UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ - UNIFAP

ALDO CORDEIRO PENA

ELIENAI NASCIMENTO DA SILVA

ERICK LUIZ COSTA

HILTON BRUNO PEREIRA VIANA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

MACAPÁ – AP

2011

ALDO CORDEIRO PENA

ELIENAI NASCIMENTO DA SILVA

ERICK LUIZ COSTA

HILTON BRUNO PEREIRA VIANA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientação: Prof.° Dr. Erasmo Senger

MACAPÁ – AP

2011

ALDO CORDEIRO PENA

ELIENAI NASCIMENTO DA SILVA

ERICK LUIZ COSTA

HILTON BRUNO PEREIRA VIANA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

AVALIADORES

____

Orientador: Prof.º Dr.Erasmo Senger

____

Membro da banca.

____

Membro da banca.

MACAPÁ – AP

2011

Aos Professores pela dedicação, motivação e ajuda prestada ao longo do nosso curso. E todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para o êxito do trabalho apresentado;

Aos nossos familiares pelo incentivo, colaboração e por acreditarem em nosso potencial;

Aos nossos colegas, que juntos trabalhamos ajudando uns aos outros;

A todos os responsáveis diretos e indiretos que tornaram nossa estada na Universidade amena, saudável e produtiva;
A Deus, o mestre maior de nossas vidas

RESUMO

O desenvolvimento da matemática é marcado pelas necessidades e problemas vindos de outras ciências, mas não é determinado somente por isso. E é bom que assim seja, pois as necessidades mudam com o tempo, e quanto mais rica for a matemática, melhor poderá ela ajudar o homem. Percebemos que o teorema fundamental do cálculo é de importância central e permite computar integrais utilizando a antiderivada da função a ser integrada. É largamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de matemática, mas de física, astronomia, economia, engenharia, medicina, química, por exemplo, ajudando na tomada de decisão, na transmissão de idéias matemáticas a outrem e também no campo da pesquisa matemática independente das aplicações imediatas.

Palavras Chave: Cálculo. Derivação. Integração.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A grande relevância da matemática se dá pelo fato de que, além de sua vida própria como ciência, com suas teorias e seus problemas, ela tem a característica ímpar de poder penetrar, como uma arma importante e às vezes imprescindível em muitos outros ramos do conhecimento humano.

No século XVII, vários matemáticos descobriram como obter áreas mais facilmente usando limites. Porém, como para cada problema diferente devem ser planejados procedimentos especiais, o método da exaustão carece de generalidade.

O maior avanço em relação ao método geral para o cálculo de área foi feito, independentemente, por Newton e Leibniz, os quais descobriram que as áreas poderiam ser obtidas revertendo o processo de diferenciação.

O Teorema Fundamental do Cálculo é uma ferramenta poderosa para calcular integrais definidas, pois reduz o problema a calcular primitiva de funções. Em geral, esta tarefa não é muito simples, pois existem funções cujas primitivas precisam de uma técnica mais depurada para serem calculadas.

Este Teorema estabelece uma importante conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. O primeiro surgiu a partir do problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto, enquanto que o segundo começa com os gregos há mais de 3000 anos. O problema central era calcular áreas de figuras planas.

Um dos problemas que chamou muito atenção dos geômetras na época, foi o calculo da área de círculos, o que na época ainda não era conhecido. Em princípio, o cálculo da área podia ser resolvido por aproximação, isto é, se aproximava o círculo por polígonos regulares, e o valor da área de um polígono era uma aproximação da área do círculo.

Os processos de diferenciação e integração são “inversos”, ou seja, uma função f pode ser obtida a partir de sua integral por diferenciação ou a partir de sua derivada por integração, a menor de uma constante.

Este trabalho visa demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo, pois como foi visto anteriormente, é uma ferramenta poderosa para calcular integrais definidas.

Na elaboração de seu desenvolvimento, foram consultadas diversas definições sobre o cálculo integral, como propósito de mostrar o cálculo dentro de uma disciplina matemática, através de uma construção lógica e estruturada.

1 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O Teorema Fundamental do Cálculo teria sido uma grande surpresa para grandes matemáticos como Eudoxo (cerca de 370 a.C.), Euclides (cerca de 300 a.C,), Arquimedes (287—212 a.C.), Apolônio (cerca de 262—190 a.C.), e outros matemáticos da antiguidade clássica, pois, quando pensamos nas origens geométricas das derivadas e integrais, retas tangentes a curvas e áreas, respectivamente, não existe pista alguma que sugira o Teorema Fundamental do Cálculo, assim como retas tangentes, quadraturas e cubaturas não tinham lugar de destaque dentre outros problemas geométricos.

Quando álgebra foi usada pela primeira vez para descrever curvas na geometria analítica de René Descartes (1596—1650) e Pierre Fermat (1601—1665), podemos ver os primeiros lampejos de uma conexão entre tangentes e quadraturas. Em seu estudo das "parábolas de ordem superior", y = kx, onde k é constante e n + 2, 3, 4, ..., Fermat descreveu a fórmula y/k para a subtangente em qualquer ponto sobre a curva. A partir daí, e do nosso ponto de vista hoje, teria sido fácil encontrar a fórmula para a derivada; mas para Fermat, nx não era o objetivo. Em alguma época na década de 1640, Fermat mostrou que a área em qualquer uma das parábolas de ordem superior e o eixo horizontal 0 x a, era igual à área do retângulo de largura a e altura a /(k +1). Hoje, podemos ver que Fermat estava torturantemente próximo do teorema fundamental do cálculo, como teria sido expresso em termos de suas parábolas de ordem superior. Mas aquilo não parecia ser de seu interesse.

Em um procedimento que desenvolveu para encontrar o centro de gravidade de um conóide (agora conhecido como um parabolóide de revolução), Fermat antecipou o Teorema Fundamental do Cálculo. Mas, falhou em reconhecê-lo. Para encontrar o centro de gravidade de um sólido mais geral, Gilles Personne de Roberval (1602-1675) usou um processo somatório e ambas, a tangentes e a quadratura de certas curvas, mas também não observou a conexão. Gregory St. Vincent (1584-1667) e Evangelista Torricelli (1608-1647) adicionaram à técnica de Roberval para determinar centros de gravidade sem perceber quaisquer outros princípios matemáticos importantes. Em suas notas não publicadas até sua morte, Torricelli desenvolveu sua construção de retas tangentes a "hipérboles de ordem superior” de Fermat, ym = kxn, a partir da quadratura destas curvas, mas sem qualquer pista de idéias mais abrangentes e gerais, rm = kq n em coordenadas polares, à quadratura da espiral. Os resultados de Torricelli eram bem conhecidos de seus alunos, principalmente Vincenzo Viviani (1622 – 1703), e, através dele, James Gregory (1638 – 1675) e Isaac Barrow (1630 – 1677) quando este posteriormente viajou e estudou na Itália. Desta maneira, muitas das técnicas do que agora chamamos de cálculo foram transmitidas para a Inglaterra.

De uma maneira indireta envolvendo retificação (para encontrar comprimento de um segmento de uma curva), James Gregory considerou a área entre a curva, e o eixo t, começando em t = a como uma função do extremo direito, t=x. então encontrou a reta tangente a esta nova curva em t=x e mostrou que sua inclinação neste ponto era igual à ordenada, y, da curva original. Este processo tortuoso aproximou Gregory da parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo da maneira que é afirmado no livro de Cálculo de (GEORGE 2002). Mas este resultado era uma pequena parte Universal da Geometria, 1668 de Gregory, sua tentativa de resumir e organizar a geometria do cálculo como ele a conhecia (o muito da qual tinha aprendido durante seus estudos na Itália, 1664—1668). Ele não só não procurava o Teorema Fundamental do Cálculo aqui, como também não estava usando as fórmulas convenientes usadas hoje em dia.

O primeiro professor de cadeira Lucasiana de Matemática filosofia natural em Cambridge (1663—1669), foi Isaac Barrow. Devido às semelhanças em educação e formação de seus escritores, o Geometrical Lectures (1670) de Barrow e o Universal Part Of Geometry de Gregory cobriram praticamente o mesmo assunto. O trabalho de Barrow se aprofundou de alguma maneira nos esforços do século 17 levando ao desenvolvimento do cálculo. Em particular, em vários lugares, Barrow mostrou no mínimo uma compreensão intuitiva do fato que tangente e quadraturas eram operações inversas. Ao discutir velocidade e distância, mostrou como a reta tangente a uma curva (distância) poderia levar a construção e quadratura de outra curva (velocidade), e vice-versa. No seu tratado mais abrangente, Barrow primeiro mostrou geometricamente que a área entre uma curva crescente, mas arbitraria, f(t), e o eixo horizontal, a t x, era igual a y vezes a subtangente de uma curva auxiliar, h(x), onde y é a ordenada curva dada em t = x; a linguagem geométrica de Barrow provavelmente escondeu o fato de que seu h(x) era, na realidade, um múltiplo constante do que agora chamamos de antiderivada, F(x).

Desta maneira, também antecipou a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo. Mais além, no seu "*Geometrical Lectures*", Barrow provou um teorema relacionado a soma de retângulos infinitesimais preenchendo a região entre uma curva e o eixo horizontal, a x b, ao retângulo cuja largura é uma constante e cuja altura é F(b) – F(a) em notação moderna. Esta é a essência da Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo como encontrado no livro de calculo de Thomas. O livro "*Geometrical Lectures*" de Barrow foi ápice dos processos geométricos do século 17 que levaram às nossas modernas derivadas e integrais. Embora seu aluno e protegido Isaac Newton (1642—1727), o tenha encorajado a incluir alguns métodos algébricos adicionais no seu trabalho, Barrow era no fundo um geômetra muito talentoso. Assim não percebeu que o cálculo, através do Teorema Fundamental do Cálculo, é uma entidade intelectual única.

Graças aos fundamentos providos por Barrow, Isaac Newton (1642—1727), se aperfeiçoou nos resultados da tangente e quadratura nos primeiros dois terços do século XVII. Em uma carta a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716), Newton afirmou claramente, em termos físicos, o que os dois problemas mais básicos de cálculo eram (e ainda são): "1- dado o comprimento do espaço continuamente, (em todo instante de tempo), encontrar a velocidade do movimento, em qualquer tempo dado. 2- Dada a velocidade de movimento continuamente, encontrar o comprimento do espaço, (a integral ou a antiderivada) descrita em qualquer tempo proposto". Mas no lugar de derivadas, Newton empregou *fluxions* de variáveis, denotados, por exemplo, por x, e em vez de antiderivadas, ele usou o que ele chamou de fluentes.

A partir de Gregory, Newton adotou a idéia que a área entre uma curva, y, e o eixo horizontal, era dependente do extremo direito, t = x. de fato, Newton pensou na área como sendo realmente gerada pelo movimento da reta vertical t = x. assim o flúxion da área era simplesmente yx. Então, a técnica de Newton para encontrar tais quadraturas era encontrar o fluente de y, equivalente a encontrar nossas antiderivadas; este é o cerne da parte 2 do Teorema Fundamental do cálculo como encontrado no livro Cálculo de Thomas. Newton usou o Teorema Fundamental do calculo para encontrar os valores exatos para varias áreas, da mesma maneira que fazemos hoje. Em geral, Newton começou a pensar nos problemas geométricos de cálculo em termos algébricos.

Newton resumiu quase todos os trabalhos anteriores sobre cálculo. Juntamente com Barrow, foi especialmente influenciado por "*La Géométrie*" de René Descartes (1596 - 1650) numa tradução em Latim, com comentários de Frans van Schooten (1615 - 1660) e por John Wallis (1616 - 1703) em seu "*The Arithmétic of Infinites*". Ele coroou seus estudos com sua própria genialidade, escrevendo três manuscritos sobre cálculo: o primeiro foi escrito em outubro de 1666; o segundo em 1669; e o terceiro, atualizando seus dois trabalhos anteriores, em 1671. Em seu trabalho mais famoso, o "*Principia Mathematica*" (1687), Newton usou as idéias e algumas das técnicas de cálculo, mas como o Principia foi escrito em sua maior parte na forma geométrica, as fórmulas e partes algébricas do cálculo estavam ausentes. As três monografias de cálculo de Newton, contudo, foram amplamente conhecidas através de cópias feitas para seus colegas da sociedade real. Mas elas não foram publicadas até muito depois de sua morte.

Quando Leibniz foi a Paris em 1672 em missão diplomática, foi introduzido a idéias emergente de calculo por Christiaan Huygens (1629—1695), um membro da nova academia Francesa. Leibniz estudou muito dos trabalhos de autores de matemática avançada, e relatou que aqueles de Blaise Pascal (1623—1662) eram especialmente úteis. A maior parte dos escritores de Leibniz sobre cálculo recaíram em três grupos: seus manuscritos – quase todos diários – começaram enquanto ele estava em Paris (1672—1676); os artigos que publicou no "*Acta Eruditorum*" nas décadas de 1680 e 1690; e o manuscrito, (História e Origem do Cálculo Diferencial, 1714).

As idéias de Leibniz sobre integrais, derivadas e cálculo em geral foram desenvolvidas a partir de analogias com somas e diferenças. Por exemplo, para o Teorema Fundamental do Cálculo, se fosse dada uma seqüência finita de números tais como, y: 0, 1, 8, 27, 64, 125, e 216, com diferenças y: 1, 7, 19, 37, 61, e 89, ele notou que a soma das diferenças, a y = (1-0) + (8-1) + (27-8) + ... + (216- 125) se alternavam em torno da diferença entre o primeiro e o último valor de y, 216 – 0. Agora, para Leibniz, uma curva era um polígono feito de um número infinito de lados, cada um com comprimento "infinitesimal". Então escreveu em 1680, "eu represento a área de uma figura pela soma (infinita) de todos os retângulos limitados pelas ordenadas e diferenças das abscissas", isto é, como o y de x. Então, "elevando a alturas maiores" se baseando na analogia com somas finitas e diferenças, Leibniz afirmou que ao encontrar a área representada por y de x, deve-se encontrar uma curva Y tal que as ordenadas y são diferenças de Y ou y= de y. Em termos modernos, Y é nossa antiderivada, e assim, Leibniz formulou uma afirmação inicial da parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo como encontrado no livro Cálculo de Thomas. Posteriormente, em um artigo de 1693 no "*Acta Eruditorum*", Leibniz escreveu, "o problema geral de quadraturas pode ser reduzido a encontrar uma curva que tenha uma dada lei de tangência", e continuou a especificar esta lei na forma da parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo.

Para apreciar completamente as contribuições de Leibniz ao cálculo, devemos considerar o seu contexto dentro de seu significativo trabalho e lógica, metafísica e filosofia porque pensava em todas essas atividades como inter-relacionadas. Para Leibniz, a existência de infinitésimos poderia ter sido um problema filosófico interessante, mas não observou o ponto em seu cálculo. Cálculo, especialmente o teorema fundamental, "continha uma maneira prática de computar" e era uma abreviação dos métodos rigorosos das tangentes e quadraturas de Arquimedes (287- 212) e outros geômetras gregos clássicos. Por outro lado, Jakob (1654- 1705 e Johann Bernoulli (1667 – 1748) e outros matemáticos e cientistas do século 18 que se aproveitaram do cálculo de Leibniz, especialmente de sua notação fértil, usaram livremente, expandiram e aplicaram o cálculo, freqüentemente com resultados espetaculares).

Em torno da virada do século XVIII, infelizmente alguns poucos seguidores de Newton atacaram Leibniz acusando-o de plágio do cálculo de Newton durante suas visitas a Londres em 1673 e 1676. Newton e Leibniz nunca se encontraram frente a frente, mas durante as primeiras décadas do século, Newton era presidente da Sociedade Real e Leibniz ainda era um membro. Leibniz escreveu seu "*History and Origin of the Differential Calculus*" (1714) para sua defesa, mas sem sucesso. A matéria se tornou uma disputa prioritária de escala monumental e se tornou um descrédito para todos os participantes à medida que o século XVIII avançou; por exemplo, numa lealdade mal direcionada, a maior parte dos matemáticos ingleses se limitaram aos *fluxions* e fluentes de Newton e evitaram as notações superiores de Leibniz até o início do século XIX. O consenso hoje depois de muito estudo meticuloso e imparcial, feito por vários estudiosos, é que Newton e Leibniz desenvolveram o Teorema Fundamental do Cálculo independentemente e que, portanto, deveriam dividir igualmente a glória da criação do cálculo.

Leibniz sobre o Teorema Fundamental do Cálculo por analogia e Newton baseou sua justificativa em *fluxions* e fluentes que por sua vez dependiam da intuição de pontos se movendo ao longo de uma curva. Colin Maclaurin (1698 – 1746) provou a parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para função de potências simples, $y = x$, onde $n = 1, 2, 3, ...$, e Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) estendeu a idéia básica de Maclaurin a funções crescentes representadas por uma série de potências. A prova moderna do Teorema Fundamental do Cálculo foi formulada para funções contínuas em a x b por Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857). Os argumentos que Cauchy deu são os mesmos daqueles encontrados no livro de Thomas, Finney, Weir & Giordano. Com seu Teorema Fundamental do Cálculo, Cauchy proveu a chave, para todas as funções contínuas, que finalmente uniu rigorosamente os dois ramos principais do cálculo em uma estrutura, ambos elegantes e úteis.

2. LIMITES E CONTINUIDADE

2.1 Limites

O desenvolvimento do cálculo foi estimulado por dois problemas geométricos: Achar as áreas das regiões planas e as retas tangentes à curva. Esses problemas requerem um “processo de limite” para sua solução. Entretanto, o processo de limite ocorre em muitas outras aplicações – na verdade tantas, que, de fato o conceito “limite” é o alicerce sobre o qual todos os outros conceitos de cálculo estão baseados.

O conceito de limites de uma função é utilizado em todos os tópicos do cálculo do diferencial e integral. Com este conceito definiremos derivadas e integrais de funções. Podemos também encontrar valores de expressões indeterminadas da forma 0/0, ou ∞/∞. O conceito de limites de uma função é o ponto de partida do Cálculo Diferencial e Integral.

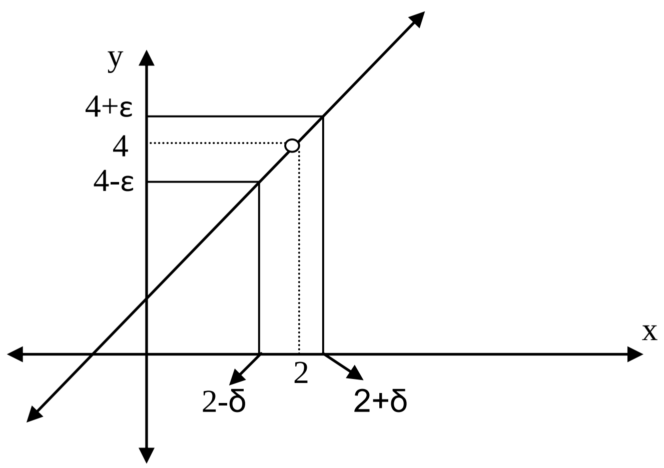
Neste tópico estudaremos as principais propriedades de limites de funções definidas sobre os números reais. Comecemos com um exemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Rapidamente percebemos que f está definida em toda reta exceto no ponto x=2.

Podemos expressar esta função da seguinte forma:

f(x)= x + 2, se x ≠ 2



No ponto x = 2 ela não está definida. Mas, para cada ponto bem próximo dele todos os valores estão definidos. Quando x se aproxima a 2 sem chegar a tomar o valor de 2, a função f se aproxima para 4 sem ser igual a 4. Para entender melhor o conceito de limite faremos uma comparação com o conceito de aproximação.

Isto é, a expressão: limite de uma função quando $x \to 0$, quer dizer: o valor ao qual a função se aproxima quando x esta próximo de zero. No exemplo anterior, a função não está definida no ponto x=2 mas isto não nos impede de saber a que valor ela se aproxima quando x se aproxima para dois. Quando estudamos o limite de uma função f, por exemplo no ponto x=2, na verdade não interessa saber quanto será o valor de f(2), nem mesmo se a função está definida nesse ponto. Interessa apenas saber a que valor se aproxima f(x) quando x está próximo de 2.

Em geral, diremos que L é o limite da função f quando x se aproxima de x_0, se tomando valores de x próximos de x_0, os valores de f(x) estão próximos de L. Em símbolos podemos expressar:

$$x \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \to L.$$

2.1.1 Definição de Limite

A idéia central por trás dos cálculos feitos para calcular o limite é encontrar o valor L ao qual se aproxima a função f, quando x se aproxima a um valor a. Aqui a palavra aproxima tem um significado importante. O ponto aqui é definir L, o limite de f quando x se aproxima de f, cuja notação é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se x está próximo de a, então f(x) está próximo de L.

Dito de outra forma, temos que:

Se x – a é pequeno, então f(x) – L é também pequeno.

Do ponto de vista matemático, pequeno é uma palavra ambígua. O que é pequeno para um não é pequeno para outros. Introduzimos então uma constante $\varepsilon > 0$, onde em geral se entende ε como número pequeno e afirmamos que L será o limite quando x se aproxima de a se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $|x - a| < \delta$.

Portanto a definição de limite escrita de forma matemática é a seguinte,

Definição: Diremos que L é o limite de uma função f, quando $x \to x_0$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta, \Longrightarrow 0 < |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2.1.2 Limite Lateral

Limite lateral é o valor que converge uma função quando o ponto x se aproxima ao valor x_0 por valores maiores que x_0 (pela direita) ou por valores menores que x_0 (pela esquerda).

Diremos que L é o limite pela esquerda da função f quando se aproxima a x_0 por valores menores que x_0. Isto é se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ satisfazendo:

$$0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Este limite é denotado como $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

De forma análoga, diremos que L é o limite pela direita da função f quando x se aproxima de x_0 por valores maiores que x_0. Isto é se para todo $\varepsilon > 0$ existe um numero $\delta > 0$ satisfazendo:

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Este limite é denotado como $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Exemplo: Encontre os limites laterais da função $f = \left| \frac{x}{x} \right|$. Quando $x \to 0$.

Solução:

Consideremos limite pela direita

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

1. Pois neste caso x se aproxima de zero apenas para valores positivos. O limite pela esquerda é dado por

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = -1$$

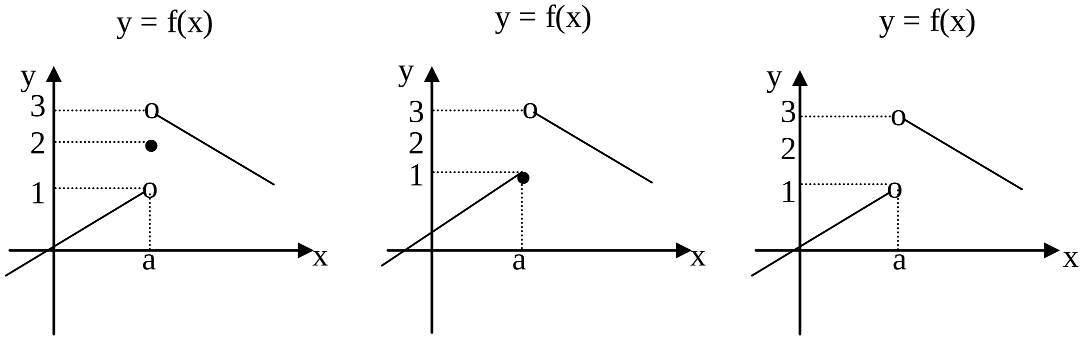
2.1.3 Limite Bilateral

O limite bilateral de uma função existe em um ponto a se e somente se existirem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor; isto é:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Observação: Às vezes, um ou ambos os limites laterais podem não existir (e isto, por sua vez, implica que o limite bilateral não existe).

Exemplo: Para as funções nas figuras abaixo, ache os limites laterais e bilaterais em x=a se eles existirem.

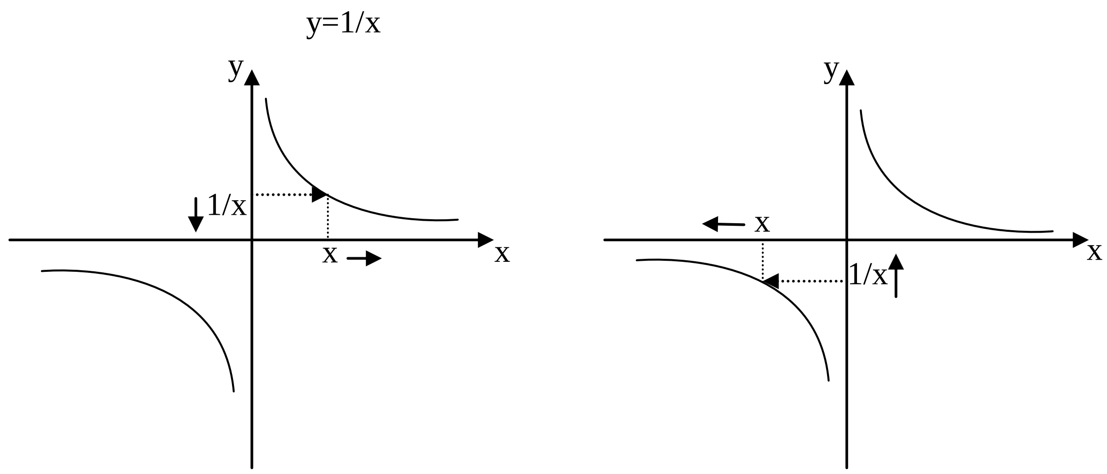


2.1.4 Limites no Infinito e Assíntotas Horizontais

Muitas vezes quando estudamos diversas aplicações é importante conhecer o valor da função para valores grandes de x. Se os valores de f(x) ficam cada vez mais próximos de um número L, à medida que x cresce sem limitação, então escrevemos: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

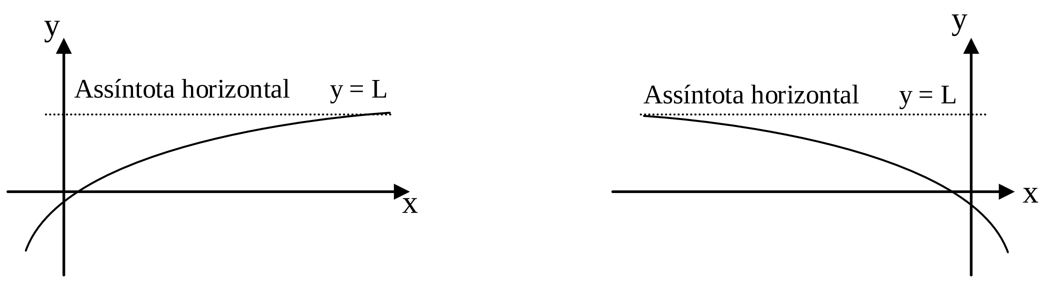
Analogamente, se os valores de f(x) ficam cada vez mais próximos de um número L, à medida que x decresce sem limitação, então escrevemos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$



$\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 1/x = 0$

Geometricamente, se f(x)→L quando x→ +∞, então o gráfico de y = f(x) aproxima-se mais e mais da reta y = L à medida que o gráfico é percorrido no sentido x positivo; se f(x)→L quando x→ –∞, então o gráfico de y = f(x) aproxima-se mais e mais da reta y = L à medida que o gráfico é percorrido no sentido x negativo. Em qualquer dos casos, chamamos a reta y = L um assíntota horizontal do gráfico de f.



2.1.5 Limites Infinitos

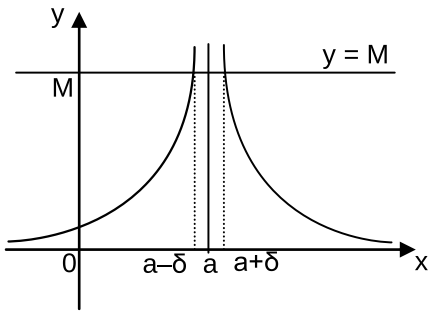
Os limites infinitos podem também ser definidos de uma maneira precisa.

Definição: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M há um número positivo correspondente δ tal que $f(x) > M$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

Isso diz que o valor de f(x) pode ser arbitrariamente grande (maior que qualquer número dado M), mas com $x \neq a$). Uma ilustração geométrica está na figura abaixo.



Dada qualquer reta horizontal $y = M$, podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se restringirmos x a ficar no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, mas $x \neq a$, então a curva $y = f(x)$ ficará acima da reta $y = M$. Você pode ver que se um M muito grande for escolhido, então um δ muito pequeno poderá ser necessário.

2.2 Limites (Técnicas para Calcular)
2.2.1 Métodos de Cálculos de Limites

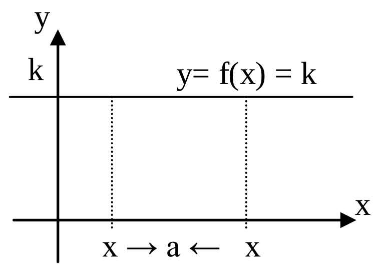
Até o momento, já discutimos limites, focalizando as idéias básicas. Neste tópico discutiremos métodos algébricos para encontrar limites, mantendo a discussão da teoria básica subjacente a esses métodos para o próximo tópico.

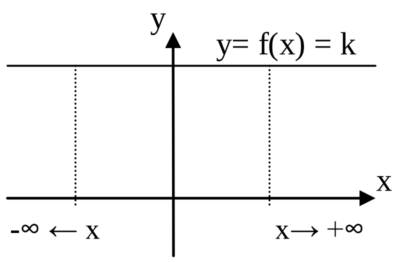
Nossa estratégia para encontrar algebricamente os limites tem duas partes:

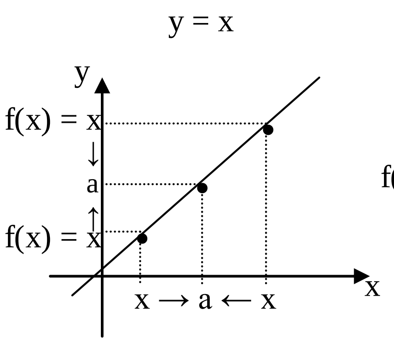
- Primeiro, estabelecermos os limites de algumas funções simples.

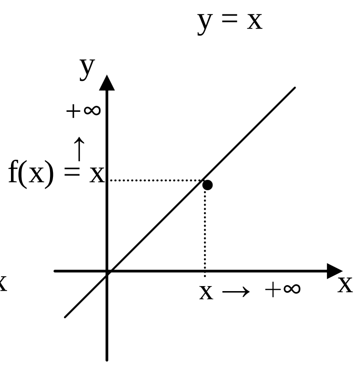
- Então, desenvolveremos um repertório de teoremas que nos capacitará a usar estes limites como "blocos de construção" para encontrar limites de funções mais complicadas.

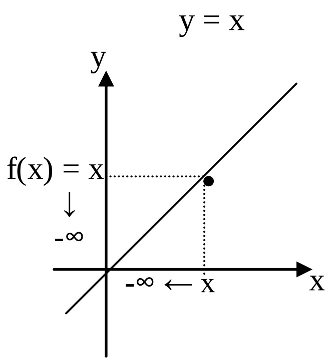
Os dez limites do teorema a seguir, todos os quais deveram estar evidentes, que iram formar nosso bloco de construção – três envolvem a função constante f(x)=k, três envolvem a função linear f(x)=x e quatro envolvem a função recíproca f(x)=1/x.



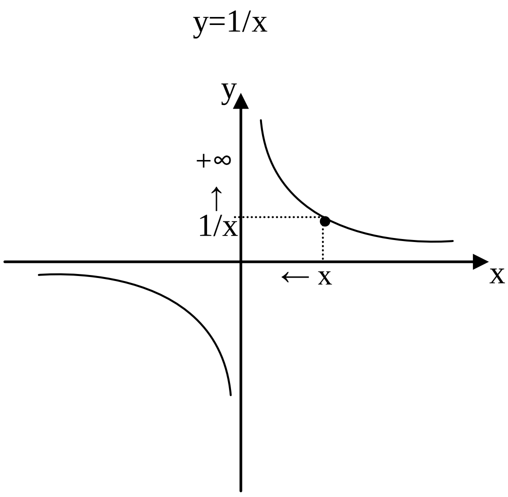




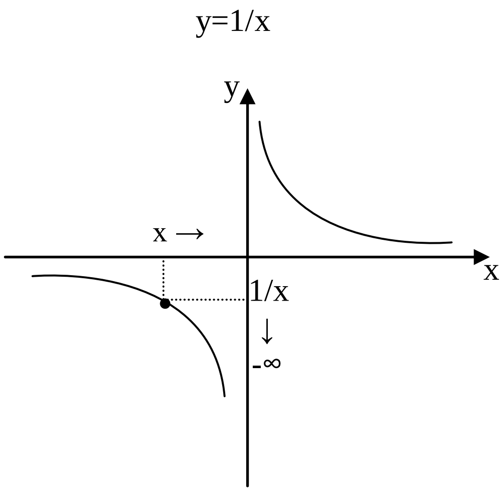




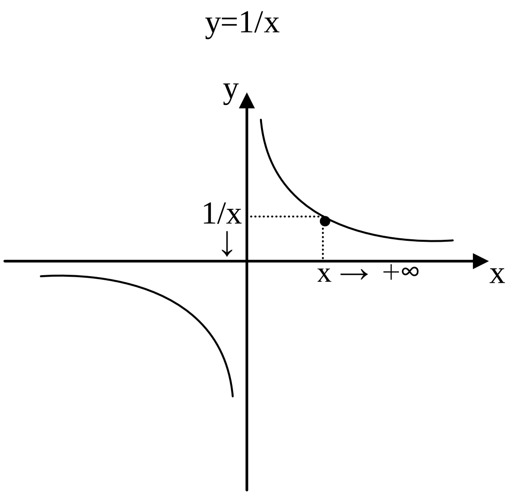
$\lim\limits_{x\to a} x = a$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$



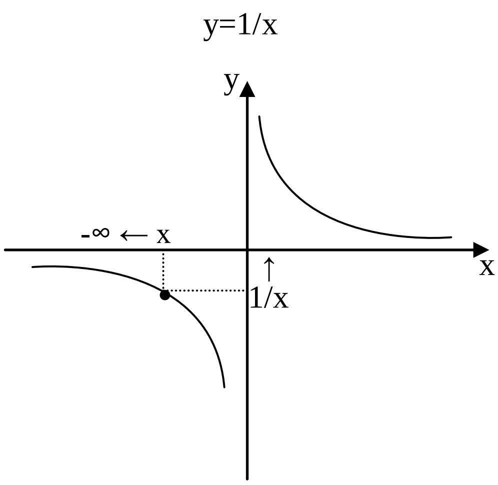
$\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$



$\lim_{x \to 0^-} 1/x = 0$



$\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$



$\lim_{x \to -\infty} 1/x = 0$

2.2.2 Propriedades dos Limites

Teorema 1: Suponha que c seja uma constante e os limites $L = \lim_{x \to a} f(x)$ e $M = \lim_{x \to a} g(x)$ existam, então:

a) lim [f(x) + g(x)] = lim f(x) + lim g(x) = L+M

Prova: (Lei da soma)

lim [f(x) + g(x)] = lim f(x) + lim g(x) = L+M

Dado $\varepsilon > 0$.devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

Usando a desigualdade triangular podemos escrever

$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$

Podemos fazer $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor que ε tornando cada um dos termos $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$ menor que $\varepsilon/2$. Uma vez que $\varepsilon/2 > 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que

$|f(x) - L| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$

Analogamente, uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe um número $\delta_2 > 0$ tal que

$|g(x) - M| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Note que

se $0 < |x - a| < \delta$ então $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$

logo $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ e $|g(x) - M| < \varepsilon/2$

Consequentemente, $|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

temos,

$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

Assim pela definição de limite,

$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$, ou seja, $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

b) lim [f(x) – g(x)] = lim f(x) – lim g(x) = L – M

Prova (Lei do Produto)

Dado $\varepsilon > 0$, queremos determinar $\delta > 0$ tal que

$|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$

Afim de obter termos que contenham $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$, adicionamos e subtraímos $Lg(x)$ como se segue.

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]| \\ &\leq |[f(x) - L]g(x)| + |L[g(x) - M]| \\ &= |f(x) - L|\,|g(x)| + |L|\,|g(x) - M|\end{aligned}$$

Queremos fazer cada um desses termos menores que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\lim_{x\to a} g(x)=M$, há um número $\delta_1>0$ tal que

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1+|L|)} \quad \text{sempre que } 0<|x-a|<\delta_1$$

Também, há um número $\delta_2 > 0$ tal que se $0<|x-a|<\delta_2$, então

$$|g(x) - M| < 1$$

e portanto,

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leq |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

Uma vez que $\lim_{x\to a} g(x) = L$, há um número $\delta_3 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1+|M|)} \quad \text{sempre que } 0<|x-a|<\delta_3$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$. Se $0<|x-a|<\delta$, então temos $0<|x-a|<\delta_1$, $0<|x-a|<\delta_2$, $0<|x-a|<\delta_3$; logo podemos combinar as desigualdades para obter:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LM| &\leq |f(x) - L|\,|g(x)| + |L|\,|g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1+|M|)}(1+|M|) + |L|\frac{\varepsilon}{2(1+|L|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Isso mostra que $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = LM$.

c) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}, \; g(x) \neq 0$$

Prova (Lei da Constante)

Se tomarmos g(x) = c na Lei do produto, obteremos

$$\lim_{x \to a} [cf(x)] = \lim_{x \to a} [g(x).f(x)] = \lim_{x \to a} g(x). \lim_{x \to a} f(x) = \lim\ c. \lim_{x \to a} f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

Prova (Lei da Diferença)

Usando as leis da soma e da constante com c = – 1, temos:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)]$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x)$$
$$= \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x)$$
$$= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

d) $$\lim_{x \to a} [\, f(x) \,.\, g(x)\,] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x) = L.M$$

Prova (Lei do Quociente)

Primeiro vamos mostrar que se $\lim_{x \to a} g(x) = M$, $M \neq 0$, então $\lim_{x \to a} 1/g(x) = 1/M$ para fazer isso devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$\left| 1/g(x) - 1/M \right| < \varepsilon$ sempre que $0 < \left| x - a \right| < \delta$.

Observe que $\left| 1/g(x) - 1/M \right| = \dfrac{\left| M - g(x) \right|}{\left| Mg(x) \right|}$

Sabemos que podemos tornar o numerador pequeno. Mas também precisamos saber que o denominador não é pequeno quando x está próximo de a. Uma vez que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que, sendo $0 < |x - a| < \delta_1$, teremos

$$
\begin{aligned}
|g(x) - M| < |M|/2 \text{ e portanto } |M| &= |M - g(x) + g(x)| \\
&\leq |M - g(x)| + |g(x)| \\
&< |M|/2 + |g(x)|.
\end{aligned}
$$

Isso mostra que $|g(x)| > M/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Logo, para esses valores de x,

$$\frac{1}{|Mg(x)|} = \frac{1}{|M|.|g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$$

Também há $\delta_2 > 0$ tal que

$|g(x) - M| < \frac{M^2}{2}.\varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2} \cdot \frac{M^2}{2}.\varepsilon = \varepsilon$$

Segue-se que $\lim_{x\to a} 1/g(x) = 1/M$. Finalmente, usando a Lei do produto obtemos:

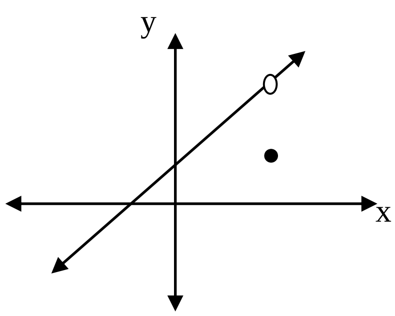
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} \\
&= L.\frac{1}{M} \\
&= \frac{L}{M}
\end{aligned}
$$

e) $\lim_{x\to a} [\, c\, f(x)\,] = \lim_{x\to a} c \,.\, \lim_{x\to a} f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$

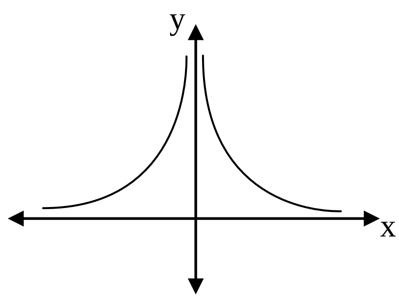
2.3 Continuidade

A continuidade de uma função esta relacionada com o conceito de suavidade. Assim para concluir quando uma função é continua devemos perguntarmos se a função é suave ou não.

y = f(x)



g(x) = 1/|x|



Vemos que a noção de continuidade não coincide com o conceito de suavidade, pois o valor que toma a função em um ponto pode ser diferente do limite da função nesse ponto. No caso das funções f e g, elas não estão definidas nos pontos x=2 e x=0 respectivamente. Portanto, para que a função f seja contínua o limite da função terá que ser igual ao valor da função no ponto x = 2. A função g não é contínua, portanto é descontinua.

2.3.1 Condição de Continuidade

Para que uma função seja contínua em um ponto c, as seguintes condições devem estar satisfeitas::

a) f(c) está definida

b) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe

c) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Exemplo: Verificar a continuidade das funções no ponto x = 2.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; $f(2) = \dfrac{2^2 - 4}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$ (Não é contínua em x=2)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2).(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$$

2.3.2 Algumas Propriedades de Funções Contínuas

O teorema seguinte é consequência direta do Teorema 1, das propriedades dos limites, e nos capacita a tirar conclusões sobre a continuidade das funções obtidas pela adição, pela subtração, pela multiplicação e pela divisão de funções contínuas.

Se as funções f e g forem contínuas em c, então:

1. f + g é contínua em c.
2. f - g é contínua em c.
3. f.g é contínua em c.
4. f/g é contínua em c se $g(c) \neq 0$ e tem uma descontinuidade em c, se $g(c) = 0$.

Cada uma das cinco partes desse teorema segue da correspondente Propriedades dos Limites. Vamos provar as cinco partes, uma vez que f e g são contínuas em c, temos:

Prova (1):

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ e $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$; consequentemente

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} (f + g)(x) &= \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \\ &= f(c) + g(c) \\ &= (f + g)(c)\end{aligned}$$

Isso mostra que f + g é contínua em c.

Prova (2):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f-g)(x) &= \lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]\\ &= \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)\\ &= f(c)-g(c)\\ &= (f-g)(c)\end{aligned}$$

Isso mostra que f – g é contínua em c.

Prova (3):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f.g)(x) &= \lim_{x\to c}[f(x).g(x)]\\ &= \lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x)\\ &= f(c).g(c)\\ &= (f.g)(c)\end{aligned}$$

Isso mostra que f.g é contínua em c.

Prova (4):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f/g)(x) &= \lim_{x\to c}[f(x)/g(x)]\\ &= \lim_{x\to c} f(x) / \lim_{x\to c} g(x)\\ &= f(c)/g(c)\\ &= (f/g)(c)\end{aligned}$$

Isso mostra que f/g é contínua em c.

2.3.3 Continuidade de Funções Racionais

Uma vez que os polinômios são funções contínuas, e como funções racionais são razões de polinômios, da propriedade 4 das funções contínuas temos o seguinte resultado.

$$f(x) = \frac{3x+5}{x^2-5x+6}\;;\quad x^2-5x+6 \neq 0$$ não é continua para x = 2 e x = 3.

Uma função é continua em toda parte com exceção dos zeros do polinômio dos denominados, ou seja, é continua em seu domínio.

2.3.4 Continuidade de Funções Compostas

Teorema 2: Sejam f e g funções tais que gof estejam bem definidas no ponto a e g é contínua em f(a), então gof é contínua em a.

Prova: Im(f) $\cap$ Dom(g). Como g é contínua em b = f(a), para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $y \in$ Im(f) e $|y - b| < \delta_2$, então $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Por outro lado f é contínua em a: logo, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in$ Dom(f) e $|x - a| < \delta_2$ então $|f(x) - f(a)| = |f(x) - b| < \delta_1$. Logo, se $x \in$ Dom(f) $\cap$ $(a - \delta_2, a + \delta_2)$, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.

Suponha que lim simboliza um dos limites $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to c^+}$, $\lim\limits_{x\to c^-}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

Se lim g(x)=L e se a função f for continua em L, então lim f(g(x))=f(L). Isto é, lim f(g(x)) = f (lim g(x)).

Exemplo: Suponha que lim g(x) exista, onde lim significa qualquer um dos limites. Sabemos que a função $|x|$ é continua em toda parte; logo, segue que:

$\lim |g(x)| = |\lim g(x)|$.

Por exemplo:

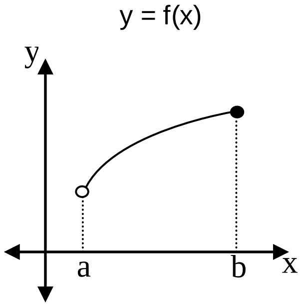
$$\lim_{x\to 3} |5-x^2| = \left|\lim_{x\to 3} (5 - x^2)\right| = |-4| = 4$$

O teorema seguinte refere-se à continuidade da composição de funções; a primeira parte trata da continuidade em um ponto especifico, e a segunda, da continuidade em toda parte.

Do teorema 2, temos que se a função g for continua em toda parte e a função f for continua em toda parte, então a composição fog é continua em toda parte.

2.3.5 Continuidade à esquerda e continuidade à direita

A definição que envolve limite bilateral, não se aplica aos extremos do intervalo fechado [a,b] ou aos pontos extremos de um intervalo da forma [a,b),(a,b], (-∞,b] ou [a,+∞). Para resolver este problema, concordaremos que uma função é continua nos pontos extremos de um intervalo, se o valor no ponto extremo for igual ao limite lateral adequado naquele ponto. Por exemplo, a função cujo gráfico está abaixo é continua no ponto extremo à direita do intervalo [a,b] porque:



$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

mas não é continua no ponto extremo a esquerda porque:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$$

Em geral, dizemos que uma função é continua à esquerda no ponto c se $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ e é continua à direita no ponto c se $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$.

Usando esta terminologia, definimos continuidade em um intervalo fechado como segue:

Definição: Uma função f é dita contínua em um intervalo fechado [a, b], se as seguintes condições são satisfeitas:

1. f é contínua em (a, b).
2. f é contínua à direita em a.
3. f é contínua à esquerda b.

2.3.6 Lei do Confronto

Seja f, g e h funções que satisfazem $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em algum intervalo aberto que contenha o ponto c, com a possível exceção de que a desigualdade não precisa ser valida em c. Se g e h tiverem um mesmo limite quando x tende a c, digamos: $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, então f também tem este limite quando x tende a c, isto é:

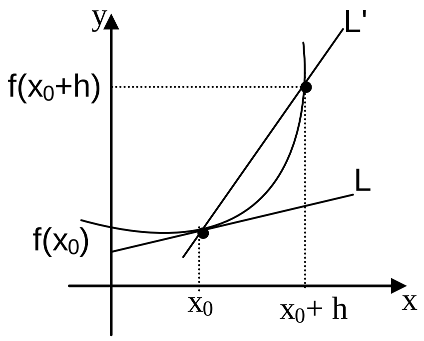
$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

3 DERIVADAS

3.1 Tangente de uma Curva

Usando o conceito de limites, definiremos a tangente a uma curva. Primeiro aproximaremos a reta tangente através de secante que cortam a curva em dois pontos. A secante se converterá em tangente no limite quando um dos pontos se aproxima do outro. Denotemos por L' a reta secante a curva, que passa pelos pontos (x_0, $f(x_0)$) e (x_0+h, $f(x_0+h)$) e por L a reta tangente à curva no ponto (x_0,$f(x_0)$). Na medida em que h se aproxima a zero, a reta L' se aproxima a reta L tangente à curva no ponto x_0. Isto é equivalente a afirmar que a inclinação da reta L' se aproxima à inclinação da reta L. Portanto, a inclinação da reta tangente será igual ao limite da inclinação da reta secante, quando um dos pontos converge para o outro.

No gráfico, as inclinações das retas L' e L estão dadas por:



$m_0 = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ e $m = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, respectivamente.

Portanto, a inclinação da reta tangente é definida através de um processo limite de retas secantes. O valor deste limite, quando existe, será a inclinação da reta tangente.

3.2 Taxa de Variação

Em geral, se x e y forem quantidades relacionadas por uma equação y=f(x), podemos considerar a taxa segundo a qual y varia com x. Da mesma forma que ocorre com a velocidade, há uma distinção entre uma taxa média de variação representada pela inclinação da reta secante, e a taxa instantânea, representada pela inclinação da reta tangente, mais precisamente, temos as seguintes definições:

a) Taxa de Variação Média – TVM: Se y = f(x), então a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ é a inclinação m_{sec} da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(x_0,f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, isto é,

$$m_{sec} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

b) Taxa de Variação Instantânea – TVI: Se y = f(x), então a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto x_0 é a inclinação m_{tg} da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0, isto é,

$$m_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

3.3 Reta tangente definida precisamente

Mostramos informalmente que a inclinação da reta tangente ao gráfico y = f(x) no ponto x_0 é dada por

$$m_{tg} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Entretanto, será mais conveniente expressar esta fórmula de modo diferente, introduzindo uma nova variável $h = x_1 - x_0$. Tem-se que $x_1 = x_0 + h$ e, consequentemente, $x_1 \to x_0$ quando $h \to 0$. Teremos a expressão

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definição: Se $P(x_0,y_0)$ é um ponto no gráfico de uma função f, então a reta tangente ao gráfico de f em P, também chamada de reta tangente ao gráfico de f em x0, é definida como sendo a reta que passa por P com inclinação contanto que este limite exista. Se o limite não existir, então concordaremos que não há nenhuma reta tangente ao gráfico em P.

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

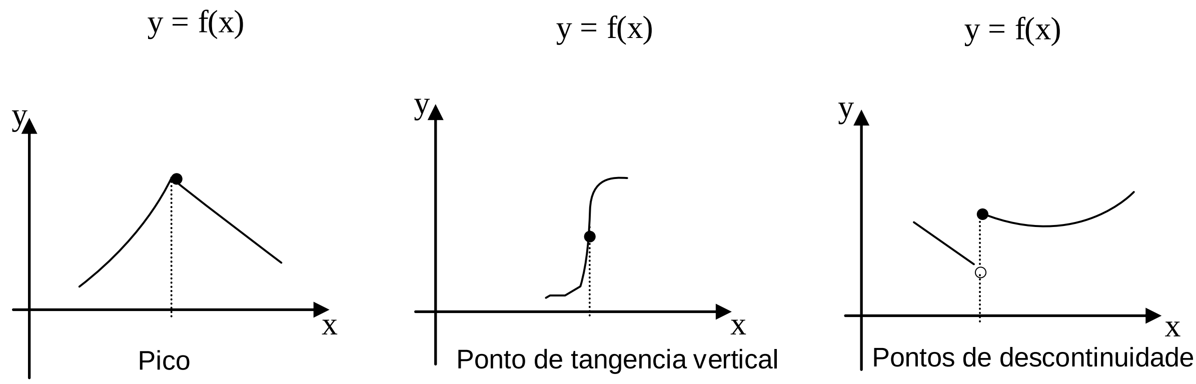
3.4 Diferenciabilidade

Temos que a derivada de uma função f é definida nos pontos onde o limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe.

Esses pontos são chamados pontos de diferenciabilidade para f, e os pontos onde este limite não existe são chamados pontos de não-diferenciabilidade para f.

Se x_0 é um ponto de diferenciabilidade de f, dizemos que f é diferenciável em x_0 ou que a derivada de f existe em x_0; e se x_0 é um ponto de não-diferenciabilidade de f, dizemos que a derivada de f não existe em x_0. Se f é diferenciável em todo intervalo aberto (a,b), então diremos que f é diferenciável em (a,b). Esta definição também se aplica para intervalos abertos infinitos da forma $(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$ e $(-\infty,+\infty)$. No caso em que f diferenciável em $(-\infty,+\infty)$, diremos que f é diferenciável em todo lugar.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto, mas tal intervalo não for importante para a discussão então diremos que f é diferenciável (sem referir o intervalo). Geometricamente, os pontos de diferenciabilidade de f são aqueles onde a curva y = f(x) tem uma reta tangente, e os pontos de não-diferenciabilidade são aqueles onde a curva não tem reta tangente. De modo informal, os pontos de não-diferenciabilidade mas comumente encontrados podem ser classificados como: Picos, Pontos de tangencia vertical e Pontos de descontinuidade.



3.5 Relação entre Diferenciabilidade e Continuidade

Faz sentido intuitivamente que uma função f não pode ser diferenciável num ponto de descontinuidade, uma vez que não há uma maneira razoável de desenhar uma única reta tangente em tais pontos. O seguinte teorema mostra que uma função f deve ser contínua em cada ponto onde é diferenciável, ou seja, uma função f não pode ser diferenciável em um ponto de descontinuidade.

Teorema 3: se f é diferenciável em x_0, então f é contínua em x_0.

Prova: Supondo que f é diferenciável em x0, tem-se, que f '(x) existe e é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)$$

Para mostrar que f é contínua em x_0, devemos mostrar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou equivalentemente,

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$$

Expressando isto em termos da variável $h = x - x_0$, devemos provar que

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) = 0$$

Contudo, isso pode ser provado usando-se:

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.h\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right).\lim_{h\to 0} h$$

$$= f'(x_0).0 = 0$$

3.6 Notações de Derivadas

O processo de encontrar derivada é chamado de diferenciação. Você pode pensar a diferenciação como uma operação sobre funções que associa uma função f ' a uma função f. Quando a variável independente for x, a operação de diferenciação é frequentemente denotada por: $\frac{d}{dx}[f(x)]$ e se lê "derivada de f(x) em relação a x" ou simplesmente por f ' (x).

3.7 Outras Notações

Alguns escritores denotam a derivada por $D_x [f(x)] = f'(x)$, porem não usaremos esta denotação. Em problemas nos quais o nome da variável independente é claro a partir do contexto, há algumas outras notações possíveis para derivada. Por exemplo, se y = f(x), e está claro a partir do problema que a variável independente é x, então a derivada com relação à x pode ser denotada por y' ou f '.

Frequentemente, você verá definição usando Δx em vez de h para quantidade variante. Neste caso, fica da seguinte forma:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

3.8 Técnicas de diferenciação

No último tópico, definimos a derivada de uma função f como limite e usamos este limite para calcular alguns casos simples. Vamos desenvolver teoremas importantes, que nos possibilitarão calcular derivadas de forma mais eficiente.

O gráfico de uma função constante f(x) = c é a reta horizontal y = c, logo a reta tangente a este gráfico tem inclinação 0 em todo ponto x. Desta forma, devemos esperar que a derivada de uma constante seja 0 para todo x.

Teorema 4: A derivada de uma função constante é zero, isto é, se c for um número real qualquer, então:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

Prova: Seja f(x) = c. Então, a partir da definição de derivada,

$$\frac{d}{dx}[c] = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Exemplo: Se f(x) = 5 para todo x, então f '(x) = 0 para todo x, isto é,

$$\frac{d}{dx}[5] = 0$$

Teorema 5: (regra da potência). Se n for um número inteiro positivo, então:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Prova: Seja f(x) = x^n. Então, a partir da definição de derivada e do teorema do binômio para a expansão de expressões do tipo $(x + h)^n$, obtemos:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

$$= nx^{n-1} + 0 + \ldots + 0 + 0$$

$$= nx^{n-1}$$

Observação: Concluindo, para diferenciar x elevado a uma potência inteira, multiplique a potência por x elevado à potência menos um.

Exemplo: $\frac{d}{dx}[x^5] = 5x^4$

Teorema 6: Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também é diferenciável em x e: $\frac{d}{dx}[cf(x)] = \frac{cd}{dx}[f(x)]$.

Prova:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c\,\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Assim, o teorema afirma que (cf)' = c f '

Observação: concluindo, um fator constante pode sair do sinal de derivação.

Exemplo: $\frac{d}{dx}[4x^8] = 4\frac{d}{dx}[x^8] = 4[8x^7] = 32x^7$

Teorema 7: Se f e g forem diferenciáveis em x, então f + g também o é:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)].$$

Prova:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Teorema 8: Se f e g forem diferenciáveis em x, então f – g também o é:

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)].$$

Prova:

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{[\,f(x + h) - g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x + h) - f(x)] - [g(x + h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}[\,f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Teorema 9: (regra do produto). Se fg forem diferenciáveis em x, então o produto f.g também o é e:

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)].$$

As prova iniciais são aplicações diretas da definição de derivada porém, esta prova requer um truque – somar e subtrair a f(x+ h)g(x) ao numerador na definição de derivada, da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h).g(x + h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h).g(x + h) - f(x + h).g(x) + f(x + h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[f(x + h).\left(\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right) + g(x).\left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right) \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x + h).\lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} f(x + h) \right) \frac{d}{dx}[g(x)] + \left(\lim_{h\to 0} g(x) \right) \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Nota: No último passo, $f(x + h)\to f(x)$ quando $h\to 0$, pois f é continua em x e $g(x)\to g(x)$ quando $h\to 0$, pois g(x) não envolve h e, portanto, permanece constante.

Teorema 10: (Regra do quociente). Se f e g forem diferenciáveis em x e g'(x) ≠ 0, então f / g é diferenciável em x e:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\,\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Prova:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).\,g(x) - f(x).g(x+h)}{h.g(x).g(x+h)}$$

Somando-se e subtraindo-se ao numerador o termo f(x).g(x), iremos obter

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).\,g(x) - f(x).g(x) - f(x).g(x+h) + f(x).g(x)}{h.g(x).g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x).\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - \left[f(x).\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x).g(x+h)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} g(x).\,\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} f(x).\,\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x).\,\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)}$$

$$= \frac{[\lim\limits_{h\to 0} g(x)].\frac{d}{dx}[f(x] - [\lim\limits_{h\to 0} f(x)].\frac{d}{dx}[g(x)]}{\lim\limits_{h\to 0} g(x).\,\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)}$$

$$= \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

3.8.1 Derivadas de Ordem Superior

Diremos que uma função é duas vezes diferenciável se sua derivada é também uma função diferenciável. Isto é, que existam os seguintes limites:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Exemplo: Calcule a derivada de ordem 3 da função $f(x) = x^3 + 3x$.

Solução: Para isto, procedemos indutivamente:

$f'(x) = 3x^2 + 3$, $f''(x) = 6x$ e $f'''(x) = 6$.

De onde concluímos que a derivada de terceira ordem de f é igual a $f''' = 6$.

3.9 Regra da Cadeia

Teorema 11: Se f e g forem diferenciáveis e F = fog for a função composta definida por F(x) = f(g(x)), então F é diferenciável em F' e dada pelo produto

$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Na notação de Leibniz, se y = f(u) e u = g(x) forem funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Suponha que lhe foi pedido para diferenciar a função

$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

As fórmulas de diferenciação vistas anteriormente não nos capacitaram a calcular F'(x) diretamente.

Observe que F é uma função composta. De fato, se tomarmos y = f(u) = raiz de u e seja U = g(x) = x quadrado + 1, então poderemos escrever y = F(x) = f(g(x)), isto é, F = fog. Sabemos como diferenciar ambos, f e g, então seria proveitoso ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de F = fog em termos das derivadas de f e g.

Isso resulta que derivada da função composta fog é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é uma das mais importantes regras de diferenciação. Parece plausível interpretarmos as derivadas como taxa de variação. Considere du/dx como a taxa de variação de u em relação a x, dy/du como a taxa de variação de y em relação a u, e dy/dx como taxa de variação de y em relação a x. Se u variar duas vezes mais rápido que x e y três vezes mais rápido que u então parece razoável que y varia seis vezes mais rápido que x, e assim esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Como provar a Regra de Cadeia:

Lembre-se de que se $y = f(x)$ e x variar de *a* a $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

De acordo com a definição de derivada, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Dessa forma, se denotarmos por ε a diferença entre o quociente de diferenças e a derivada, obteremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Mas $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \Longrightarrow \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon.\Delta x$

Se definirmos $\varepsilon = 0$ quando $\Delta x = 0$, então ε se torna uma função contínua de Δx. Assim, para uma função diferenciável f, podemos escrever

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon.\Delta x \qquad \text{onde } \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0$$

e ε é uma função contínua de Δx. Essa propriedade de funções diferenciáveis é que nos possibilita provar a Regra da Cadeia.

Prova da Regra da Cadeia:

Suponha que $u = g(x)$ é diferenciável em a e $y = f(u)$ é diferenciável em $b = g(a)$. Se Δx for um incremento de x e Δu e Δy forem os incrementos correspondentes em u e y, então poderemos usar a Equação $\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\Delta x$ onde $\varepsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, para escrever:

$$\Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\Delta x \qquad \text{(I)}$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Da mesma forma

$$\Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\Delta u \qquad \text{(II)}$$

onde $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta u \to 0$. Se substituirmos agora a expressão para Δu da equação (I) na equação (II), obteremos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2]\,[g'(a) + \varepsilon_1]\Delta x$$

logo $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2]\,[g'(a) + \varepsilon_1]$

Quando $\Delta x \to 0$, da equação (I) mostra que $\Delta u \to 0$. Assim, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2]\,[g'(a) + \varepsilon_1]$$

$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Isso prova a Regra da Cadeia.

3.10 Aproximação Linear Local; Diferenciais

3.10.1 Incrementos

Se o valor de uma variável muda de um número para outro, então o valor final menos o valor inicial é chamado de incremento da variável. É tradicional em cálculo denotar o incremento em uma variável Δx por x. Assim sendo, se o valor inicial de x for x_0, e o valor final for x_1, então $\Delta x = x_1 - x_0$. Nesta notação, a expressão Δx não deve ser entendida como o produto de Δ por x, mas como uma única entidade representando a variação no valor de x. Esta notação pode ser usada com qualquer variável; por exemplo, os incrementos em y, t e θ seriam denotados por Δy, Δt e $\Delta\theta$.

3.10.2 Diferencial

Quando Newton e Leibniz publicaram independentemente as suas descobertas do cálculo, cada um usou uma notação para a derivada, e, por mais de 50 anos, houve uma intensa batalha sobre qual era a melhor notação. No final, venceu a notação de Leibniz dy/dx, pois produzia fórmulas corretas de forma natural. Um bom exemplo é a regra da cadeia $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$.

Os símbolos dy e dx que aparecem na derivada são chamados de diferenciais, e o nosso próximo objetivo é definir estes símbolos, de tal forma que se possa tratar dy/dx como uma razão. Com esta finalidade, vamos considerar x como fixo e definir dx como uma variável independente, para a qual possa ser atribuído um valor arbitrário. Se f for diferenciável em x, então definimos dx pela fórmula dy = f '(x)dx, ou seja, dy/dx = f '(x).

3.11 Derivada das Funções Trigonométricas

3.11.1 Derivada da função seno

$f(x) = \text{sen}(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$

Prova:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \text{sen}(h)\cos(x) - \text{sen}(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)\cos(x) - (1-\cos(h))\,\text{sen}(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\text{sen}(h)}{h}\cos(x) - \frac{1-\cos(h)}{h}\text{sen}(x) \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\text{sen}(h)}{h} \right) \lim_{h\to 0} (\cos(x)) - \lim_{h\to 0} \left(\frac{1-\cos(h)}{h} \right) \lim_{h\to 0} (\text{sen}(x)) =$$

$$= \cos(x) \,.\, 1 - 0 \,.\, \text{sen}(x) =$$

$$= \cos(x)$$

3.11.2 Derivada da função cosseno

$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(x)$

Prova:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \text{sen}(x)\text{sen}(h) - \cos(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos(x)(1-\cos(h)) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\cos(x)\frac{1-\cos(h)}{h} - \operatorname{sen}(x)\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}(\cos(x))\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right) - \lim_{h\to 0}(\operatorname{sen}(x))\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) =$$

$$= \cos(x) \,.\, 0 - \operatorname{sen}(x) \,.\, 1 =$$

$$= -\operatorname{sen}(x)$$

3.11.3 Derivada da função tangente

$f(x) = tg(x) \rightarrow f\,'(x) = sec^2(x)$

Prova:

$$f\,'(x) = [tg(x)]' =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' =$$

$$= \frac{[\operatorname{sen}(x)]'\cos(x) - \operatorname{sen}(x)[\cos(x)]'}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos(x).\cos(x) - \operatorname{sen}(x).(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} =$$

$$= \sec^2(x)$$

3.11.4 Derivada da função cotangente

f(x) = cotg(x) → f '(x) = – cossec^2(x)

Prova:

$$f'(x) = [\text{cotg}(x)]' =$$

$$= \left(\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right)' =$$

$$= \frac{[\cos(x)]'\,\text{sen}(x) - \cos(x)\,[\text{sen}(x)]'}{\text{sen}^2(x)} =$$

$$= \frac{-\,\text{sen}(x).\text{sen}(x) - \cos(x).\,\cos(x)}{\text{sen}^2(x)} =$$

$$= \frac{-\,[\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)]}{\text{sen}^2(x)} =$$

$$= \frac{-1}{\text{sen}^2(x)} =$$

$$= -\,\text{cossec}^2(x)$$

3.11.5 Derivada da função secante

f(x) = sec(x) → f '(x) = sec(x).tg(x)

Prova:

$$f'(x) = [\sec(x)]' =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)' =$$

$$= \frac{[1]'\cos(x) - 1[\cos(x)]'}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{0.\cos(x) - 1.-\,\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} =$$

$$= \sec(x) \cdot \text{tg}(x)$$

3.11.6 Derivada da função cossecante

$f(x) = \text{cossec}(x) \rightarrow f'(x) = -\text{cossec}(x)\text{cotg}(x)$

Prova:

$$f'(x) = [\text{cossec}(x)]' =$$

$$= \left(\frac{1}{\text{sen}(x)}\right)' =$$

$$= [(\text{sen}(x))^{-1}]' =$$

$$= -1(\text{sen}(x))^{-2}\,[\text{sen}(x)]' =$$

$$= -1(\text{sen}(x))^{-2}\cos(x) =$$

$$= \frac{-\cos(x)}{\text{sen}^2(x)} =$$

$$= \frac{-1}{\text{sen}(x)}\,\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} =$$

$$= -\text{cossec}(x)\,\text{cotg}(x)$$

3.12 Derivada das Funções Inversas

Definição: Se as funções f e g satisfazem as duas condições

g(f(x)) = x para todo x no domínio de f.

f(g(x)) = x para todo x no domínio de g.

Então, dizemos que f e g são funções inversas. Além disso, chamamos f uma inversa de g e g uma inversa de f.

Exemplos: Calcule as derivadas da função inversa de f(x) = x + ln(x).

Resolução: Note que y = x + ln(x). Derivando temos que

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

De onde obtemos que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{1 + x}$$

Que representa a derivada da função inversa de f.

3.13 Derivada das Funções Implícitas

Definição: Dizemos que uma dada equação em x e y define a função f implicitamente se o gráfico de y = f(x) coincidir com algum segmento do gráfico da equação.

Assim, por exemplo, a equação $x^2 + y^2 = 1$ define as funções $f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ implicitamente, uma vez que os gráficos dessas funções são os segmentos do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Às vezes, pode ser difícil ou impossível resolver uma equação em x e y para y em termos de x. A equação $x^3 + y^3 = 3xy$, por exemplo, pode ser resolvida para y em termos de x, mas a álgebra é enfadonha e as fórmulas resultantes são complicadas. Por outro lado, a equação sen(xy) = y, não pode ser resolvida para y em termos de x por qualquer método elementar. Assim, mesmo que uma equação em x e y possa definir uma ou mais funções de x, pode não ser prático ou possível achar fórmulas explícitas para aquelas funções.

3.14 Derivada das Funções Logarítmicas

Teorema 12: Se $y = \log_b x$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_b e$$ onde e é a base do ln.

Exemplo: Calcular $\frac{dy}{dx}$ de $y = \log_5 (3x + 6)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x + 6} . \log_5 e .(3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3(x + 2)} . \log_5 e$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + 2} . \log_5 e$$

3.15 Derivadas das Funções Exponenciais

Teorema 13: Se $y = b^x$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} b^x = b^x \ln b$$

Caso especial: Se b = e, então:

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

Exemplo: Calcular à derivada de $y = 5^x$.

$$\frac{dy}{dx} = 5^x \ln 5$$

3.16 Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

Um problema comum em trigonometria é achar um ângulo cujas funções trigonométricas são conhecidas. Problemas deste tipo envolvem a computação de funções arco, tais como arcsen *x*, arccos *x*, arctg *x*, e assim por diante. Consideremos esta idéia do ponto de vista de funções inversas, com a meta de desenvolver fórmulas de derivadas para as funções trigonométricas inversas.

Nenhuma das seis funções básicas é um a um, pois todas elas repetem periodicamente, portanto, não passam no teste da reta horizontal. Assim, para definir funções trigonométricas inversas, primeiro devemos restringir os domínios das funções trigonométricas para torná-las um a um. As inversas das funções restritas são denotadas por: $sen^{-1} x$, $cos^{-1} x$, $tg^{-1} x$ e $sec^{-1} x$

obs.: As notações sen^{-1} , cos^{-1}, ... são reservadas exclusivamente para as funções trigonométricas inversas e não devem ser usadas para os recíprocos de função trigonométrica.

3.16.1 Derivada do arcosseno (sen^{-1}):

Teorema 14: Se y = arc senx, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ \text{arc senx}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}}$$

Exemplo: Se y = $sen^{-1} (3x^2 + x)$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(3X^2+\ X)^2}} \cdot (6x + 1) = \frac{6x + 1}{\sqrt{1-(3X^2+\ X)^2}}$$

3.16.2 Derivada do arco cosx ($\cos^{-1}$):

Teorema 15: Se $y = \cos^{-1}x$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{1 - x^2}$$

Exemplo: Se $y = \cos^{-1}(4x^2 + 3x)$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(4X^2+\ 3X)^2}} \cdot (8x + 3) = \frac{-(8x + 3)}{\sqrt{1-(4X^2+\ 3X)^2}}$$

3.16.3 Derivada do arc tgx ($tg^{-1}x$):

Teorema 16: Se $y = tg^{-1}x$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} tg^{-1}x = \frac{1}{1 + x^2}$$

Exemplo: Se $y = tg^{-1}(3x^2 - 2x)$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (3x^2 - 2x)^2} \cdot (6x - 2) = \frac{6x - 2}{1 + (3x^2 - 2x)^2}$$

3.16.4 Derivada do arc cotgx ($cotg^{-1}x$):

Teorema 17: Se $y = cotg^{-1}x$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} cotg^{-1}x = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Exemplo: Se $y = cotg^{-1}(3x + 1)$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + (3x + 1)^2} \cdot 3 = \frac{-3}{1 + (3x + 1)^2}$$

3.16.5 Derivada do arco secx (sec $^{-1}$x):

Teorema 18: Se y = arc senx, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Exemplo: Se y = $\sec^{-1}(3x-1)$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x-1)\sqrt{(3X^2-1)^2-1}} \cdot 3 = \frac{3}{(3x-1)\sqrt{9X^2+6X}}$$

3.16.6 Derivada do arco cossecx (cossec^{-1}x):

Teorema 19: Se y = $\text{cossec}^{-1}x$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{cossec}^{-1}x = \frac{-1}{x\sqrt{1-X^2}}$$

Exemplo: Se y = $\text{cossec}^{-1}(2x^3+x^2)$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x^3+x^2)\sqrt{(2X^3-X)^2-1}} \cdot (6x^2+x) = \frac{-(6x^2+x)}{(2x^3+x^2)\sqrt{(2X^3-X)^2-1}}$$

3.16.7 Equação da reta tangente a uma curva dada

Teorema 20: Se y = f(x) é diferenciável em (x_0,y_0), então existirá neste ponto uma tangente cuja equação é dada por:

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0)$$

Exemplo: Calcular a equação da reta tangente à uma curva $y = 3x^2 + 5x + 4$, no ponto $x = 1$.

Se $x_0 = 1$, temos:

$y_0 = 3x_0^2 + 5x_0 + 4$

$y_0 = 3.1^2 + 5.1 + 4$

$y_0 = 3 + 5 + 4$

$y_0 = 12$

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 5$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 6.1 + 5 = 11$$

$(y - 12) = 11.(x - 1)$

$y - 12 = 11x - 11$

$\mathbf{y - 11x - 1 = 0}$

3.17 Teorema de L'Hopital

Teorema (Regra de L'Hospital): Sejam $f,g : [a,b] \to R$ funções contínuas em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Suponhamos que $f(c) = g(c) = 0$ para algum $c \in\ ]a,b[$ então é válido

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Prova: Aplicando o Teorema do Valor Médio de Cauchy no intervalo $[c,x_0]$ temos que existente $c < \xi < x_0$ de tal forma que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Note que quando $x_0 \to c$ temos que $\xi \to c$. Assim tomando limites teremos

$$\lim_{x_0 \to c} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim_{\xi \to c} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

De onde segue o resultado.

Exemplo: Aplicando o Teorema de L'Hopital. Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\text{sen } x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

3.18 Máximos e Mínimos relativos

Definição: Uma função f se diz ter um máximo relativo em c se houver um intervalo aberto contendo x_0, no qual f(c) é o maior valor, isto é, $f(c) \geq f(x)$ para todo x no intervalo. Analogamente, se diz que f tem um mínimo relativo em c se houver um intervalo aberto contendo x_0, no qual f(c) é o menor valor, isto é, $f(c) \leq f(x)$ para todo x no intervalo. Quando f tiver um máximo ou mínimo relativo em x_0, se diz que f tem um extremo relativo em c.

Os extremos relativos também podem ser vistos como pontos de transição, separando regiões onde o gráfico é crescente daquelas onde ele é decrescente. Os extremos relativos de uma função contínua ocorrem ou em bicos ou em pontos onde a reta tangente ao gráfico é horizontal.

Teorema de Fermat: Se uma função f tiver um máximo ou mínimo em c, e f '(c) existir, então f '(c) = 0.

Os pontos nos quais f '(c) = 0 ou f é não diferenciável são chamados de pontos críticos de f, ou seja, os extremos relativos de uma função, se houver, ocorrem em pontos críticos.

3.19 Pontos críticos

Segundo Stewart (2006) em termos de pontos críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito da seguinte forma: Se f tiver um máximo ou mínimo relativo em c, então c é um ponto crítico de f. Para encontrar um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, notamos que ou ele é relativo (nesse caso ocorre em um ponto crítico) ou acontece em um extremo do intervalo. Assim, o seguinte procedimento de três etapas sempre funciona.

Método para encontrar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado [a,b]:

1. Encontre os valores de f nos pontos críticos de f em (a,b).
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo.
3. O maior valor dos métodos 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

3.20 Teste da primeira derivada

O coeficiente angular da reta que passa por um ponto da curva em uma função, nos revela uma tendência que varia conforme a tangente desta reta, tomando como referência o eixo *x*, quando a função é crescente os valores das derivadas para os mesmos, de *x* são sempre positivos, enquanto que quando a função é decrescente estes são sempre negativos. O que nos sugere o seguinte teste:

Seja a função f(x) em um intervalo [a,b], dizemos que a função é crescente quando:

$$f'(x) > 0$$

Ainda podemos afirmar que, quando a função é decrescente:

$$f'(x) < 0$$

E finalmente, não apresenta tendências, permanecendo inalterada até o limite do ponto:

$$f'(x) = 0$$

É possível provar o teorema, pela análise da definição da função da derivada, da seguinte forma:

Se f(x) é contínua, existe f '(x) tal que:

$$f'(x) = \lim_{x_b \to x_a} \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a} \text{ onde } x_b > x_a.$$

Admitindo que o denominador 'e positivo, ou seja, que $x_b > x_a$, nos resta analisar o sinal do resultado no numerador, se $f(x_b) > f(x_a)$ e portanto, quando a função é crescente no intervalo, teremos $f'(x) > 0$, por outro lado se $f(x_b) < f(x_a)$ teremos uma função decrescente no intervalo e $f'(x) < 0$.

No último caso, se $f'(x) = 0$ então a reta que passa pelo ponto [x;f9x)] é paralela ao eixo *x*, o que indica um extremo ou um ponto de transição na tendência de crescimento da curva; explicando melhor: Se os valores da função estão crescendo e o ponto em questão tem derivada nula, ou a função atinge o maior valor no intervalo, ou atinge um ponto de transição na tendência de crescimento, passando de crescente para decrescente; quando a função está decrescendo passa de decrescente para crescente.

Exemplo: Analisar quanto aos extremos relativos a função $y = 3x^3 - 16x$.

$y = 3x^3 - 16x$

$y' = 9x^2 - 16$

$y' = 0$

$9x^2 - 16 = 0$

$9x^2 = 16$

$X = \pm 4/3$

$$\begin{cases} x = -4/3 \text{ é um ponto de máximo relativo.} \\ x = 4/3 \text{ é um ponto de mínimo relativo.} \end{cases}$$

$y(-4/3) = 3(-4/3)^3 – 16(-4/3)$

$y(-4/3) = 64/9 + 64/3$

$y(-4/3) = 128/9$ é o valor máximo relativo.

$y(4/3) = 3(4/3)^3 – 16(4/3)$

$y(4/3) = 64/9 – 64/3$

$y(4/3) = – 128/9$ é o valor máximo relativo.

3.21 Teste da segunda derivada

Seja a função f(x), dizemos que f ''(x) é a derivada segunda, com a qual podemos provar que:

Dado o intervalo [a,b], onde existe um número c, tal que f '(c) = 0:

Se f ''(x) < 0 então f(c) fornece o valor máximo no referido intervalo.

Ainda poderemos afirmar que:

Se f ''(x)> 0 então f(c) fornece o valor mínimo no referido intervalo.

Análise:

Consideremos a derivada segunda $f''(x) = \lim_{x_2 – x_1} \frac{f'(x_2) – f'(x_1)}{x_2 – x_1}$

Tomando o valor de $[(x_2 – x_1) > 0]$ podemos verificar o que ocorre com o numerador:

Se $f'(x_2) < f'(x_1)$ sabemos que a declividade da curva em $f(x_2)$ é menor que a declividade de $f(x_1)$, como em c temos um valor crítico, temos que concluir que este representa um máximo, visto que os valores estão diminuindo quando são diferentes de c, ou seja, todos os valores decrescem a medida que nos deslocamos no eixo x, portanto f(c) apenas pode assumir o valor mínimo no intervalo.

Temos formas côncavas em todo gráfico que apresenta variações, a derivada segunda também pode nos revelar outra característica interessante quando fazemos seu cálculo e a relacionamos à concavidade em um intervalo da curva... Como a derivada segunda reflete a tendência de crescimento ou decréscimo da declividade, temos como verificar que o seu sinal indica se a concavidade do gráfico é para cima ou para baixo, ou seja:

Se $f''(x) > 0$, a concavidade da curva está voltada para cima.

Devido ao fato de que há uma tendência de crescimento da declividade naquele intervalo.

Se $f''(x) < 0$, a concavidade da curva está voltada para baixo.

Devido ao fato de que há uma tendência de decréscimo da declividade naquele intervalo.

Exemplo:

1) Seja o polinômio $y = 3x^4 – 2x^3 + 4x – 1$. Encontrar a y''.

Solução: Para encontrar a segunda derivada, devemos derivar o polinômio duas vezes.

$$y = 3x^4 – 2x^3 + 4x – 1$$
$$y' = 12x^3 – 6x^2 + 4$$
$$y'' = 36x^2 – 12x$$

2) Seja a função $y = \text{sen } x$, calcule y''.

Solução:

$$y = \text{sen } x$$
$$y' = \cos x$$
$$y'' = – \text{sen } x$$

3.22 Extremos absolutos

Definição: Dizemos que uma função f tem um máximo absoluto em um intervalo I num ponto x_0 se $f(x_0)$ for o máximo de f em I; isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x em I. Analogamente, dizemos que f tem um mínimo absoluto em um intervalo I num ponto x_0 se $f(x_0)$ for o mínimo valor de f em I; isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em I. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto em I, dizemos que f tem em x_0 um extremo absoluto em I.

Teorema do Valor Extremo: Se uma função f for contínua num intervalo fechado finito [a,b], então f tem ambos um máximo e um mínimo absolutos em [a,b] (STEWART, 2006).

Este teorema é um exemplo do que os matemáticos chamam um teorema de existência. Tais teoremas estabelecem condições sob as quais alguma coisa existe, no caso, o extremo absoluto. Entretanto, saber que algo existe é uma coisa, encontrá-lo, porém, é bem diferente. Assim sendo vamos nos dedicar agora ao problema de encontrar o extremo absoluto.

Se f for contínua em um intervalo finito fechado [a,b], então os extremos absolutos de f podem ocorrer em qualquer das duas situações ou nos extremos do intervalo ou dentro do intervalo aberto (a,b). Se os extremos absolutos acontecem dentro, então o teorema a seguir nos diz que eles devem ocorrer nos pontos críticos de f.

Teorema 21: Se f tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a,b), então ele precisa ocorrer em um ponto crítico de f (STEWART, 2006).

Exemplo: Ache os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ no intervalo [1,5] e determine onde eles ocorrem.

Como f é diferenciável, os extremos absolutos ocorrem ou nos extremos do intervalo [1,5] ou em pontos estacionários do intervalo aberto (1,5). Para achar os pontos estacionários precisamos resolver $f'(x) = 0$, que pode ser escrita como:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x, \quad y' = 6x^2 - 30x + 36$$

Se f ' (x) = 0, então $6x^2 - 30x + 36 = 0$, podendo ser escrito na forma $6(x - 3)(x - 2) = 0$. Assim sendo, há pontos estacionários em x = 2 e x = 3. Calculando o valor de f nos extremos e nos pontos estacionários, obtém-se:

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$

$f(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 + 36(1) = 23$

$f(2) = 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) = 28$

$f(3) = 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) = 27$

$f(5) = 2(5)^3 - 15(5)^2 + 36(5) = 55$

Dos quais, concluímos que um mínimo absoluto de f (x) é 23 e ocorrem em x = 1 e o máximo absoluto de f (x) é 55 e ocorrem em x = 5.

3.23 Procedimento para encontrar extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo finito fechado [a,b].

Passo 1 - Encontrar os pontos críticos da função em (a,b).

Passo 2 - Encontrar o valor da função em cada ponto crítico e nos extremos a e b.

Passo 3 - O maior valor no passo2 é o máximo absoluto de f em [a,b] e o menor do valores é o mínimo absoluto.

Exemplo: Determine por inspeção se $P(x) = 3x^4 + 4x^3$ têm extremos absolutos. Se tiver, ache-os e mostre onde eles ocorrem.

Como p(x) tem grau par e o coeficiente dominante é positivo , $p(x) \to +\infty$ quando $x \to \pm\infty$. Desta forma,há um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto. A partir do Teorema de Extremo Absoluto [aplicado ao intervalo $(-\infty,+\infty)$], o mínimo absoluto. Deve ocorrer em um ponto crítico de p. Como p é diferenciável, todos os pontos críticos são estacionários e podemos encontrá-los resolvendo a equação p'(x) = 0. Esta equação é:

$$12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1) = 0,$$

de onde concluímos serem x = 0 e x = -1 os pontos estacionários. Calculando o valor de p nos pontos estacionários, obtém-se:

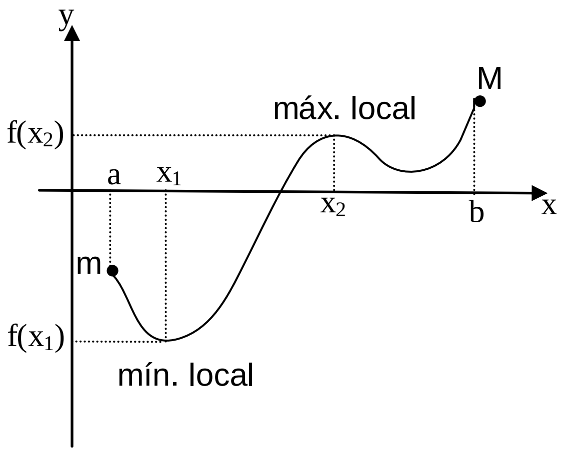
$$p(0) = 0 \text{ e } p(-1) = -1$$

Assim, concluímos que P tem um mínimo absoluto de -1 isto ocorre em x = -1.

3.24 Teorema de Wierstrass

Se uma função f(x) é contínua num intervalo fechado [a,b] e diferenciável em (a,b), então existirão (x_1, x_2) pertence [a,b] tais que ∀ x em [a,b].

De maneira que $f(x_2) \geq f(x) \geq f(x_1)$



Como f(x) é contínua no intervalo [a,b], ela também será limitada neste intervalo [a,b], consequentemente temos:

i) A função f(x) admite ponto de máximo local e um ponto de mínimo local, ambos interiores ao intervalo [a,b].

ii) O ponto de máximo absoluto da função ocorre na extremidade “b” e o ponto de mínimo absoluto ocorre na extremidade “a”.

iii) Simbolicamente

$M = \text{Sup}\ \{ f(x), x \in [a,b] \}$

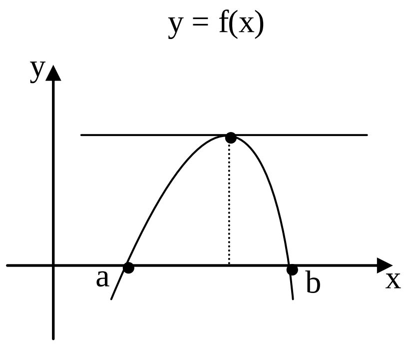
$m = \inf\ \{ f(x), x \in [a,b] \}$

$\forall\ x \in [a,b]$ temos $m \leq f(x) \leq M$

3.25 Teorema de Rolle

Resulta do teorema de Rolle que, se *I* for um intervalo de R e se *f* for uma função derivável de *I* em R, então entre quaisquer dois zeros de *f* há algum zero da derivada. Isto pode ser usado para provar por indução que qualquer polinómio *p*(*x*) de grau *n* com coeficientes reais tem, no máximo, *n* raízes (excepto, naturalmente, no caso do polinómio nulo).

Teorema 22: Se f(x) é definida em [a, b] e diferenciável em (a, b), e se f(a)= f(b)= 0, então existirá pelo menos um ponto c Є (a, b) tal que f'(c)=0.



Este teorema afirma o fato geometricamente óbvio segundo o qual se o gráfico de uma função diferenciável cruza o eixo x em dois pontos, a e b, então entre eles deve existir ao menos um ponto onde a reta tangente é horizontal.

Prova:

Como f é contínua sobre um intervalo fechado e limitado. Se for, então f '(x) = 0 para todo x em [a,b], pois f é constante em (a,b). Assim sendo, para qualquer c em (a,b),

$$f'(c) = 0$$

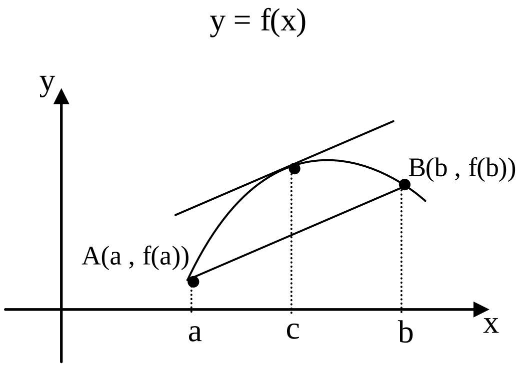
Se f(x) não for zero para todo x em [a,b], então deve existir um ponto x em (a,b) onde f(x) > 0.

Como f é contínua em [a,b], tem-se a partir do Teorema do Valor Extremo que f tem um valor máximo em algum ponto c em [a,b]. Como f(a) = f(b) = 0 e f(x) > 0 em algum ponto em (a,b) o ponto c não pode ser um extremo; ele deve estar em (a,b).

Por hipótese, f é diferenciável em todo (a,b), em particular em c, logo f '(c) = 0 pelo Teorema do Extremo Absoluto.

3.26 Teorema do valor médio

O Teorema de Rolle é um caso especial do Teorema do Valor Médio, o qual afirma que entre dois pontos quaisquer A e B sobre um gráfico de uma função diferenciável, deve haver pelo menos um lugar onde a reta tangente à curva é paralela à reta secante que passa por A e B.



Notando que a inclinação da reta secante que passa pelos pontos A(a , f(a)) e B(b , f(b)) é $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e que a inclinação da reta tangente em c é f'(c), o Teorema do Valor Médio pode ser enunciado mais precisamente como segue.

Teorema 23: Seja f diferenciável em (a, b) e contínua em [a, b], então existe pelo menos um ponto c em (a, b) onde $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Prova: Como a equação da reta secante que passa por (a,f(a)) e (b,f(b)) é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a)$$

ou de forma equivalente

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a) + f(a)$$

a diferença d(x) entre a altura do gráfico de f(x) e o da reta secante é

$$d(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a) + f(a)\right)$$

Como f(x) é contínua em [a,b] e diferenciável em (a,b), d(x) também o é. Além disso,

$$d(a) = 0 \quad e \quad d(b) = 0$$

logo, d(x) satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo [a,b]. Portanto, existe um ponto c em (a,b) tal que d'(c) = 0.

$$d'(x) = f\,'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

assim,

$$d'(c) = f\,'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Portanto, no ponto c em (a,b) no qual d'(c) = 0, temos

$$f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4 INTEGRAÇÃO

Até agora estudamos a parte do cálculo que é voltada para encontrar retas tangentes e taxa de variação que é chamada de cálculo diferencial, enquanto que para cálculos relacionados com áreas temos como auxilio o cálculo integral, veremos a relação que esses dois ramos do cálculo possuem. Mas para isso precisamos de algumas ferramentas que serão vistas a seguir assim como os tópicos anteriores, que em conjunto servirão de base para demonstrarmos o Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona o cálculo diferencial e o cálculo integral.

4.1 Uma visão geral do problema da área

As áreas das figuras planas básicas (quadrado, retângulo, triângulo, círculo, etc.) são encontradas com o auxílio de fórmulas que facilitam a resolução do problema. Entretanto encontrar áreas de regiões planas com contornos curvilíneos torna-se um grande desafio devido à inexistência de uma fórmula pronta. Para resolvermos este enigma é necessário um estudo mais detalhado sobre dois métodos para o cálculo de áreas, o método do retângulo e da antiderivada.

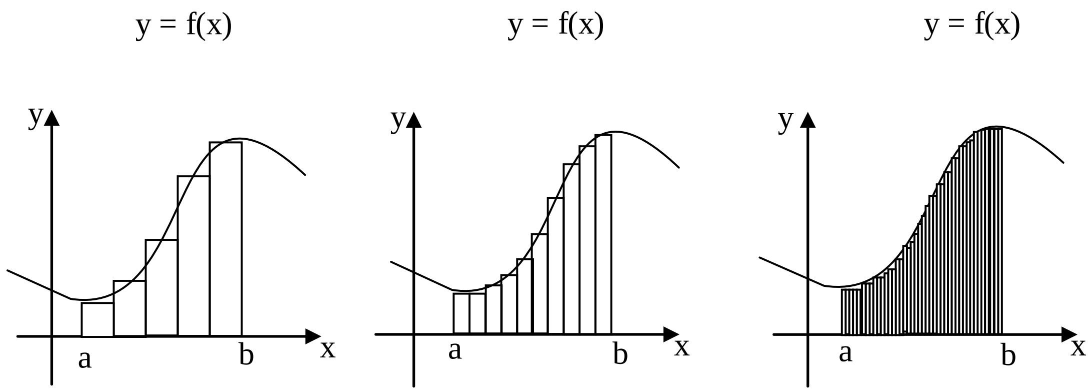
4.1.1 O método do retângulo para o cálculo de áreas

Para o cálculo de áreas de regiões com contornos curvilíneos, existem dois métodos básicos – método do retângulo e da antiderivada. A idéia subjacente do método do retângulo é a seguinte:

- Dividir o intervalo [a,b] em n subintervalos iguais e em cada subintervalo construir um retângulo que se estende desde o eixo x até algum ponto sobre a curva y = f(x), a qual está acima do subintervalo; o ponto particular pode ser o que estiver acima do centro, acima dos extremos ou acima de qualquer outro ponto no subintervalo.

- Para cada n, a área total dos retângulos pode ser vista como uma aproximação à área exata sob a curva no intervalo [a,b]. Além disso, fica intuitivamente evidente que quando n cresce, estas aproximações irão se tornar cada vez melhores e tender à área exata como um limite.

Este procedimento tem uma dupla serventia, como definição matemática e como método de cálculo – podemos definir a área sob a curva y = f(x) e acima do intervalo [a,b] como o limite das áreas dos retângulos aproximantes e usar este mesmo método para aproximar esta área.



Quando n cresce, a área dos retângulos tende à área exata sob a curva.

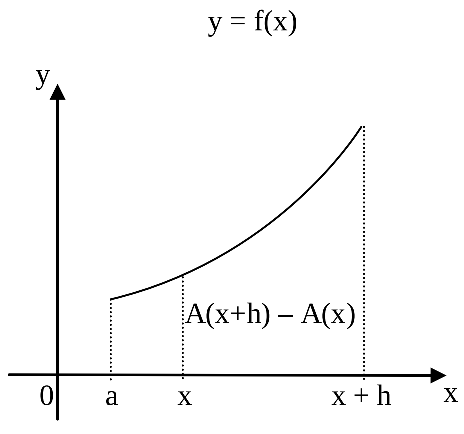
4.1.2 O método da antiderivada para o cálculo de áreas

O método da antiderivada para o cálculo de áreas reflete o gênio de Newton e de Leibniz. Eles sugeriram que, para encontrar a área sob a curva dever-se-ia primeiro considerar o problema mais geral de encontrar a área A(x), sob a curva de um ponto a até um ponto arbitrário x no intervalo [a,b]. Newton e Leibniz descobriram, independentemente, que a derivada da função A(x) é fácil de ser encontrada, logo se for possível encontrar A(x) a partir de A'(x), então a área sob a curva de a até b pode ser obtida substituindo-se x=b na formula da área A(x).

Para ilustrar como isso funciona, vamos começar encontrando

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Por simplificação, consideremos o caso de h > 0, onde A(x+h) – A(x) é a diferença de duas áreas. Se c for o ponto médio entre x e x+h, então esta diferença de áreas pode ser aproximada pela área de um retângulo com base h e altura f(c).



Logo,

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx \frac{f(c).h}{h} = f(c)$$

4.2 Integral definida

Lembrando que, se a função f for contínua e não negativa no intervalo [a,b], então a área sobre o gráfico de f no intervalo [a,b] pode ser obtida ou pelo "método do retângulo" ou "método da antiderivada". Nesse sentido, se faz necessário discutir com mais detalhes o método do retângulo e introduzir o conceito de "integral definida" , a qual liga o conceito de área com outros conceitos importantes, tais como comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho.

- Assim, deve-se definir o que se entende por área de uma região R limitada abaixo pelo eixo x, lateralmente pelas retas verticais x = a e x = b e acima pela curva y = f(x), onde f é contínua não-negativa no intervalo [a,b]. Definiremos a área de um retângulo como sendo um produto de sua largura por seu comprimento e definindo a área de uma região de uma região composta por um número finito de retângulos como sendo a soma das área daqueles retângulos.

A idéia básica é a seguinte:

- Dividir o intervalo [a,b] em n sub-intervalos iguais.
- Em cada subintervalo, construir um retângulo cuja altura é o valor de f em algum ponto do subintervalo.
- A união desses retângulos forma uma região R_n cuja área pode ser vista como uma aproximação da área A da região R.
- Repetir o processo usando cada vez mais um número maior de subdivisões.
- Definir a área de R como sendo o limite das áreas das regiões aproximantes R_n , isto é,

$$A = \text{área } R = \text{limite } [\text{área } (R_n)]$$

Para tornar tudo isso mais preciso, será benéfico captar este procedimento em notação matemática. Neste sentido, suponha que o intervalo [a,b] tenha sido dividido em n subintervalos, inserindo-se n – 1 pontos igualmente espaçados entre a e b, seja x_1, x_2, ..., x_{n-1} extremos desses subintervalos, onde cada subintervalo tem um comprimento de (b–a)/n, o qual é costume denotar por: $\Delta x = (b-a)/n$. Em cada subintervalo precisamos escolher um ponto no qual a função f deve ser calculada para determinar a altura do retângulo no intervalo. Se denotarmos estes pontos por x'_1, x'_2, ..., x'_n, então as áreas dos retângulos construídos sobre estes intervalos serão

$f(x'_1)\Delta x$, $f(x'_2)\Delta x$, ..., $f(x'_n)\Delta x$ e a área total da região R_n será área(R_n) = $f(x'_1)\Delta x$, $f(x'_2)\Delta x$, ..., $f(x'_n)\Delta x$ ou usando somatório área (R_n) = $\sum_{k=1}^{n} f(x'_k)\Delta x$.

4.2.1 Propriedades das integrais definidas

Quando definimos a integral definida $\int_a^b f(x)dx$, implicitamente assumimos que a < b. Mas a definição como o limite de somas de Riemann faz sentido mesmo que a > b. Observe que se invertermos a e b, então Δx mudará de (b – a)/n para (a – b)/n. Portanto

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Se a = b, então $\Delta x = 0$, e

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

Vamos desenvolver agora algumas propriedades básicas das integrais que nos ajudarão a calcular as integrais de uma forma mais simples. Vamos supor que f e g sejam funções contínuas.

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, onde c é qualquer constante

Prova:

Esta propriedade estabelece que a integral de uma função constante f(x) = c é a constante vezes o comprimento do intervalo. Se c > 0 e a < b, isto é esperado, pois o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x e área compreendida entre a função e o eixo x limitado lateralmente pelos extremos, é um retângulo onde sua área é o produto de suas dimensões.

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Esta propriedade estabelece que a integral de uma soma é a soma das integrais. Para as funções positivas isso estabelece que a área sob f + g é a área sob f mais a área sob g.

Prova:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)dx + g(x_i)dx]\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)dx\Delta x \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)dx\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3. $\int_a^b c\, f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$, onde c é qualquer constante

Esta propriedade pode ser provada de forma análoga estabelece que a integral de uma constante vezes uma função é a constante vezes a integral da função. Em outras palavras, uma constante (mas somente uma constante) pode ser colocada na frente de um sinal de integração.

Prova:

$$\int_a^b c\, f(x)dx = \int_a^b c \,.\, \int_a^b f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)\ dx$

Prova: usando c = – 1

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [f(x) + (-1)\, g(x)]dx$$

$$= \int_a^b [f(x) + cg(x)]dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)dx + cg(x_i)dx]\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx\Delta x + \sum_{i=1}^{n} cg(x_i)dx\Delta x \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} cg(x_i)dx\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b cg(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx + c\int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx + (-1)\int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

5 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre dois ramos do cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Segundo George (2002) o Cálculo Diferencial surgiu da resolução do problema da reta tangente, enquanto que o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o cálculo de áreas. Foi Isaac Barrow (1630-1677), professor de Newton em Cambridge, quem descobriu que esses dois problemas estão de fato estreitamente relacionados. Ele percebeu que a diferenciação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo permite expressar de maneira precisa a relação inversa existente entre a derivada e a integral. Foram Newton e Lebniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático. Em particular, eles perceberam que o Teorema Fundamental permitia calcular áreas através das integrais, tendo em vista uma maior praticidade dos cálculos, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas.

5.1 Definição: Partição de um Intervalo

Uma partição P de um intervalo fechado [a, b] é um conjunto finito de pontos

$P = \{ x_0, x_1, x_2..., x_n\}$ tais que , $a = x_0 < x_1 < x_2 <... < x_{n-1} < x_n = b$.

A diferença máxima entre todos os dois pontos consecutivos da partição é chamada de norma ou tamanho da partição e é denotada como $| P |$, isto é,

$$| P | = máximo \{ x_j - x_{j-1} , j = 1... n \}$$

Um refinamento da partição P é uma outra partição P’ que contém todos os pontos de P e alguns pontos adicionais, ou seja, $| P' | \leq | P |$

5.2 Definição: Somas de Riemann

Se P = *{ x_0, x_1, x_2..., x_n}* é uma partição do intervalo fechado *[a, b]* e **f** é uma função definida nesse intervalo, então **a soma de Riemann de *f* com respeito a partição P** é definida como:

onde t_j é um número arbitrário no intervalo *[x_{j-1} , x_j]*.

Observação: Se a função *f* for positiva, a interpretação geométrica da soma de Riemann corresponde ao somatório das áreas dos retângulos com base medindo x_j - x_{j-1} e altura *f*(t_j).

5.3 Definição: Soma Superior e Soma Inferior

Seja *P = {* x_0, x_1, x_2, ..., x_n*}* uma partição do intervalo fechado *[a, b]* e *f* uma função limitada definida nesse intervalo.

- **a soma inferior** *de f, denotada por P* é definida como :

$s(f, P) \sum_{j=1}^{n} m_j.(x_j – x_{j-1})$ onde m_j é o ínfimo *da f(x)* no intervalo [x_{j-1}, x_j], ou seja, m_j.= inf { f(x); x $\in$ [x_{j-1} – x_j]}.

- **a soma superior** *de f, denotada por P* é definida como:

$S(f, P) \sum_{j=1}^{n} M_j.(x_j – x_{j-1})$ onde M_j é o supremo da f(x) no intervalo [x_{j-1}, x_j], ou seja, M_j.= sup { f(x); x $\in$ [x_j – x_{j-1}]}.

Aqui está um exemplo onde a soma inferior é representada pela Figura 1 e a soma superior pela Figura 2.

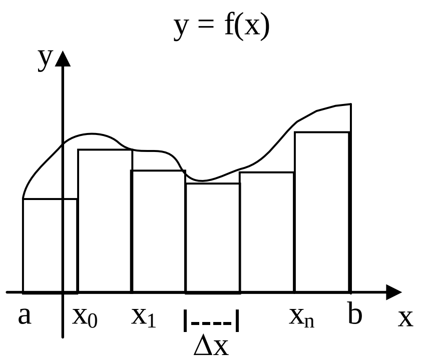


Figura 1

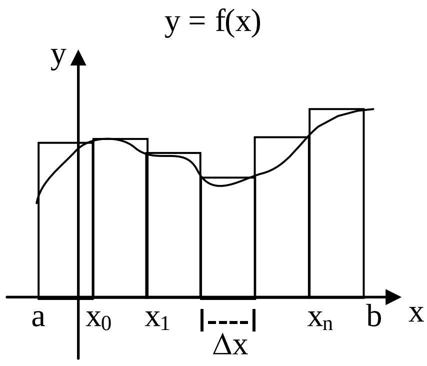


Figura 2

Observa-se que se f é uma função limitada, então existem números reais m e M tais que:

$$m = \inf \{f(x);\, x \in [a,b]\}\ , \qquad M = \sup \{f(x);\, x \in [a,b]\}$$

Ou seja,

$$m \le f(x) \le M,\ \forall\ x \in [a,b]$$

Onde

$$m \le m_j \le M_j \le M,\ \forall\ j = 1 \ldots n$$

Encontramos que

$$m(b - a) \le s(f, P) \le S(f, P) \le M(b - a)$$

5.4 Formalização

Formalmente, o Teorema Fundamental do Cálculo diz o seguinte:

Se f é uma função contínua de valores reais definida em um intervalo fechado [a,b] e F for a função definida por;

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$\forall$ x $\in$ [a,b],então F'(x) = f(x), para todo x em [a,b].

Se f é uma função contínua de valores reais definida em um intervalo fechado [a,b] e se F é uma função tal que F'(x) = f(x) para todo x em [a,b], então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x_2) - F(x_1);\ \forall\ x_1 \text{ e } x_2 \in [a,b].$$

Para demonstrarmos estas partes do Teorema Fundamental do Cálculo, usaremos como artifícios o Valor das Somas de Riemann, a definição de derivadas, valores mínimo e máximo absoluto, definição de limites e o teorema do valor médio.

5.5 Prova

5.5.1 Parte I

É dado que:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Considere dois números x_1 e $x_1+\Delta x$ em [a,b]. Então temos:

$$F(x_1) = \int_a^x f(t)\,dt$$

e

$$F(x_1+\Delta x) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$$

Subtraindo as duas equações e usando a definição de integral do capítulo 4, temos

$$F(x_1+\Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt \qquad (1)$$

$$= \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$$

ou seja,

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt \qquad (2)$$

Dividindo (2) por Δx, obtemos

$$\frac{F(x_1+\Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \qquad f(t)\,dt \qquad (3)$$

Assumiremos que $\Delta x>0$. Uma vez que f é contínua em $[x_1, x_1+\Delta x]$, o Teorema do Valor Extremo estabelece que há números y e z em $[x_1, x_1+\Delta x]$ tal que $f(y) = m$ e $f(z) = M$, onde m e M são valores mínimos e máximos absolutos de f em $[x_1, x_1+\Delta x]$.

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\int_{x1}^{x1+\Delta x} m\,dx \leq \int_{x1}^{x1+\Delta x} f(x)\,dx \leq \int_{x1}^{x1+\Delta x} M\,dx$$

$$\int_{x1}^{x1+\Delta x} f(y)\Delta x \leq \int_{x1}^{x1+\Delta x} f(x)\,dx \leq \int_{x1}^{x1+\Delta x} f(z)\Delta x$$

Dividindo a inequação por Δx, tem-se

$$f(y) \leq \frac{1}{\Delta x}\int_{x1}^{x1+\Delta x} f(x)\,dx \leq f(z)$$

Usando (3) na inequação anterior

$$f(y) \leq \frac{F(x_1+\Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} \leq f(z)$$

Ao usarmos $\Delta x \to 0$, temos que $y \to x$ e $z \to x$, pois y e z estão entre o intervalo x e $x+\Delta x$. Então

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(y) = \lim_{y \to x} f(y) = f(x) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} f(z) = \lim_{z \to x} f(z) = f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(y) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1+\Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to 0} f(z)$$

$$f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1+\Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} \leq f(x)$$

temos

$$\lim \frac{F(x_1+\Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(x)$$

Concluímos que

$$F'(x) = f(x)$$

que completa a prova.

5.5.2 Parte II

Considere f contínua no intervalo [a,b] e F a antiderivada de f. Comece com a quantidade F(b) – F(a).

Considere os números x_1 a x_n tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Que leva a $F(b) – F(a) = F(x_n) – F(x_0)$.

Agora somamos cada $F(x_i)$ juntamente com sua inversa aditiva, de forma que a quantidade resultante é igual a:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) + [- F(x_{n-1}) + F(x_{n-1})] + \ldots + [- F(x_1) + F(x_1)] - F(x_0)]$$

$$= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + \ldots + [F(x_1) - F(x_0)]$$

A quantidade acima pode ser escrita como a seguinte soma:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [\, F(x_i) - F(x_{i-1})] \qquad (1)$$

Aqui, aplicaremos o Teorema do Valor Médio, como visto anteriormente.

Segue que $\exists$ c $\in$ (a,b)

$$F'(c)\,(b - a) = f(b) - f(a)$$

A função f é diferenciável no intervalo [a,b]; logo, f também é diferenciável em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Logo, de acordo com o Teorema do valor Médio, acima, para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i)$ $\exists$ c_i tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

Substituindo a equação acima em (1), temos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [\, F'(c_i)(x_i - x_{i-1})]$$

onde, $[x_i - x_{i-1}]$ pode ser expressado como Δx de partição i.

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [\, F'(c_i)(\Delta x_i)] \qquad (2)$$

Admitindo limite em ambos os lados de (2), teremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\, f(c_i)(\Delta x_i)]\, dx$$

Nem F(b) nem F(a) são dependentes de Δx, então o limite do lado esquerdo fica F(a) – F(b).

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\, f(c_i)(\Delta x_i)]\, dx$$

A expressão do lado direito da equação define a integral ao longo de f de a até b. Logo obtemos

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

que completa a prova.

6 INTEGRAL INDEFINIDA

Na segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo encontramos um método muito eficiente para calcular a integral definida de uma função desde que possamos encontrar uma antiderivada da função, apesar da antiderivada não ser única, ela admite uma única forma, dependente apenas da constante C. Isto nos permite procurar a função original se conhecemos sua derivada, pois encontrando uma antiderivada, encontramos todas, bastando somar uma constante arbitrária C. O processo de encontrar todas as antiderivadas de uma função é denominado antidiferenciação ou integração. Vamos introduzir uma notação para a integração, a fim de facilitar sua escrita.

$$F'(x) = f(x)$$

então integrando-se (ou antidiferenciando-se) f(x), obtém-se as antiderivadas F(x)+C. Denotamos isto escrevendo

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Prova:

Sejam,

$F(x)$ e $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$

e consideremos

$$H(x) = G(x) – F(x).$$

Então,

$H'(x) = G'(x) – F'(x)$, mas $G'(x) – F'(x) = f(x) – f(x)$,

logo,

$$H'(x) = 0.$$

Pelo teorema do valor médio para derivadas, H(x) deve ser constante, digamos $H(x) = C$. Assim, da equação que define H(x), temos que

$$G(x) = F(x) + C ,$$

ou seja,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

O “s alongado” que aparece no lado esquerdo é chamado de sinal de integração ou uma integral indefinida, a função f(x) é chamada de integrando e a constante C é chamada de constante de integração. Você deve ler a equação como à integral de f(x) em relação a x é igual a F(x)+C”. O adjetivo “indefinida” enfatiza que o processo de integração não produz uma função definida, mas em vez disso um conjunto de funções.

Os símbolos dx nas operações de diferenciação e antidiferenciação,

$$\frac{d}{dx}[\ ] \quad e \quad \int [\ ]dx\ ,$$

servem para identificar a variável independente. Se outra variável independente que não seja x for usada, digamos t, a notação precisa ser ajustada apropriadamente. Desta forma,

$$\frac{d}{dt}[F(t)] = f(t) \quad e \quad \int f(t)dt = F(t) + C\ ,$$

são afirmativas equivalentes.

O processo de encontrar antiderivadas é chamado de antidiferenciação ou integração. Assim se

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

6.1 Propriedades da integral indefinida

Pela parte 1 do teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

F'(x) = f(x)

também denotado por

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

Este resultado é de grande auxílio na prova das seguintes propriedades básicas de antiderivadas.

Teorema 24:

a) Uma constante pode se mover através do sinal de integração: isto é,

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

Prova:

$$\frac{d}{dx}\left(c\int f(x)dx\right) \quad c\,\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = cf(x)$$

b) Uma antiderivada de uma soma é a soma das antiderivadas; isto é,

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Prova:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) + \frac{d}{dx}\left(\int g(x)dx\right) = f(x) + g(x)$$

c) Uma antiderivada de uma diferença é a diferença das antiderivadas; isto é,

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

Prova: onde c = -1, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx + \int c\, g(x)dx\right) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) + \frac{d}{dx}\left(c\int g(x)dx\right) &= f(x) + cg(x)\\ &= f(x) + (-1)g(x)\\ &= f(x) - g(x)\end{aligned}$$

Exemplo:

1) Ache a integral indefinida de cada item abaixo.

a) $\int (2x - 5)\, dx = \int 2x\, dx - \int 5\, dx = x^2 - 5x + C$

b) $\int (3x^2 + \cos x)\, dx = \int 3x^2\, dx + \int (\cos x)\, dx = x^3 + \text{sen } x + C$

c) $\int e^x \, dx = e^x$

d) $\int 1/x \, dx = \ln |x| + C$

e) $\int e^x + 3/x \, dx = \int e^x \, dx + \int 3/x \, dx = e^x + \ln |3x| + C$

6.2 Integração por substituição

O método da substituição pode ser motivado examinando-se a regra da cadeia do ponto de vista da antidiferenciação. Com este propósito, suponhamos F uma antiderivada de f e seja g um função diferenciável. A derivada de F(g(x)) pela regra da cadeia pode ser expressa como

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\, g'(x)$$

e a forma integral pode ser escrita como

$$\int F'(g(x))\, g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

ou ainda,uma vez que F é uma antiderivada de f,

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Para o nossos propósitos, será útil fazer u = g(x) e escrever du/dx = g'(x) na forma diferencial du = g'(x)dx. Com esta notação, temos

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Este processo de cálculo com a substituição u = g(x) e du = g'(x)dx é chamado de método da substituição u.

Exemplo: Calcule $\int (x^2+1)^{50}.2x \, dx$

Solução: Usando $u = x^2+1$, então $du/dx = 2x$, o que indica ser $du = 2xdx$. Assim, a integral dada pode ser escrita como

$$\int (x^2+1)^{50}.2x\,dx = \int u^{50}du = \frac{u^{51}}{51} + C = \frac{(x^2+1)^{51}}{51} + C$$

CONCLUSÃO

A matemática como ciência exata, veio sendo aperfeiçoada ao longo do tempo e de acordo com cada período da história. Em um desses períodos, matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Leibniz, após anos de estudos e interpretações meticulosas desenvolveram o Teorema Fundamental do Cálculo.

Esse Teorema foi uma grande descoberta por volta do século XVII, como forma de aprimoramento do cálculo integral e diferencial, e que permitia expressar de maneira precisa o cálculo de áreas que apresentavam contornos curvilíneos.

Atualmente podemos observar a grande importância do referido teorema, pois ele é utilizado tanto no seguimento da Arquitetura quanto da Engenharia, como forma de agilizar o trabalho de profissionais na elaboração de áreas e volumes que necessitam de um detalhamento específico.

Observamos a praticidade do teorema em comparação com outros métodos utilizados, principalmente com o método da exaustão, visto que este além de ser desgastante não proporcionava um cálculo tão preciso como o Teorema Fundamental do Cálculo, porém Riemann usando limites encontrava um resultado preciso, no entanto necessitava-se de muita habilidade e atenção características estas, proporcionadas pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MAURER, Willie A., **Curso de cálculo diferêncial e integral.** Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo-SP.

THOMAS, George B. (2002). Addison Wesley Brasil, 10ª edição, **2 vols. Cálculo**

RIVERA. Jaime E. Muñoz. **Cálculo diferêncial e equações diferenciais.** Editora UFRJ. 2004

RIVERA. Jaime E. Muñoz. **Cálculo diferêncial e equações diferenciais.** Editora UFRJ.2006

ANTON. Howard. **Cálculo um novo horizonte**, 6ª edição, volume 1. Editora Artes Médicas Sul Ltda. São Paulo-SP.

STEWART,James. **Cálculo, 5ª edição, volume 1. Ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006.**

www.ementadecalculoI.mht

www.somatematicacom.br/limiteslateraisecontinuidade2.mht

http://pt.wikipedia.org/wiki/teorema_fundamental_do_c%c3%allculo

http://ecalculo.if.usp.br/integrais/teo_fund_calculo/teo_fund_calculo.htm

http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubooks/tomas_br/chapter1/medialib/custom3/topics/fundamental.htm