.1 A prova da fórmula de resolução de uma equação do 2º grau qualquer

Seja a forma canônica $f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$. Fazendo $f(x) = 0$, temos que:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Desde 1960 costuma-se dar, no Brasil, o nome de Bháskara à fórmula de resolução da equação do 2º grau, embora não seja adequado. Bháskara nasceu na Índia em

1114 e viveu até cerca de 1185. Apesar de ter sido um dos importantes matemáticos do século XII, em sua época ainda não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso só veio ocorrer com François Viéte, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

O eixo de simetria da parábola é a reta paralela ao eixo dos y que passa pela abiscissa do vértice $x = -\frac{b}{2a}$ (equação do eixo de simetria).

3.8 Conjunto imagem

Para determinarmos a imagem da função quadrática devemos levar em consideração que:

- Se $a > 0$, o vértice é ponto de mínimo e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ e imagem $Im(f) = \{y \in R | y \geq -\frac{\Delta}{4a}\} = [y_v, +\infty)$.
- Se $a < 0$, o vértice é ponto de máximo e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ e imagem $Im(f) = \{y \in R | y \leq -\frac{\Delta}{4a}\} = (-\infty, y_v]$.

4 O Uso do GeoGebra no Ensino da Função Quadrática

O uso de softwares como ferramenta pedagógica pelos professores está se difundindo cada vez mais nas escolas, atualmente existem vários softwares de matemática. Dentre eles, temos o GeoGebra, que é um software livre e gratuito (disponível em www.geogebra.org).

O GeoGebra foi criado em 2001 pelo alemão Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg e esta em aprimoramentos na Universidade da Flórida-EUA.

O GeoGebra é um ambiente que permite fazer construções geométricas por quem está utilizando, essas construções são dinâmicas e interativas, o que torna o programa uma excelente ferramenta de ensino-aprendizagem de matemática.

O GeoGebra agrupa em um só programa recursos de geometria, álgebra, cálculo, estatística, etc.... Entretanto, utilizaremos apenas os recursos necessários à aplicação do material em estudo (função quadrática): representação de pontos, segmentos, retas, funções, cônicas, lugar geométrico, etc.

4.1 Usando o GeoGebra

Na tela principal do GeoGebra utilizaremos principalmente a barra de menus, a barra de ferramentas, a zona gráfica, a janela algébrica, a janela geométrica e a entrada de comandos.

A janela de álgebra é composta por um sistema de eixos cartesianos, para facilitar as construções geométricas e, simultaneamente as coordenadas de pontos e equações de gráficos podem ser visualizadas nas janelas de álgebra.

Problema 4.1. Usando a barra de ferramentas do GeoGebra construir uma a cônica prábola usando uma reta d(diretriz), um ponto F(foco).

Primeiramente abrimos a janela do geogebra, na barra de ferramente clicamos

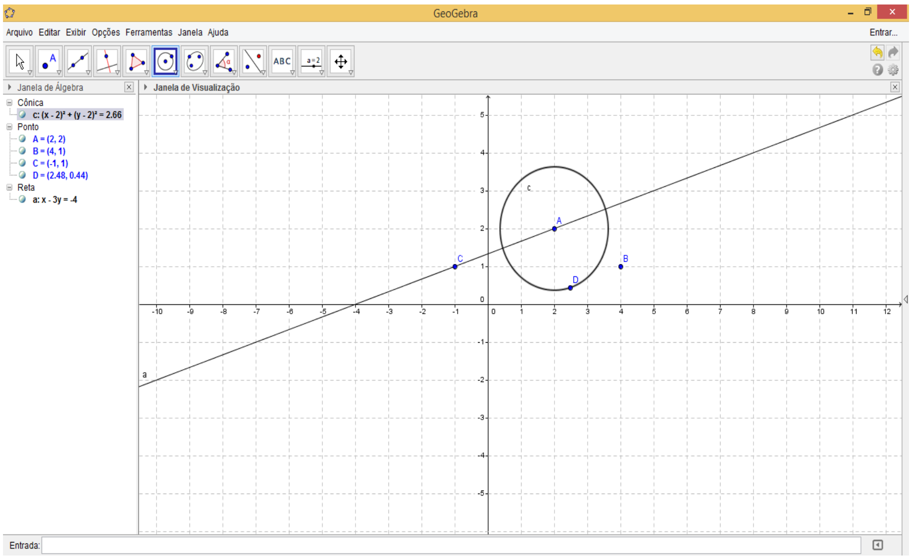

Figura 4.1: Tela pincipal do GeoGebra .

na opção reta que passa por dois pontos A e B(diretriz d) e em seguida, na mesma janela, definimos um ponto F(foco), fora da reta, e finalmente na opção cônica selecionamos a opção parábola e clicamos no ponto e na reta já esboçados na tela principal. O resultado dessa construção é exibido na figura abaixo.

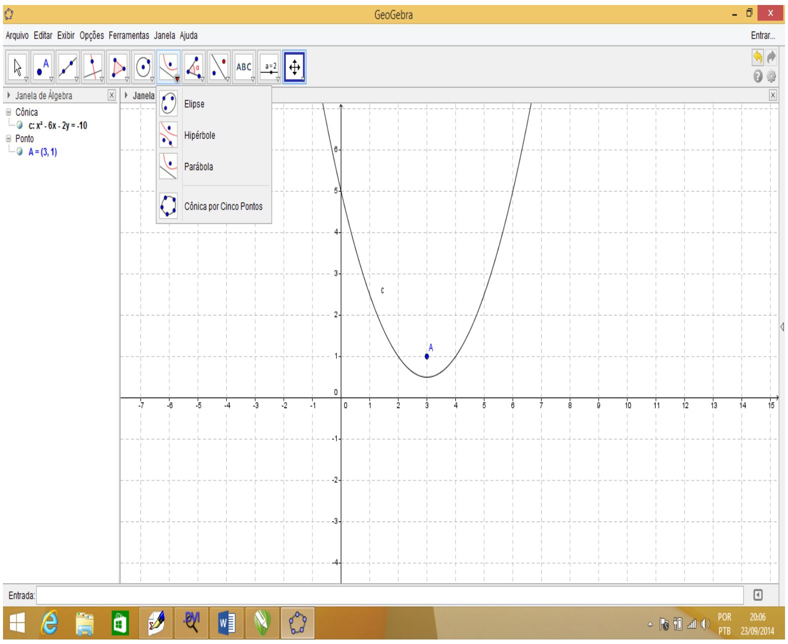

Figura 4.2: Parábola no GeoGebra.

Problema 4.2. Usando a barra de ferramentas do GeoGebra construir uma parábola usando uma reta definida por dois pontos, uma reta perpendicular, uma reta mediatriz, dois pontos sobre objeto, dois segmentos e o lugar geométrico.

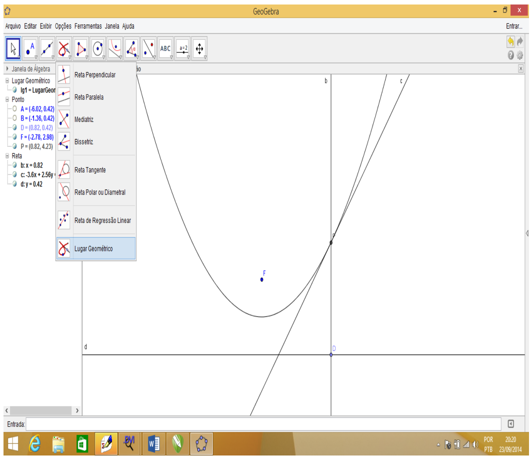

Figura 4.3: Parábola no GeoGebra.

Traçamos uma reta d passando por dois pontos quaisquer, marcamos dois pontos um sobre a reta d (ponto D em objeto) e outro fora da reta d (ponto F simples), traçamos uma reta perpendicular a reta d, passando por D. Traçamos a mediatriz de DF e marcamos o ponto P de interseção da mediatriz com a reta perpendicular que passa por D e por fim selecionamos o lugar geométrico de P sobre D. O gráfico obtido é a parábola de foco F e diretriz d.

Problema 4.3. Usando a entrada de comando do GeoGebra iremos inserir diretamente as funções quadráticas: após clicar a tecla Enter, a representação algébrica da função aparece na zona algébrica e a representação gráfica da função aparece na zona gráfica.

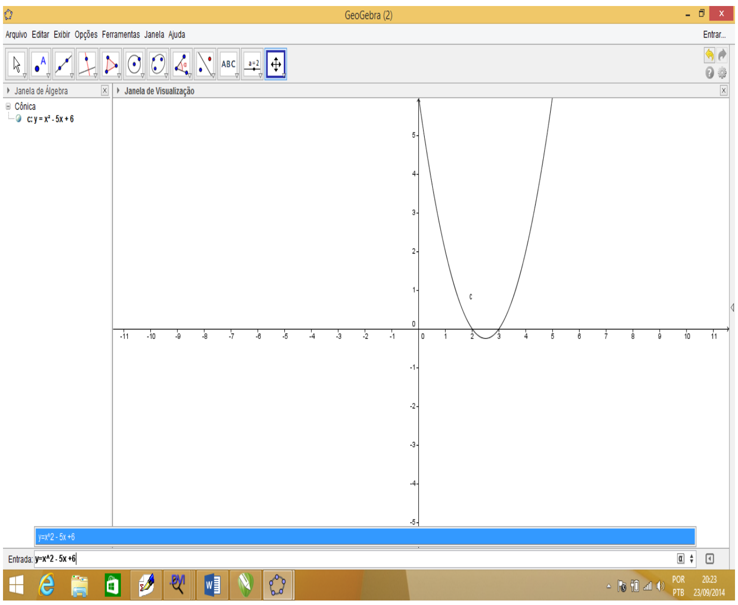

Figura 4.4: Gráfico de funções no GeoGebra.

Problema 4.4. Usando a entrada de comando do GeoGebra iremos criar três comandos deslizantes a, b e c, em seguida inserir na entrada de comando diretamente a função $y = ax^2 + bx + c$. Após clicar a tecla Enter, a representação algébrica da função aparece na zona algébrica e a representação gráfica da função aparece na zona gráfica. Podendo, assim, ter um modo interativo do gráfico da função, para isso, basta mudar os valores de a, b e c no controle deslizante. Desta forma, facilitamos o estudo do comportamento da função quadrática. E, com uma simples animação dos controles deslizantes de a, b e c a função é modificada instantaneamente.

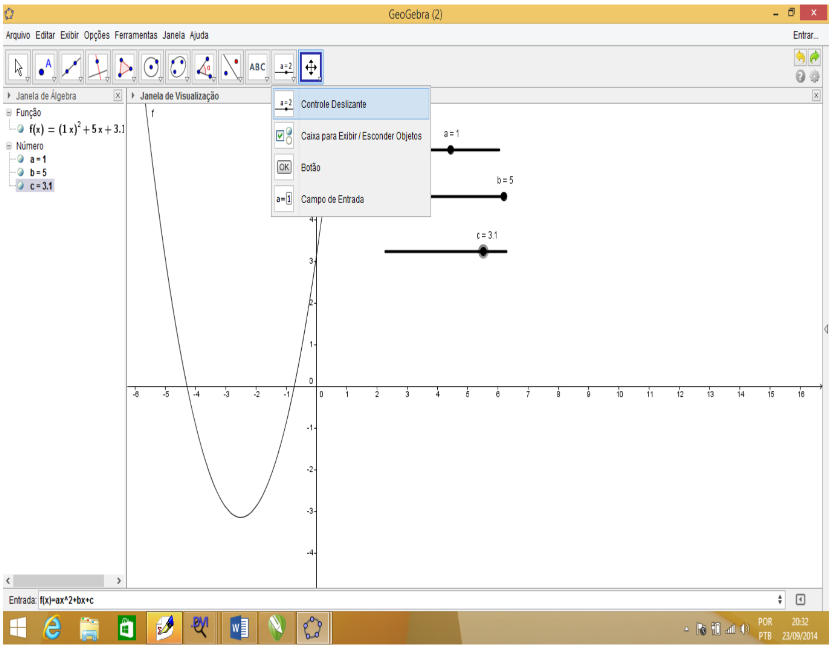

Figura 4.5: Parábola com controle deslizante.

5 Conclusão

As experiências adquiridas em vários anos de atividade como professor nos ensino fundamental e médio, nos mostrou que a função quadrática é conteúdo matemático muito importante e que serve de pré-requisito para diversas áreas do conhecimento.

Desta forma apresentamos esse trabalho como proposta para o ensino da função quadrática, sua forma geral e canônica, eixo de simetria, vértice e representação gráfica. Como a parábola é a representação gráfica da Função Quadrática, trabalhamos apenas as parábolas que têm eixo focal vertical, já que as demais não são representações gráficas de funções reais. Observamos o foco, o vértice e a reta diretriz da parábola.

Vimos que toda função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ é representada graficamente por uma parábola. E que o coeficiente a é responsável pelo sentido da concavidade e abertura da parábola; o coeficiente b indica se a parábola intersecta o eixo y no seu ramo crescente $(b > 0)$, decrescente $(b < 0)$ ou no vértice $(b = 0)$ e o coeficiente c indica onde a parábola intersecta y no ponto $(0, c)$. A parábola intersecta o eixo x nos pontos de abscissas iguais às raízes da função quadrática e por fim vimos que o vértice é ponto de máximo $(a < 0)$ e de mínimo $(a > 0)$ e suas coordenadas são dadas por $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Nas atividades, foi utilizado o software GeoGebra para construções de gráficos e animações, para mostrar que a mudança dos valores dos coeficientes (a,b e c) da equação geral que define a função quadrática interfere na concavidade, abertura da parábola, intersecções com os eixos, vértice e imagem. A intenção deste trabalho foi incentivar os docentes a utilizarem a abordagem histórica, formal e tecnológica relacionadas para uma proposta dinâmica de ensino de função quadrática que contribuirá para uma melhor formação dos nossos alunos.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B.. *História da Matemática.* 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher,2003.

[2] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática contexto e aplicação.* 3ª edição. São Paulo: Ática,2010.

[3] EVES,Howard. *Introdução A História da Matemática.* 2ª edição. Unicamp,2002.

[4] LINTZ, Rubens G..*História da Matemática.* FURB,1999.

[5] LIMA, Elon Lages.*A Matemática do Ensino Médio.*Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] SILVA, Clóvis Pereira da..*A matemática no Brasil: uma história do seu desenvolvimento.*UFPR editora.

[7] STRUIK.*História concisa das matemáticas.*Gradiva, 1989.

[8] TAN, S.T. *Matemática aplicada a administração e economia.* 1ª edição. São Paulo: Thomson Learning,2001.