UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Joabe de Deus Souza Silva

Teorema de Euler e Poliedros de Platão, Pappus-Guldin e Aplicações

MACAPÁ-AP
2016

Joabe de Deus Souza Silva

Teorema de Euler e Poliedros de Platão, Pappus-Guldin e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Kelmem da Cruz Barroso

MACAPÁ-AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

511
S586t Silva, Joabe de Deus Souza.
Teorema de Euler e Poliedros de Platão, Pappus-Guldin e aplicações / Joabe de Deus Souza Silva; orientador, Kelmem da Cruz Barroso. -- Macapá, 2016.
76 p.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Poliedros. 2. Geometria. I. Barroso, Kelmem da Cruz, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

Joabe de Deus Souza Silva

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como pré-requisito para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

AVALIADORES

Orientador: Prof. Me. Kelmem da Cruz Barroso
UNIFAP

Membro: Prof. Dr. Guzmam Eulálio Isla Chamilco
UNIFAP

Membro: Prof. Me. Caroline Lima de Souza
UNIFAP

Macapá, 22 de Setembro de 2016

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me guiado nessa jornada, onde com sua glória me deu forças para lutar por um sonho e não me deixar desistir. Agradeço também a minha família, em especial a minha mãe, guerreira e batalhadora, que sempre do início até o fim dessa caminhada, nunca deixou de me ajudar e lutar para que eu alcançasse e chegasse até aqui, então dedico a ela esse trabalho em mostra da minha gratidão e enfim agradeço aqueles que sempre me deram uma força e umas palavras motivadoras, que me ajudaram grandemente em conquista desse resultado.

(Joabe de Deus Souza Silva)

“ Ser forte e corajoso; não temas, nem te espantes, porque o Senhor, teu Deus, é contigo por onde quer que andares.”

(Josué 1,9)

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso apresenta um breve estudo sobre geometria espacial. Serão abordados os poliedros a partir do qual demonstraremos cinco teoremas, que são: Teorema de Euler, que consiste na contagem de vértices, arestas e faces. Poliedros Regulares, que consiste na verificação de que existe apenas cinco poliedros regulares. Teorema maluco do paralelepípedo, que consiste no cálculo da diagonal e da área total do mesmo. Os dois seguintes Teoremas são aplicadas no conteúdo de superfície e sólidos de revolução.Teorema 1 de Pappus-Guldin, que consiste no cálculo da área de uma superfície gerada por uma linha plana fechada ou aberta. Teorema 2 Pappus-Guldin, que consiste no cálculo do volume de um sólido gerado por uma rotação de uma superfície

Palavras-Chave: Teoremas. Poliedros. Superfície e sólido de Revolução.

ABSTRACT

This course conclusion work presents a brief study of spatial geometry . polyhedra will be addressed from which demonstrate five theorems , which are : Euler 's theorem , which is the vertex count , edges and faces .Regular polyhedra , which consists of verifying that there is only five regular polyhedra . Theorem nut parallelepiped which consists in calculating the diagonal , and the total area thereof . The following two theorems are applied to the surface and solids content of revolução.Teorema 1 - Pappus Guldin that consists in calculating the area of a flat surface generated by a line open or closed.Theorem 2 - Pappus Guldin that consists in calculating the volume of a sound generated by a rotation of a surface

Keywords:Theorems . Polyhedra . Revolution surface and solid.

LISTA DE FIGURAS

1.1 O ponto A 13

1.2 Os pontos A, B e C são colineares. 14

1.3 Os pontos D, E e F não são colineares. 14

1.4 A reta r 14

1.5 Posições da reta 15

1.6 Concorrentes 15

1.7 Retas Paralelas 15

1.8 Segmento de reta 16

1.9 O plano α 16

1.10 Teorema 1.1 17

1.11 Teorema 1.2 18

1.12 Teorema 1.3 18

1.13 Dois semi-espaços 18

1.14 Representação dos Ângulos 19

1.15 Ângulo interno e outro externo 19

1.16 Exemplo de Polígonos comuns 20

1.17 Exemplo de Diagonais 20

1.18 Triângulo 21

1.19 Vértices, lados e ângulos. 21

1.20 Semelhança de triângulos 22

1.21 Exemplo de triângulos semelhantes 22

1.22 Mediana 22
1.23 Baricentro 23
1.24 Triângulo retângulo 23
1.25 Elementos do triângulo 24
1.26 Quadrilátero 24
1.27 Retângulo 25
1.28 Quadrado 25
1.29 Área do quadrado 25
1.30 Circunferência 26
1.31 Elementos da Circunferência 26

2.1 Vértice, Aresta e Face. 27
2.2 Um poliedro convexo e um não convexo 28
2.3 Representação do Gênero das faces 29
2.4 Representação do Gênero dos vértices 29
2.5 Superfície aberta e uma fechada 31
2.6 Superfície fechada se tornando aberta 31
2.7 Quantidade de aresta igual a de vértice 32
2.8 Acréscimo de face 33
2.9 Tetraedro e sua planificação 36
2.10 Octaedro e sua planificação 36
2.11 Icosaedro e sua planificação 37
2.12 Hexaedro e sua planificação 37
2.13 Dodecaedro e sua planificação 38
2.14 Os cincos poliedros regulares 38
2.15 Prisma 39
2.16 Os três tipos de arestas 40
2.17 Diagonal da face 41

2.18 Diagonal do cubo 41
2.19 Triângulo formado 41
2.20 Volume do cubo 43
2.21 Paralelepípedo reto retângulo 43
2.22 Diagonais das faces 44
2.23 Diagonal do paralelepípedo 44
2.24 Os três tipos de arestas 44
2.25 Diagonais d_1 d_2 45
2.26 Diagonal do paralelepípedo 45
2.27 Área da base 46
2.28 Áreas laterais 47
2.29 Área total 48
2.30 Volume paralelepípedo 48

3.1 Rotação de uma linha 52
3.2 Linha fechada e linha com seus extremos no eixo 52
3.3 Centro de gravidade do bordo 53
3.4 Cone reto 54
3.5 Cone aberto 54
3.6 Arco traçado 54
3.7 segmento e eixo 55
3.8 Projeção do segmento 56
3.9 Linha poligonal 57
3.10 Poligonal plana 58
3.11 Área lateral gerada pela rotação 59
3.12 Retângulo 60
3.13 Triângulo pendurado pelo vértice A 61
3.14 Experimentos e o resultado 61

3.15 Triângulos traçados no polígono 63
3.16 Centro de gravidade do retângulo 63
3.17 Retângulo e o eixo 65
3.18 Figura plana e o eixo 66
3.19 Polígono retângular 67
3.20 Rotação do triângulo 68

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **10**

1 Preliminares **13**

1.1 Ponto 13

1.2 Reta 14

1.2.1 Posições da reta: 14

1.2.2 Segmento de reta 15

1.3 Plano 16

1.3.1 Determinação de um plano 16

1.4 Ângulos 18

1.5 Polígonos 19

1.5.1 Triângulo 20

1.5.2 Triângulo retângulo: 23

1.5.3 Quadrilátero 24

1.5.4 Circunferência 26

2 Geometria espacial **27**

2.1 Poliedros 28

2.1.1 As primeiras relações 28

2.1.2 Duas desigualdades 30

2.1.3 Superfície poliédricas abertas e fechadas 31

2.2 Teorema de Euler 32

2.3 Poliedros Regulares 35
2.4 Uma aplicação do teorema 2.2 de Euler 38
2.5 Teorema maluco do paralelepípedo uma coincidência numérica. 39
2.5.1 Prisma: 39
2.5.2 Cubo ou hexaedro: 40
2.5.3 Diagonal da face: 40
2.5.4 Diagonal do cubo: 41
2.5.5 Área lateral e Área total: 42
2.5.6 Volume do cubo: 42
2.5.7 Paralelepípedo reto retângulo: 43
2.5.8 Diagonais das faces: 43
2.5.9 Diagonal do paralelepípedo: 44
2.5.10 Área da base: 46
2.5.11 Áreas laterais: 46
2.5.12 Área total: 47
2.5.13 Volume: 48
2.6 Teorema maluco do paralelepípedo. 48
2.6.1 Uma aplicação do teorema maluco do paralelepípedo. 49

3 Teoremas de Pappus-Guldin **51**
3.1 Superfície e Sólido de revolução. 51
3.1.1 Área lateral do cone reto de raio R e geratriz g 54
3.1.2 Área lateral de um Tronco de cone. 55
3.2 Teorema 1 de Pappus-Guldin. 57
3.2.1 Uma aplicação do teorema 1 de Pappus-Guldin 59
3.3 Centro de Gravidade de um Polígono. 60
3.4 A Rotação de um Retângulo. 64
3.5 Teorema 2 de Pappus-Guldin 66

3.5.1 Uma aplicação do teorema 2 de Pappus-Guldin. 68

CONSIDERAÇÕES FINAIS **70**

BIBLIOGRAFIA **71**

INTRODUÇÃO

Este trabalho é baseado no estudo de geometria espacial envolvendo os assuntos sobre, poliedros,superfícies e sólidos de revolução e alguns teoremas, sendo que no primeiro capítulo se aborda algumas noções e propriedades do plano, onde é usado como requisito nos capítulos sucessores, tento influência direta e indireta sobre os conteúdos e demonstrações.

No segundo capítulo damos início ao estudo da geometria espacial, onde começamos uma breve abordagem nos elementos mais simples, como vértice, face e aresta, logo após entramos definitivamente no mundo maravilhoso da geometria espacial e começamos a viagem pelos poliedros, e então que nos familiarizamos com os poliedros, conhecemos um certo e curioso teorema, chamado teorema de Euler, onde esse teorema descreve que $V - A + F = 2$. Vamos conhecer um pouco sobre a vida de Euler, Leonhard Euler foi o mais importante matemático nascido na suíça (1707-1783), onde nasceu em Basiléia. O pai de Euler era um ministro religioso que, como o pai de Jacques Bernoulli, esperava que seu filho seguisse o mesmo caminho. Porém o jovem estudou com Jean Bernoulli e se associou com seus filhos, Nicolaus e Daniel, e através deles descobriu sua vocação. O pai de Leonhard Euler também tinha conhecimentos de matemática, tendo sido aluno de Jacques Bernoulli, e ajudou a instruir seu filho nos rendimentos do assunto, apesar de sua esperança de que Leonhard Euler seguiria carreira teológica. De qualquer modo o jovem recebeu instrução ampla, pois ao estudo da matemática somou teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Euler foi chamado para a academia como membro da secção de medicina e fisiologia, Euler em 1730 veio a ocupar a cadeira de filosofia natural em vez da de medicina. Quando Euler tinha vinte e seis anos, tornou-se o principal matemático da academia e daí por diante aconteceu vários fatos, e Euler cresceu cada vez mais em sua carreira.

Continuando o estudo sobre poliedros, conhecemos os poliedros regulares e sua demonstração, onde mostra que existe apenas cinco poliedros regulares, conhecidos como sólido platônicos, embora o próprio Platão não tenha dado contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época e guiava e inspirava seu desenvolvimento. Sobre as portas de sua escola lia-se “Que

ninguém que ignora a geometria entre aqui"; seu entusiasmo pelo assunto fez com que se tornasse conhecido não como matemático mas como "o criador de matemáticos". É claro que a alta opinião que tinha da matemática, Platão não recebeu de Sócrates; na verdade, os primeiros diálogos platônicos raramente mencionam a matemática. Quem converteu Platão a uma visão matemática foi certamente Arquitas, um amigo a quem ele visitou na Sicília em 388 a.c. Talvez tenha sido aqui que soube dos cincos sólidos regulares, que eram associados aos quatro elementos de Empédocles num esquema cósmico que fascinou os homens por séculos. Talvez a veneração dos pitagóricos pelo dodecaedro tenha sido o que levou Platão a considerá-lo, o quinto e último sólido regular, como um símbolo do universo. Platão pôs suas ideias sobre os sólidos regulares num diário logo intitulado Timaeus, presumivelmente do nome de um pitagórico, que serve como principal interlocutor. Não se sabe se Timaeus de Locri realmente existiu ou se Platão o inventou como um personagem através do qual enunciou as ideias pitagóricas que ainda eram influentes no que hoje é o sul da Itália. Os poliedros regulares frequentemente foram chamados corpos cósmicos ou sólidos platônicos devido à maneira pela qual Platão e Timaeus os aplicou à explicação de fenômenos científicos. Embora esse diálogo, escrito provavelmente quando Platão estava perto dos setenta anos, seja a mais antiga evidência definida da associação dos quatro elementos com os sólidos regulares, muito dessa fantasia deve-se aos pitagóricos. Após a demonstração dos poliedros regulares, conhecemos o teorema maluco do paralelepípedo, que é de grande importância se conhecer, pois a muitos problemas que só conseguimos resolver se conhecemos o teorema maluco.

No último capítulo damos início ao estudo de superfícies e sólidos de revolução, e conhecemos dois importantíssimos teoremas, onde consiste no cálculo de área e volume dos sólidos gerados por rotação de uma linha aberta ou fechada. Os teoremas são dois, o teorema 1 de Pappus-Guldin consiste no cálculo de área, e o teorema 2 de Pappus-Guldin consiste no cálculo de volume. Pappus provavelmente viveu e ensinou em Alexandria entre o final do século III e a primeira metade do século IV, conforme se deduz de comentário seu sobre o Almagesto, em que cita como episódio recente um eclipse do sol ocorrido no ano 320. Dentre suas obras, apenas uma restou até nossos dias: a Coleção Matemática, em oito livros, dos quais o primeiro e parte do segundo se perderam.

Predominantemente uma obra de geometria, a grande importância da Coleção Ma-

temática se assenta em três razões principais. Uma delas se traduz nas preciosas informações históricas que inclui sobre a matemática grega; a outra, na tentativa de tornar mais acessível a geometria grega já conhecida, mediante novas demonstrações e lemas explanatórios; a última é a própria contribuição original de Pappus, bastante significativa. Um dos resultados de maior alcance deixados por Pappus é conhecido hoje como teorema de Guldin- em homenagem a P. Guldin, que o redescobriu no século XVII. Esse teorema assegura que, se uma reta e uma curva fechada são coplanares e não se interceptam, o volume do sólido obtido girando-se a superfície delimitada pela curva em torno da reta é igual ao produto da área dessa superfície pelo comprimento da trajetória de seu centro de gravidade.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo vamos expor algumas noções e propriedades do plano que precisaremos para entender os assuntos adiante, mas não será demonstrado nada nesse capítulo, o leitor que se interessar em saber mais pode encontrar nos seguintes livros "Fundamentos de matemática elementar geometria plana e espacial".

1.1 Ponto

Antes de conhecermos a noção de ponto, vamos ver o significado de tamanho e dimensão.

Tamanho: significa largura, comprimento e altura.

Dimensão: significa extensão, tamanho, grandeza.

Noção: O ponto não tem tamanho e também não tem dimensão, o simples toque com a ponta do lápis no papel nos dá a ideia de um ponto.

Notação de ponto: A indicação de ponto se dá através de letras maiúsculas do nosso alfabeto: $A, B, C, \ldots, Z$.

Notação gráfica:

Figura 1.1: O ponto A

Pontos colineares: Dados dois ou mais pontos dizemos que eles são colineares quando eles pertencem a uma mesma reta.

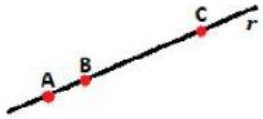

Figura 1.2: Os pontos A, B e C são colineares.

Figura 1.3: Os pontos D, E e F não são colineares.

1.2 Reta

Noção: A reta tem tamanho somente em uma direção e tem somente uma dimensão, a reta é formada por infinitos pontos.

Notação de reta: A indicação de reta se dá através de letras minúsculas do nosso alfabeto: $a, b, c, \ldots, z$.

Notação gráfica:

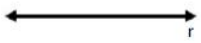

Figura 1.4: A reta r

1.2.1 Posições da reta:

Podemos construir uma reta em três posições: horizontal, vertical ou inclinada.

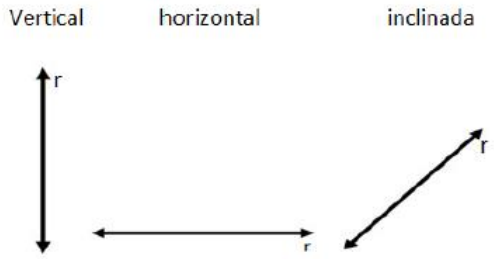

Figura 1.5: Posições da reta

Duas ou mais retas podem ter as seguintes posições:

1.2.1.1 Retas Concorrentes

Retas concorrentes se cruzam, e logo possuem um ponto em comum.

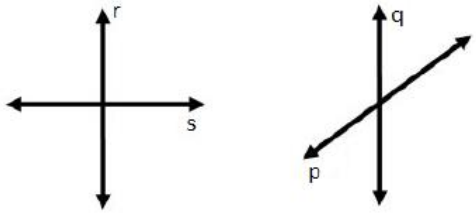

Figura 1.6: Concorrentes

1.2.1.2 Paralelas

As retas paralelas não se cruzam, logo não possuem ponto em comum.

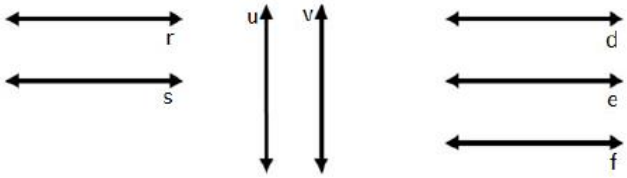

Figura 1.7: Retas Paralelas

1.2.2 Segmento de reta

Definição 1.1 *Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.*

Figura 1.8: Segmento de reta

$$\overline{AB} = [A, B] \cup \{x/x \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

Os pontos A e B são extremidades do segmento $\overline{AB}$ e os pontos que estão entre A e B são pontos internos do segmento $\overline{AB}$.

1.3 Plano

Noção: O plano tem tamanho em duas direções e tem duas dimensões, se olharmos uma folha de papel, teremos a noção de um pedaço de um plano, se esse papel fosse gigantesco, não tivesse fim e nem começo em qualquer lado que olhássemos, teríamos a ideia de um plano, o plano é formado por infinitos pontos.
Notação de plano: A sua indicação se dá através de letras minúsculas do alfabeto grego:α(Alpha), β(Beta), γ(Gama),. . . ,ω(Omega).
Notação gráfica:

Figura 1.9: O plano α

1.3.1 Determinação de um plano

Existem quatro modos de determinar planos.

1. modo: por três pontos não colineares.
2. modo: por uma reta e um ponto fora dela.
3. modo: por duas retas concorrentes.

4. modo: por duas retas paralelas distintas.

O primeiro modo é um postulado e os demais são teoremas onde não serão feitas suas devidas demonstrações, mas abaixo temos os enunciados dos teoremas e suas representações gráficas.

1.3.1.1 Enunciados e As Respectivas representações gráficas:

Teorema 1.1 *Se uma reta e um ponto tais que o ponto não pertence à reta, então eles determinam um único plano que os contém.*

Representação gráfica:

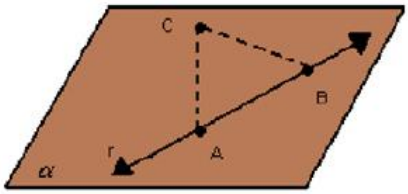

Figura 1.10: Teorema 1.1

Teorema 1.2 *Se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém.*

Representação gráfica:

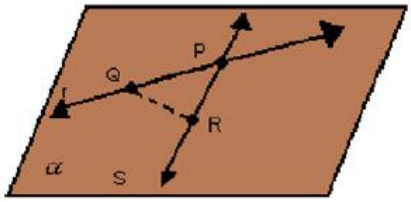

Figura 1.11: Teorema 1.2

Teorema 1.3 *Se duas retas são paralelas entre si e distintas, então elas determinam um único plano que as contém.*

Representação gráfica:

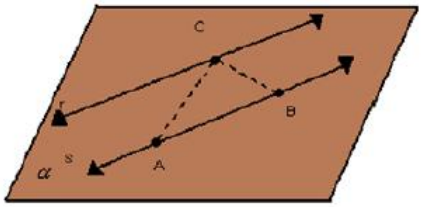

Figura 1.12: Teorema 1.3

Um plano divide o espaço em dois semi-espaços

O plano α divide o espaço em dois semi-espaços, onde um é o espaço inferior e outro espaço superior.

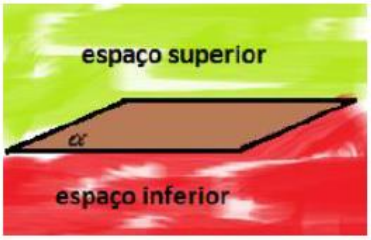

Figura 1.13: Dois semi-espaços

1.4 Ângulos

"Uma região C, do plano ou espaço, é dita convexa quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Caso contrário se

o segmento não estiver totalmente contido em C então C é dito côncavo ou não convexo"

Definição 1.2 *Duas semirretas distintas contidas em um plano e de mesma origem, divide-o em duas regiões: uma convexa e outra não-convexa.*

Essas regiões, unidas com as semirretas, formam dois ângulos um interno e outro externo. veja na figura a seguir

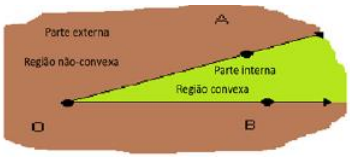

Figura 1.14: Representação dos Ângulos

Figura 1.15: Ângulo interno e outro externo

1.5 Polígonos

Na geometria, polígono é uma figura plana, com três ou mais lados, composta por ângulos, vértices, diagonais e lados,"A definição formal se encontra no livro citado no início deste capítulo, no livro de geometria plana".

Vértice: Um vértice é o ponto comum entre os lados de uma figura geómetrica ou o encontro de duas semi-retas.

Polígonos comuns: Seus nomes conrrespondem ao seu número de lado.(por exemplo: triângulo, quadrilátero, pentágono, etc...) veja (figura abaixo):

Diagonais: Diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

Figura 1.16: Exemplo de Polígonos comuns

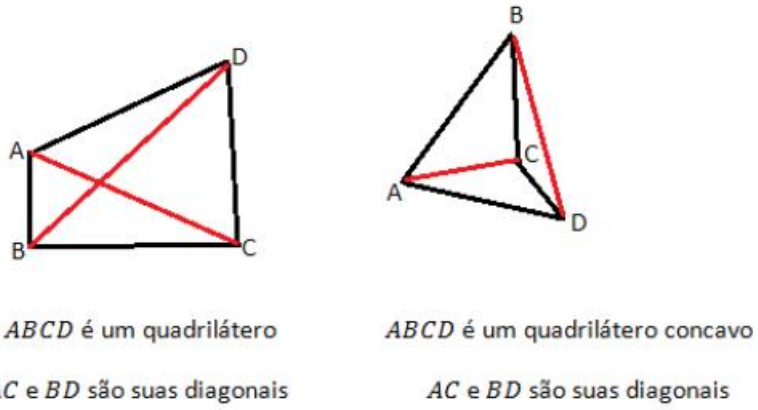

Figura 1.17: Exemplo de Diagonais

1.5.1 Triângulo

Definição 1.3 *Dados três pontos A,B e C não colineares, á reunião dos segmentos* $\overline{AB}$,$\overline{AC}$ *e* $\overline{BC}$ *chama-se triângulo ABC.*

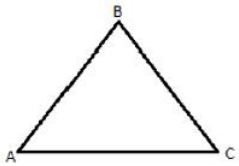

Figura 1.18: Triângulo

Elementos: vértices, lados e ângulos.

Notação dos elementos

Vertices: os pontos A,B e C são os vértices do ΔABC.

Lados: os segmentos $\overline{AB}$,$\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lado do triâgulo.

Ângulos: os ângulos $\hat{A}$ ou $B\hat{A}C$,$\hat{B}$ ou $A\hat{B}C$ e $\hat{C}$ ou $A\hat{C}B$ são os ângulos do ΔABC.(ou ângulos internos do Δ ABC).

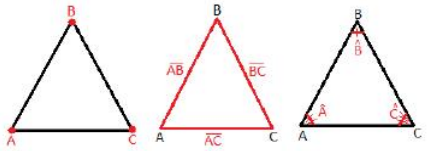

Figura 1.19: Vértices, lados e ângulos.

1.5.1.1 Semelhança de triângulos

Definição 1.4 *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \leftrightarrow \left(\hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}' \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$$

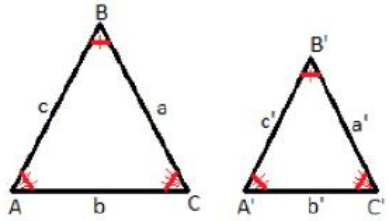

Figura 1.20: Semelhança de triângulos

Dois lados homólogos (homo= mesmo, logos=lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

O teorema a seguir é um teorema muito importante, onde o usaremos em outros momentos, no qual sua demonstração se encontra no "capítulo XIII do livro Fundamentos de Matemática Elementar-Geometria plana".

Teorema 1.4 *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

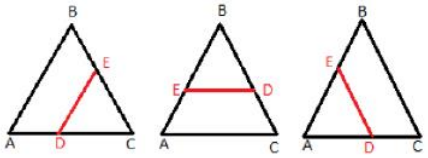

Figura 1.21: Exemplo de triângulos semelhantes

Mediana: mediana de um triângulo é um segmento com extremidade num vértice e no ponto médio do lado oposto.

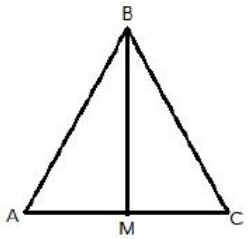

Figura 1.22: Mediana

Baricentro: As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

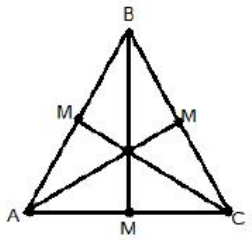

Figura 1.23: Baricentro

Dessa definição de baricentro tiramos uma informação importante, que é de um baricentro se encontra situado em $\frac{2}{3}$ de uma mediana, seja qualquer mediana tomada.

1.5.2 Triângulo retângulo:

Um triângulo é chamado retângulo quando um de seus ângulos internos mede 90°.

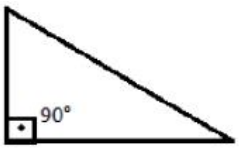

Figura 1.24: Triângulo retângulo

Elementos:

$\overline{AB}$=c : Cateto,

$\overline{BC}$=a : Hipotenusa

$\overline{BC}$=b : Cateto.

Teorema 1.5 *Teorema de Pitágoras: A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

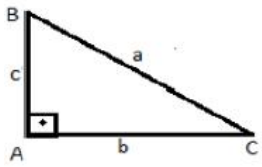

Figura 1.25: Elementos do triângulo

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Área do triângulo: A área do triângulo é dada pela fórmula $A_T = \frac{b.h}{2}$, sendo que b= base e h= altura.(no capítulo XIX; item 246 do livro de Geometria Plana se encontra a demonstração).

1.5.3 Quadrilátero

Definição 1.5 *Sejam A,B,C e D quatro pontos de um plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades,a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.*

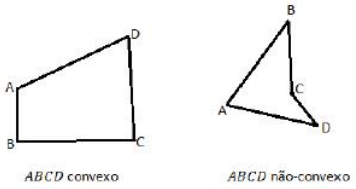

Figura 1.26: Quadrilátero

1.5.3.1 Retângulo

Definição 1.6 *Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.*

$ABCD$ é retângulo $\leftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$

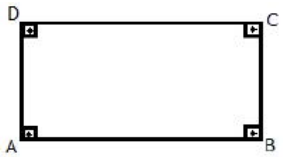

Figura 1.27: Retângulo

Área: Dado um retângulo de base b e altura h temos que, a área do retângulo é dada por $A_R = b \times h$

1.5.3.2 Quadrado:

Definição 1.7 *Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.*

$ABCD$ é quadrado $\leftrightarrow (\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA})$

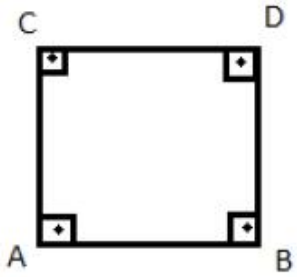

Figura 1.28: Quadrado

Área: Dado um quadrado lado de l temos que a área do quadrado é dada por $A_Q = l^2$

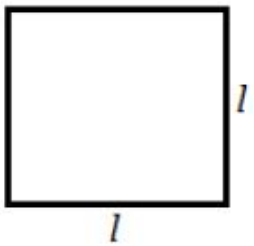

Figura 1.29: Área do quadrado

1.5.4 Circunferência

Definição 1.8 *Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é centro e a distância dada é o raio da circunferência.*

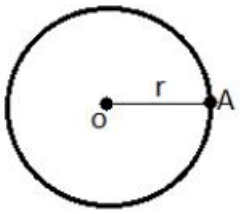

Figura 1.30: Circunferência

Elementos: Chamaremos de raio ao segmento que une o centro da circunferência a qualquer ponto da circunferência. O segmento ligando dois pontos da circunferência será denominado de corda. Toda corda que passa pelo centro da circunferência é um diâmentro, também chamaremos de diâmetro a distância $2r$.

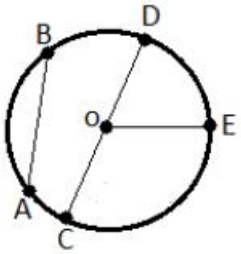

Figura 1.31: Elementos da Circunferência

Temos que na figura acima $\overline{AB}$ é uma corda, $\overline{CD}$ é um diâmetro e $\overline{OE}$ é um raio.

Comprimento: O comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi r$, onde r é o raio.

Área: O cálculo de área de uma circunferência é dado por $A = \pi r^2$.

Capítulo 2

Geometria espacial

Nesse capítulo daremos início ao estudo de poliedros, abordando três teoremas, tendo como objetivo principal a demonstração do teorema de Euler e também o teorema maluco do paralelepípedo que apesar de o teorema maluco não ter significado geométrico é uma curiosidade interessante de se saber.

Agora um exemplo de Vértice, Aresta e Face no $\mathbb{R}^3$.

Aresta: chama-se aresta o segmento de linha que representa a intersecção de dois vértices.

Face: na geometria, face é como um lado da forma geométrica espacial.

Representaremos V vértices, A arestas, e F faces, observe a figura abaixo:

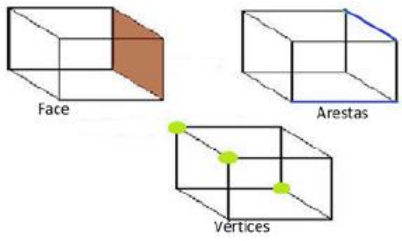

Figura 2.1: Vértice, Aresta e Face.

2.1 Poliedros

Definição 2.1 *poliedros é uma reunião de polígonos planos onde denominamos de face, cada lado do polígono pode ser comum a somente outro, a interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou um vértice ou é vazia, e é sempre possível ir de um ponto de uma face a qualquer outro ponto de outra sem passar por nenhum vértice.*

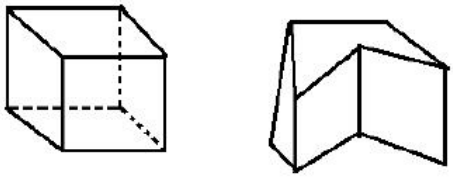

Figura 2.2: Um poliedro convexo e um não convexo

O principal desse capítulo é a demonstração do teorema de Euler, mas para isso, vamos apresentar a seguir duas ferramentas que nos auxiliará na compreensão do mesmo, as ferramentas são:

- As primeiras relações.
- Duas desigualdades.

2.1.1 As primeiras relações

Temos certo poliedro, e nos encontramos com o problema de contar, quantas faces possuem e quantos vértices e quantas arestas. No entanto vamos representar, então, por A, o número de arestas, F faces e V vértices. Mas notemos que as faces, assim, como os vértices, podem ser de gêneros diferentes, logo representaremos as faces por $F_n(n \geq 3)$, o número de faces que possuem n lados, e os vértices por $V_n(n \geq 3)$, o número no qual concorrem n arestas.
Gênero das faces consiste na representação de uma face onde o número de lados define os respectivos gêneros. Veja na figura 2.3.

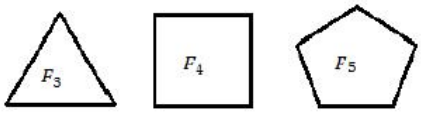

Figura 2.3: Representação do Gênero das faces

Assim como os gêneros das faces, os vértices tem sua representação, mas nesse caso quem define os gêneros são as arestas, dependendo de quantas arestas concorrerem no vértice seu gênero será definido. Veja figura abaixo

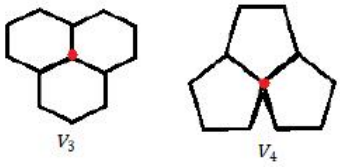

Figura 2.4: Representação do Gênero dos vértices

Logo, temos as relações de:

$F = F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_n \rightarrow$ Representação dos gêneros das faces

$V = V_3 + V_4 + V_5 + \cdots + V_n \rightarrow$ Representação dos gêneros dos vértices.

Imaginemos agora que esse nosso certo poliedro foi desmontado e estamos agora diante de vários polígonos, gostaríamos de saber quantos lados todos eles possuem? Pelo estudo das preliminares no conteúdo de polígonos. É evidente que basta multiplicarmos o número de triângulos por 3, o de quadriláteros por 4, o de pentágonos por 5, e assim por diante. No entanto, notemos que cada aresta do poliedro é comum a dois polígonos, então:

$$A = \frac{3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + nF_n}{2}$$

$$2A = \frac{3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + nF_n}{2} \times (2)$$

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + nF_n \tag{2.1}$$

Podemos usar o mesmo raciocínio para os vértices, basta contarmos em cada vértice quantas arestas nele concorrem, mas como cada aresta será contada duas vezes, então, obtemos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots + nV_n \tag{2.2}$$

2.1.2 Duas desigualdades

Das primeiras relações entre os componentes de um poliedro podemos deduzir duas desigualdades: $1^a)2A \geq 3F$ e $2^a)2A \geq 3V$.

Vamos justificar a 1ª desigualdade.

Temos que

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + nF_n$$

Escrevendo a igualdade acima dessa maneira.

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_n) + F_4 + 2F_5 + \cdots + (n-3)F_n) \tag{2.3}$$

Como vimos nas primeiras relações, sabemos que

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_n$$

Então substituindo F em (2.3), temos:

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \cdots + (n-3)F_n;$$

Logo se temos essa igualdade então se retirarmos

$$F_4 + 2F_5 + \cdots + (n-3)F_n \geq 0$$

A equação fica em desiquilíbrio logo nos debatemos com a seguinte desigualdade:

$$2A \geq 3F$$

No entanto a igualdade só será válida se $F_4 = F_5 = \cdots = 0$, ou seja, quando forem nulos, em outras palavras só será válida a igualdade se o poliedro tiver somente faces triangulares. A justificativa da 2ª desigualdade onde $2A \geq 3V$. É análoga da 1ª, e a igualdade só será válida, se em todos os vértices concorrem somente 3 arestas.

2.1.3 Superfície poliédricas abertas e fechadas

Definição 2.2 *Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos, tais que:*

1. Dois polígonos não estão no mesmo plano;
2. Cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
3. Havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
4. O plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço.

As superfícies poliédricas limitadas convexas que tem contorno são chamadas abertas. As que não tem contorno são chamadas fechadas.

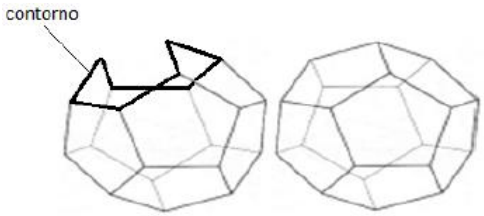

Figura 2.5: Superfície aberta e uma fechada

As superfícies poliédricas limitadas convexas fechadas podem facilmente se tornar uma superfície aberta, basta retirarmos uma face, sendo que o número de vértices e arestas não se alteram.

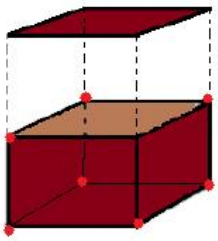

Figura 2.6: Superfície fechada se tornando aberta

Ao retirarmos uma face do cubo, observe que ele continua com 8 vértices e 12 arestas.

2.2 Teorema de Euler

Para demonstrarmos o teorema principal deste capitulo, no qual é o teorema 2.2, precisaremos demonstrar primeiramente o teorema 2.1, onde é a base da demonstração do nosso teorema 2.2.

Teorema 2.1 *Em toda superfície poliédrica limitada convexa aberta, com A arestas, V vértices e F faces, vale a seguinte relação $V - A + F = 1$.*

Para demonstrar o teorema, vamos utilizar o método de indução finita. Aplicaremos em cima do número de faces da superfície. Antes de tudo vamos nomear a superfície de S.

Demonstração: tomemos $F = 1$, logo estamos tratando de um polígono plano convexo de n lados. Em um polígono o número de lados coincide com o número de vértices, ou seja, $A = V = n$, $n \in \mathbb{N}^*$

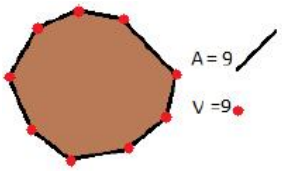

Figura 2.7: Quantidade de aresta igual a de vértice

Temos então $F = 1$ e $A = V = n$, Ao substituirmos esses valores na relação obteremos:

$$V - A + F = n - n + 1 = 1$$

$$V - A + F = 1$$

Após essa verificação pra $F = 1$ a relação é verdadeira.

Agora suponhamos que a relação é verdadeira para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, com A'' arestas, V''vértices e F'' faces, onde $V'' - A'' + F'' = 1$, vamos mostrar agora que a relação também é verdadeira para uma superfície

poliédrica convexa aberta de $F^{''}+1$ faces.

Logo acrescentamos uma nova face à superfície S, de modo que ela continue aberta, no entanto o número de arestas e vértices também serão alterados, logo teremos que considerar os seus acréscimos e também considerar os números de arestas e de vértices coincidentes com os que já existem na superfície S.

Seja então x o número de arestas da face que acrescentamos e y o número de arestas coincidentes com a face já existente.

Obteremos então uma nova superfície com A arestas, V vértices e F faces, de modo que a nova relação será.

Acrescentado uma face.

$$F = F^{''} + 1$$

Acrescentado arestas da nova face.

$$A = A^{''} + x - y$$

Acrescentando os vértices novos e retirando a quantidade coincidentes.

$$V = V^{''} + x - (y + 1)$$

Veja um caso particular de uma superfície quadrangular em que acrescentamos mais uma face:

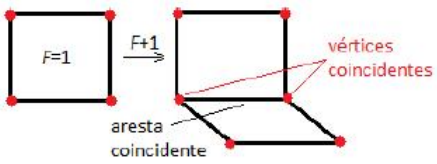

Figura 2.8: Acréscimo de face

Vamos substituir esses valores na relação $V - A + F$, temos, que:

$$\begin{aligned} V - A + F &= V^{''} + x - (y + 1) - (A^{''} + x - y) + F^{''} + 1 \\ &= V^{''} + x - y - 1 - A^{''} - x + y + F^{''} + 1 \\ &= V^{''} - A^{''} + F^{''}. \end{aligned}$$

Como $V - A + F = V'' - A'' + F''$, e por hipótese de indução $V'' - A'' + F'' = 1$, portanto a relação não se altera ao ser acrescentado uma nova face. Então fica estabelecido que a relação $V - A + F = 1$ é verdadeira.

A seguir demonstraremos o teorema 2.2 de Euler, que é o principal desde capitulo Em nosso teorema 2.2 trabalharemos com uma superfície poliédrica convexa fechada.

Então teremos que considerar uma superfície poliédrica convexa fechada, P, em que A é o número de arestas, V o número de vértices e F o número de faces, então temos o teorema 2.2.

Teorema 2.2 (Euler) *Em uma superfície poliédrica convexa fechada, P, com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$.*

Demonstração: Vamos manipular essa relação, para chegarmos a um ponto em que fica claro a aplicação do Teorema 2.1.

Imaginemos então uma superfície poliédrica fechada, e retiramos uma face dessa superfície P, tendo assim $F - 1$ faces, tornando-a uma superfície poliédrica aberta. Então percebemos que os números de arestas e de vértices não se alteram, pois, a face que retiramos da nossa superfície fechada contém as mesmas arestas e vértices da superfície aberta.

Então nossa superfície aberta, que tem F' faces, A' arestas e V' vértices. Obedece a relação de

$$V' - A' + F' = 1 \tag{2.4}$$

de acordo com o teorema 2.1. Com isso temos que:

$$F' = F - 1$$
$$A' = A$$
$$V' = V$$

Dessa forma, se substituirmos esses valores em (2.4), teremos:

$$V - A + F - 1 = 1$$
$$V - A + F = 1 + 1$$
$$V - A + F = 2$$

Portanto mostramos que para uma superfície poliédrica convexa fechada fica estabelecida como verdadeira a relação de $V - A + F = 2$.

2.3 Poliedros Regulares

Definição 2.3 *Um sólido convexo é regular, quando todas suas faces são polígonos regulares iguais e em todos os seus vértices concorrem o mesmo número de arestas.*

Teorema 2.3 *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

Demonstração: Para demostrarmos o teorema de existência de apenas cinco poliedros regulares, temos que n é o número de lados de cada face e seja d o número de arestas que concorrem em cada vértice, das relações (2.1) e (2.2):

$$2A = nF = dV,$$

ou

$$A = \frac{n.F}{2} \text{ e } V = \frac{n.F}{d}$$

Substituindo esses valores no teorema 2.2 de Euler, obtemos.

$$\begin{gathered}
\frac{n.F}{2} - \frac{n.F}{2} + F = 2 \\
\frac{2nF - dnF + 2dF}{2d} = 2 \\
F(2n - nd + 2d) = 4d \\
F = \frac{4d}{2n - nd + 2d}
\end{gathered}$$

Devemos ter $2d + 2n - dn > 0$, ou seja:

$$\begin{gathered}
2n + d(2 - n) > 0 \\
2n > -d(2 - n) \\
2n > -2d + dn \\
2n > d(n - 2) \\
\frac{2n}{n - 2} > d
\end{gathered}$$

Como $d \geq 3$, temos que:

$$\frac{2n}{n-2} > 3$$
$$2n > 3(n-2)$$
$$2n > 3n - 6$$
$$2n - 3n > -6$$
$$-n > -6 \times (-1)$$
$$n < 6$$

Com esse resultado, temos as seguintes possibilidades:
$n = 3 \rightarrow$ temos $F = \dfrac{4d}{2n - nd + 2d} \rightarrow F = \dfrac{4d}{2 \times 6 - 3d = 2d} \rightarrow F = \dfrac{4d}{6 - d}$
Para d=3.

$$F = \frac{4 \times 3}{6 - 3} = \frac{12}{3} = 4 \rightarrow \text{(tetraedro)}$$

Nosso tetraedro;

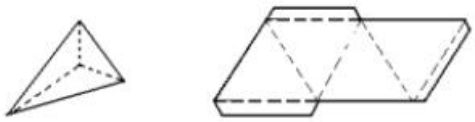

Figura 2.9: Tetraedro e sua planificação

Para d=4.
$F = \dfrac{4 \times 4}{6 - 4} = \dfrac{16}{2} = 8 \rightarrow$ (octaedro)
Nosso octaedro;

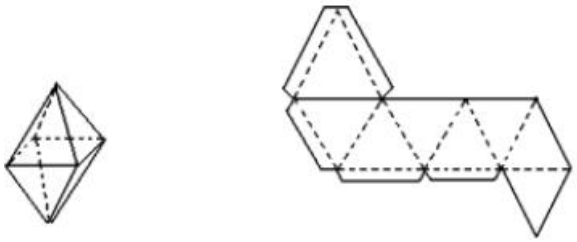

Figura 2.10: Octaedro e sua planificação

Para d=5.

$$F = \frac{4 \times 5}{6 - 5} = \frac{20}{1} = 20 \rightarrow \text{(icosaedro)}$$

Nosso icosaedro;

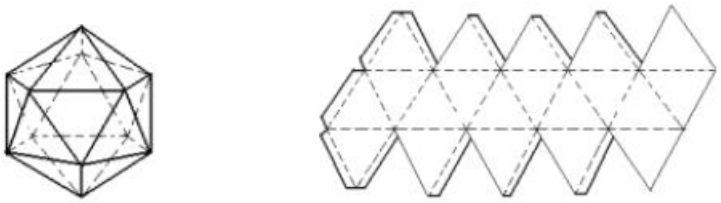

Figura 2.11: Icosaedro e sua planificação

Agora $n = 4 \rightarrow$ temos $F = \dfrac{4d}{2n - nd + 2d} = \dfrac{4d}{2 \times 4 - 4d + 2d} = \dfrac{4d}{8 - 2d} = \dfrac{2d}{4 - d}$

Para d=3.

$$F = \frac{2d}{4 - d} = \frac{2 \times 3}{4 - 3} = \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \text{(hexaedro)}$$

Nosso hexaedro;

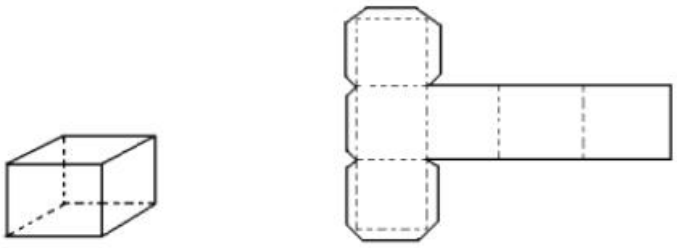

Figura 2.12: Hexaedro e sua planificação

Agora $n = 5 \rightarrow$ temos $F = \dfrac{4d}{2n - nd + 2d} = \dfrac{4d}{2 \times 5 - 5d + 2d} = \dfrac{4d}{10 - 3d}$

Para d=3.

$$F = \frac{4d}{10 - 3d} = \frac{4 \times 3}{10 - 3 \times 3} = \frac{12}{1} = 12 \text{(dodecaedro)}$$

Nosso dodecaedro;

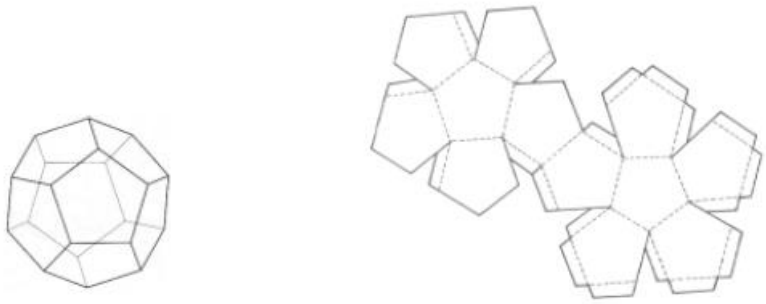

Figura 2.13: Dodecaedro e sua planificação

Então os cinco poliedros regulares são: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

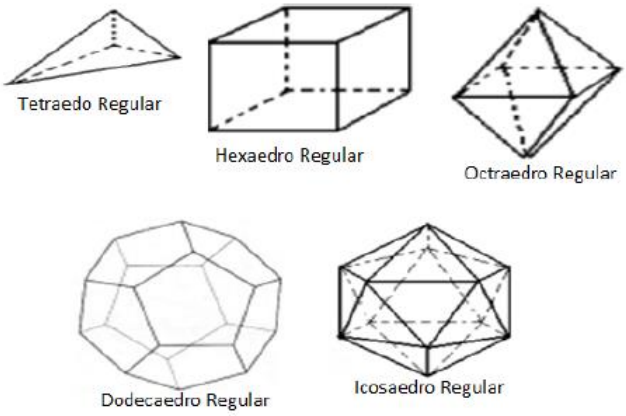

Figura 2.14: Os cincos poliedros regulares

2.4 Uma aplicação do teorema 2.2 de Euler

Exemplo 2.1 *Um dodecaedro como virmos possui 12 faces pentagonais, qual o número de arestas e vértices?*

Solução: Podemos calcular o número de arestas usando nossas primeiras relações, como o dodecaedro possui 12 faces pentagonais, teremos $F_5 = 12$, logo:

$$2A = 5 \times 12 \rightarrow 2A = 60 \rightarrow A = \frac{60}{2} \rightarrow A = 30.$$

Como o dodecaedro é convexo podemos aplicar o teorema 2.2 de Euler para o cálculo dos vértices, então: $F - A + V = 2$, com $F = 12$, $A = 30$ e vamos encontrar V. Substituindo os valores temos;

$$12 - 30 + V = 2$$
$$V = 2 - 12 + 30$$
$$V = -10 + 30$$
$$V = 20.$$

Portanto o dodecaedro possui 12 faces, 30 arestas e 20 vértices.

2.5 Teorema maluco do paralelepípedo uma coincidência numérica.

Antes de anunciarmos o teorema maluco do paralelepípedo, vamos primeiro estudar e ter ideia de alguns conceitos e interpretações.

2.5.1 Prisma:

Consideremos um polígono convexo $ABCD, ..., PQ$ situado num plano α e um segmento de reta $\overline{RS}$, suporte reta intercepta o plano α, chama-se prisma à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{RS}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos terminados por α.

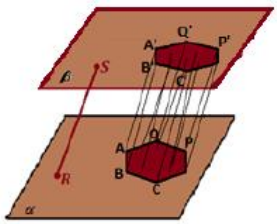

Figura 2.15: Prisma

2.5.2 Cubo ou hexaedro:

De início de conversa, como sabemos que na geometria plana todo quadrado é retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado, aqui no mundo da geometria espacial se aplica o mesmo para o cubo, em relação ao paralelepípedo, de forma que todo cubo é um paralelepípedo, mas nem todo paralelepípedo é um cubo.
Vamos então estudar mais sobre esse nosso tal paralelepípedo chamado cubo. Bom até aqui sabemos que esse nosso cubo é composto por 6 faces, 8 vértices e 12 arestas. Então vamos ficar mais íntimos dele e saber um pouco mais, como diagonal da face, diagonal do cubo, área lateral, área total e volume.
Os três tipos de arestas do paralelepípedo:

1. As arestas **a** em pé.
2. As arestas **b** deitadas.
3. As arestas **c** atravessadas.

Nessas ordens temos respectivamente a representação de todas as arestas nas figuras abaixo.

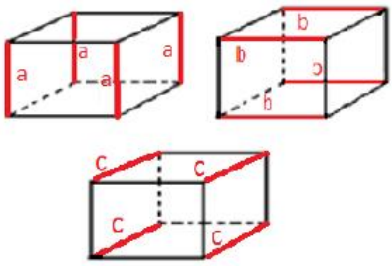

Figura 2.16: Os três tipos de arestas

2.5.3 Diagonal da face:

Para a diagonal da face sabemos que o cubo tem 6 lados iguais, onde suas arestas tem o mesmo comprimento a, logo ao traçarmos a diagonal d, forma um triângulo retângulo.

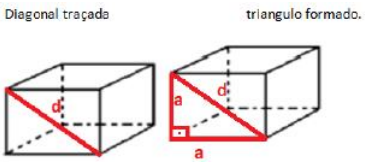

Figura 2.17: Diagonal da face

Onde para acharmos o valor dessa diagonal, basta aplicar o teorema de Pitágoras, dessa forma teremos.

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = \sqrt{2a^2}$$
$$d = a\sqrt{2}$$

2.5.4 Diagonal do cubo:

Vamos traçar a diagonal do cubo

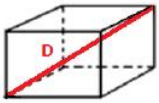

Figura 2.18: Diagonal do cubo

Para encontrarmos o valor da diagonal do cubo temos já em mãos o valor da diagonal da face, e de presente temos nossa aresta a, veja a figura abaixo:

Figura 2.19: Triângulo formado

Notamos que novamente temos um triângulo retângulo, logo aplicando Pitágoras temos: $D^2 = a^2 + d^2$, como sabemos que $d = a\sqrt{2}$ teremos então que ao fazer a substituição $D^2 = a^2 + a\sqrt{2^2} \rightarrow$ resolvendo fica;

$$D^2 = a^2 + 2a^2$$
$$D^2 = 3a^2$$
$$D = \sqrt{3a^2}$$
$$D = a\sqrt{3}$$

2.5.5 Área lateral e Área total:

A área lateral é calculada pela soma das áreas das faces laterais, ou seja, para a área lateral podemos imaginar uma casa em forma de cubo e ao darmos uma volta em torno da casa contaremos 4 paredes, ou seja 4 lados, sendo que cada lado é um quadrado de lado a, então ao calcularmos a área de 1 lado temos

$$a\times\ a = a^2$$

Portanto para a área lateral basta multiplicarmos por 4 ou seja

$$A_L = 4a^2$$

E consequentemente nossa área total fica

$$A_T = 6a^2$$

2.5.6 Volume do cubo:

No cubo de aresta a, temos $b = a$ e $c = a$, Para o volume vamos ter a área da face igual a^2, e ao percorrer essa área até sua face paralela, teremos percorrido certa distância onde essa distância é nada mais nada menos que o comprimento da aresta a. Em outras palavras, basta multiplicamos a área da face pela a aresta, desse modo preencheremos todo o espaço interno, ou seja:

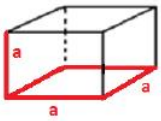

Figura 2.20: Volume do cubo

$$V = a \times b \times c$$
$$\rightarrow V = a \times a \times a$$
$$\rightarrow V = a^2 \times a$$
$$V = a^3$$

2.5.7 Paralelepípedo reto retângulo:

É um prisma reto cujas as bases são retângulos, ao nos retratarmos do paralelepípedo reto retângulo temos que ter cuidado quando formos calcular as áreas laterais ou da base, pois não devemos nos prender a fórmulas e temos que prestar atenção na posição do mesmo, observe como a base muda quando o paralelepípedo está na posição vertical e horizontal.

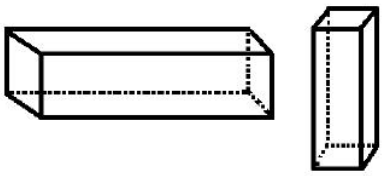

Figura 2.21: Paralelepípedo reto retângulo

2.5.8 Diagonais das faces:

No paralelepípedo reto retângulo costumamos dizer que as faces opostas são iguais duas a duas, no entanto notemos que essas nossas quatro faces maiores são iguais logo temos apenas duas diagonais diferentes d_1 e d_2, observe figura abaixo:

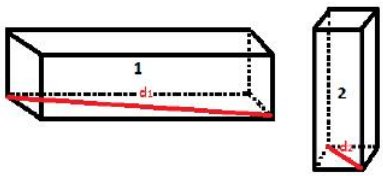

Figura 2.22: Diagonais das faces

2.5.9 Diagonal do paralelepípedo:

Diferentemente da diagonal da face, aqui a diagonal do paralelepípedo é única, não importa quais os vértices que eu ligue ela, seu valor não se alterará.

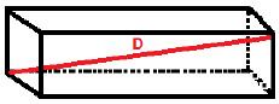

Figura 2.23: Diagonal do paralelepípedo

Os três tipos de arestas do paralelepípedo reto retângulo:

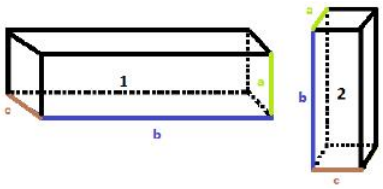

Figura 2.24: Os três tipos de arestas

Cálculo das diagonais da face e do paralelepípedo:

Diagonal da face:

Ao destacarmos as arestas formando assim um triangulo retângulo, fica fácil agora achar o valor de nossas diagonais, basta aplicar o teorema de Pitágoras e teremos os devidos valores.

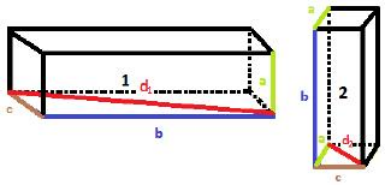

Figura 2.25: Diagonais d_1 d_2

Aplicando Pitágoras para encontrarmos d_1 temos:

$$(d_1)^2 = b^2 + c^2$$
$$d_1 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Aplicando Pitágoras para encontrarmos d_2 temos:

$$(d_2)^2 = a^2 + c^2$$
$$d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Diagonal do paralelepípedo:

Para a diagonal do paralelepípedo precisaremos da diagonal da face d_2, mas como já calculamos então fica fácil, novamente iremos usar nosso famoso teorema de Pitágoras, veja figura abaixo:

Figura 2.26: Diagonal do paralelepípedo

Temos então $d_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$, e aplicando o teorema de Pitágoras para encontrar D teremos:

$$D^2 = a^2 + (d_2)^2 \tag{2.5}$$

substituindo $d_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$ na equação (2.5) fica

$$D^2 = a^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2$$
$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

2.5.10 Área da base:

Temos que ter cuidado ao calcular a área da base, pois temos o mesmo paralelepípedo abaixo, como mostra a figura a seguir, mas ao alterar sua posição sua base também pode se alterar, ou seja, temos o paralelepípedo 1 na horizontal e o 2 na vertical.

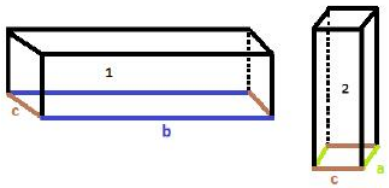

Figura 2.27: Área da base

Para o paralelepípedo 1 temos:

$$A_b = b \times c = bc$$

Para o paralelepípedo 2 temos:

$$A_b = a \times c = ac$$

2.5.11 Áreas laterais:

Observando a figura abaixo percebemos que a área lateral não será a mesma, logo para que não haja nem uma dúvida vamos fazer o cálculo de cada área.

Para o paralelepípedo 1 temos:

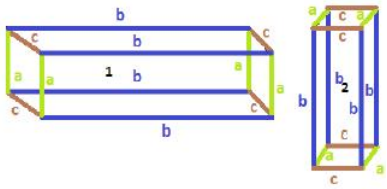

Figura 2.28: Áreas laterais

Para calcular a área lateral, teremos que calcular a área de cada face lateral e soma-las, como à quatro faces então vem que

$$A_l = ab + ab + ac + ac = 2ab + 2ac$$

Para o paralelepípedo 2 temos:

$$A_l = ab + ab + bc + bc = 2ab + 2bc$$

Percebemos então que conforme a posição que o paralelepípedo esteja, então ele terá uma área lateral diferente, voltamos então a ressaltar que não devemos nos prender a fórmula.

2.5.12 Área total:

A área total do paralelepípedo é a soma de todos os valores da área de seis retângulos: sendo que dois deles com dimensões a e b, outros dois com dimensões a e c, e os últimos dois com dimensões b e c. Logo,

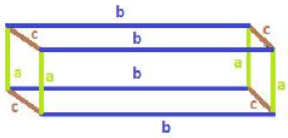

Figura 2.29: Área total

$$A_t = ab + ab + bc + bc + ac + ac = 2ab + 2bc + 2ac$$

2.5.13 Volume:

Vamos usar o mesmo raciocínio que usamos para calcular o volume do cubo, calculamos a área da base e subimos essa área até a face paralela a base, preenchendo assim todo o espaço interno do nosso paralelepípedo, e para o cálculo desse volume basta multiplicar a área da base pela distância até a face paralela, que é nada mais nada menos que a aresta a.

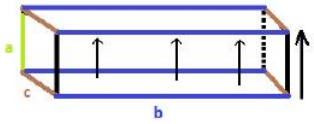

Figura 2.30: Volume paralelepípedo

Então o cálculo do volume fica:

$$V = bc \times a$$

Logo se pode perceber que para calcular o volume basta multiplicar as três arestas do paralelepípedo $a, b, e\ c$, ou seja:

$$V = abc$$

.

2.6 Teorema maluco do paralelepípedo.

O teorema afirma que ao elevar a soma das arestas do paralelepípedo a,b e c ao quadrado, o resultado obtido é exatamente a diagonal do paralelepípedo ao quadrado somado com a área total.

Demonstração:

Queremos mostrar que $(a+b+c)^2 = D^2 + A_t$, logo temos que traçar uma estratégia para resolver o seguinte trinômio $(a+b+c)^2$, vamos tratar esse trinômio como um binômio, ou seja, vamos tomar $(b+c)$ como um só termo, daí podemos usar o que já sabemos como

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Logo transformando nosso trinômio em um binômio temos

$$(a+(b+c))^2$$

Resolvendo isso teremos

$$(a+(b+c))^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$$

Agora vamos realizar a multiplicação de $2a(b+c)$ e resolver $(b+c)^2$, vamos ter

$$(a+(b+c))^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

organizando isso fica

$$(a+(b+c))^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

E como

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$A_t = 2ab + 2bc + 2ac$$

portanto $(a+b+c)^2 = D^2 + A_t$, como queríamos demonstrar.

2.6.1 Uma aplicação do teorema maluco do paralelepípedo.

Exemplo 2.2 *A área total de um paralelepípedo é 175, a soma das medidas de suas arestas é igual á 80. Calcule a medida de sua diagonal.*

Solução: De início temos que $A_t = 175$, a soma das arestas = 80 e queremos saber a medida da nossa diagonal D. Como sabemos que o paralelepípedo possui 12 arestas, sendo 4 do tipo a, 4 do tipo b e 4 do tipo c, logo teremos

$$4a + 4b + 4c = 80$$
$$\rightarrow a + b + c = 20$$

Então à partir daqui, já se pode aplicar o teorema maluco do paralelepípedo, onde temos a forma genérica $(a + b + c)^2 = D^2 + A_t$, substituindo os valores temos:

$$(20)^2 = D^2 + 175 =$$

$$400 = D^2 + 175 =$$

$$400 - 175 = D^2 =$$

$$225 = D^2 =$$

$$D = \sqrt{225} =$$

$$D = 15$$

Capítulo 3

Teoremas de Pappus-Guldin

Neste capitulo vamos ver os dois teoremas de pappus onde é aplicado em superfícies e sólidos de revolução onde nosso objetivo é fazer a demonstração no decorrer do estudo.

3.1 Superfície e Sólido de revolução.

Vamos considerar um plano e uma reta r denominada de eixo e uma linha L, onde o eixo não é cortado por essa linha. Imaginemos então que essa linha gire em torno do eixo, sendo assim cada ponto de L descreve uma circunferência em um plano perpendicular a r e com centro pertencente a r.
Ao completar a volta em torno do eixo, cada ponto $P \in L$ percorre, então, para a circunferência teremos que seu raio é a distancia de L á r. Sendo assim teremos que a reunião de todas as circunferências é denominada uma superfície de revolução.

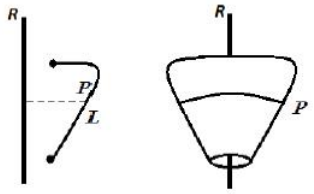

Figura 3.1: Rotação de uma linha

Temos duas maneiras para determinar o sólido de revolução que é:
Se a linha for fechada ou se seus dois extremos pertencerem ao eixo, temos então que a superfície de revolução delimita um sólido denominado sólido de revolução.

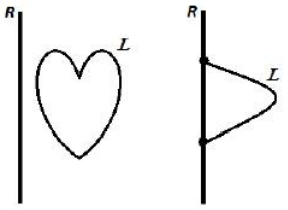

Figura 3.2: Linha fechada e linha com seus extremos no eixo

Após essa nossa introdução, vamos continuar com nosso estudo sobre superfície e sólido de revolução, tendo como objetivo principal demonstrar os teoremas de pappus 1 e 2. Mas para isso precisaremos de um estudo preliminar.
Antes de anunciarmos o primeiro teorema de Pappus para o cálculo de área de certa superfície gerada, vamos aqui expor três ferramentas que nos auxiliará na demonstração do mesmo.

1ª ferramenta

Centro de gravidade: vamos deixar estabelecidas as seguintes proposições como axiomas.

1. O centro de gravidade de um segmento é seu ponto médio.
2. Se uma figura plana possui um eixo de simetria, então, o seu centro de gravidade pertence a esse eixo.

2ª ferramenta

Centro de gravidade de uma poligonal.

Definição 3.1 *Se uma poligonal P é formada por segmentos consecutivos $l_1, l_2, ..., l_n$, de comprimentos $a_1, a_2, ..., a_n$, Respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o ponto médio do segmento l_k, o centro de gravidade de P é o ponto $G = (x, y)$ onde:*

$$x = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_nx_n}{a_1 + a_2 + ...a_n}$$

e

$$y = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + ...a_ny_n}{a_1 + a_2 + ...a_n}$$

Exemplo 3.1 *veja um caso onde temos um bordo de um triângulo, e se fossemos determinar onde está situado seu centro de gravidade, sendo que seus lados medem a_1, a_2 e a_3.*

Solução: seja ABC o triângulo em questão com $AB = AC$ logo $a_1 = a_2$ e $BC = a_3$. Vamos apoiá-lo em uma reta x que contém BC.

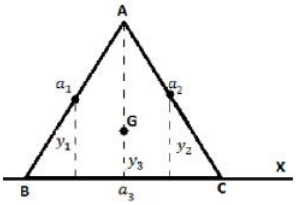

Figura 3.3: Centro de gravidade do bordo

Como o triângulo se encontra com um de seus lados sobre x então, temos $G = (0, y)$, teremos então que encontrar y, daí vem que,

$$y = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + ...a_ny_n}{a_1 + a_2 + ...a_n} = G = (0, y)$$

3ª ferramenta

3.1.1 Área lateral do cone reto de raio R e geratriz g

Temos o cone como mostra na figura abaixo:

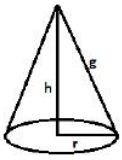

Figura 3.4: Cone reto

Para o cálculo da área lateral do cone, vamos abrir ele e nós teremos:

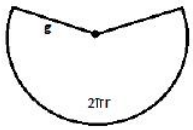

Figura 3.5: Cone aberto

Traçando um arco e completando a circunferência temos:

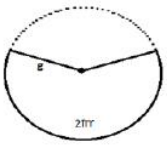

Figura 3.6: Arco traçado

Percebemos então que a área que queremos é um setor da circunferência, sendo assim podemos aplicar uma regra de três simples, para encontrar nossa área lateral do cone, onde teremos que a área da circunferência πg^2 está para a do setor A Assim como a do comprimento da circunferência $2\pi g$ está para o comprimento do arco do setor $2\pi R$, temos então:

$$\pi g^2 \dashrightarrow A$$

$$2\pi g \dashrightarrow 2\pi R$$

Vem, que:

$$A \times 2\pi g = \pi g^2 \times 2\pi R$$
$$A = \frac{\pi g^2 \times 2\pi R}{2\pi g}$$
$$A = \pi R g$$

Portanto a área lateral do cone é $A = \pi R g$.

3.1.2 Área lateral de um Tronco de cone.

Tomando uma reta r pertencente a um plano e um segmento $\overline{AB}$ como mostra na figura abaixo.

Figura 3.7: segmento e eixo

Quando o segmento $\overline{AB}$ gira em volta de r, forma uma superfície lateral de um tronco de cone.

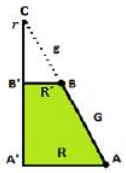

Figura 3.8: Projeção do segmento

Observando a figura teremos uma projeção do segmento $\overline{AB}$, tendo C como o ponto de interseção do segmento $\overline{AB}$ com r. Agora poderemos tirar a razão entre o cone e o tronco de cone, logo o tronco de cone vem ser a diferença entre o cone de raio $AA^{'}$ e a altura $CA^{'}$ pelo outro cone de raio $BB^{'}$ e altura $CB^{'}$. Agora iremos determinar a área lateral do tronco de cone pela diferença das áreas laterais dos dois cones. Sejam R e $R^{'}$ as medidas que distam A e B do eixo r, respectivamente. Seja $AB = G$, a geratriz do tronco de cone e seja $BC = g$, a geratriz do cone menor. Notemos que os triângulos $CBB^{'}$ e $CAA^{'}$ são semelhantes pelo teorema 1.4, temos:

$$\frac{R}{g+G} = \frac{R^{'}}{g}$$
$$Rg = R^{'}(g+G)$$
$$R = \frac{R^{'}g + R^{'}G}{g}$$
$$R = R^{'} + \frac{R^{'}G}{g}$$
$$R - R^{'} = \frac{R^{'}G}{g}$$
$$(R - R^{'})g = R^{'}G$$

Sabemos que a área lateral de um cone é igual a πRg, onde R é o raio de sua base e g é sua geratriz, logo, a área lateral do tronco de cone é:

$$A = \pi R(g+G) - \pi R^{'}g$$
$$= \pi Rg + \pi RG - \pi R^{'}g$$
$$= \pi RG + \pi(R - R^{'})g \tag{3.1}$$

Temos que $(R - R^{'})g = R^{'}G$ fazendo a substituição em (3.1) vem que:

$$A = \pi RG + \pi R^{'}G$$

$$A = \pi(R + R^{'})G$$

Notemos que x é à distância do ponto médio de AB ao eixo r, onde, $x = \dfrac{R + R^{'}}{2}$ portanto teremos a área lateral do tronco de cone é igual a:

$$A = 2\pi\frac{R + R^{'}}{2}g$$

Ou seja

$$A = 2\pi xg.$$

3.2 Teorema 1 de Pappus-Guldin.

Teorema 3.1 *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo seu comprimento da sua circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Demonstração:

A demonstração será feita para uma linha poligonal.

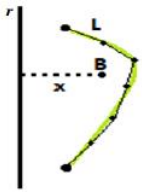

Figura 3.9: Linha poligonal

Na figura a seguir vamos considerar uma poligonal plana onde seus lados têm comprimentos, $a_1, a_2, ..., a_n$ e $x_1, x_2, ..., x_n$ seus pontos médios respectivamente que distam de r. Teremos então que L é a soma dos comprimentos $a_1, a_2, ..., a_n$, ou seja, $L = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Assim, que cada segmento gira em torno de r, teremos

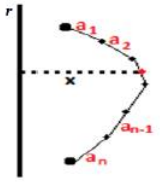

Figura 3.10: Poligonal plana

como resultado a superfície lateral de um tronco de cone, sendo assim, a área da superfície de revolução gerada pela poligonal, será a soma das áreas de todos os troncos.

Resulta então que para a área da superfície gerada pela poligonal.

$$A = 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + ... + 2\pi x_n a_n.$$

Escrevendo a equação acima da seguinte maneira temos:

$$A = 2\pi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n) \tag{3.2}$$

Entretanto, se x é a distância do baricentro da poligonal ao eixo r, então.

$$x = \frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

Fazendo a multiplicação de x por L. Vem que como $L = a_1 + a_2 + ... + a_n$, temos:

$$xL = \frac{x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n}{a_1a_2 + ... + a_n}..a_1a_2 + ... + a_n$$

$$xL = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n.$$

substituindo xL em (3.2) a área da superfície de revolução gerada pela rotação da poligonal em torno do eixo é:

$$A = 2\pi xL.$$

Nota: Essa demonstração feita por uma poligonal, consiste no método de calcular as áreas dos troncos no qual é gerada por segmentos, então notamos que estamos trabalhando com uma aproximação, que conforme aumentamos o número de segmentos consequentemente aumenta o número de troncos de cone e, portanto, teremos uma aproximação cada vez mais precisa. A demonstração do caso geral envolve elementos de cálculo e pode ser encontrada no livro Guidorizzi.H.L., Um Curso de Cálculo.

3.2.1 Uma aplicação do teorema 1 de Pappus-Guldin

Exemplo 3.2 *De acordo com a figura abaixo, calcule a área do sólido de revolução gerada pela rotação de um segmento paralelo ao eixo, onde se encontra a uma certa distância x do eixo sendo que $x = 2$ e o comprimento do segmento mede $L = 4$.*

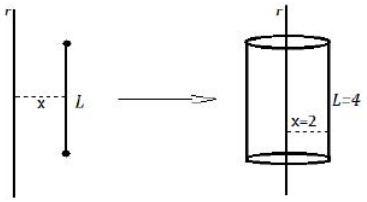

Figura 3.11: Área lateral gerada pela rotação

Solução: Aplicando o teorema 1 de Pappus-Guldin temos que $A = 2\pi xL$, substituindo os valores temos que

$$A = 2\pi \times 2 \times 4 = 16\pi$$

Portanto a área da superfície gerada é igual á 16π.

Fazendo uma rápida verificação, observamos que a rotação gera a área lateral de um cilindro ela pode ser desenrolada e transformada em um retângulo cuja base mede $2\pi r$ e altura h. Então basta calcularmos área desse retângulo, como a base é $2\pi r = 2\pi \times 2 = 4\pi$ e $h = 4$.

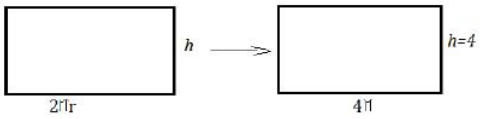

Figura 3.12: Retângulo

Sabendo que a área é calculada por $b \times h$ temos que:

$$4\pi \times 4 = 16\pi$$

Antes de anunciarmos o teorema 2 de Pappus-Guldin, vamos estudar dois breves pré-requisitos que nos auxiliará na compreensão e demonstração do teorema, onde esses pré-requisitos são:

- Centro de Gravidade de um Polígono.
- A Rotação de um Retângulo.

3.3 Centro de Gravidade de um Polígono.

Agora, iremos considerar polígonos como a região do plano limitada por uma linha poligonal fechada. Onde, a seguir vamos nos preparar para determinar a posição do centro de gravidade da superfície de qualquer figura plana.

Vamos tomar uma ideia, e começaremos determinando o centro de gravidade de um triângulo, mas conhecido como baricentro, para isso, vamos procurar entender porque o ponto de interseção das medianas do triângulo é o centro de gravidade de sua superfície.

Imaginemos então um triângulo ABC recortado de uma chapa de metal cujo o

mesmo se encontra pendurado pelo vértice A. Logo vem a seguinte pergunta porque a reta vertical que passa por A, passa também no ponto médio de BC?. Responderemos da seguinte forma; Tomemos o triângulo ABC cortado por retas paralelas a BC em fatias extremamente finas, tão finas que falando grosseiramente cada fatia chega a ser quase um segmento. Portanto só temos o equilíbrio se pendurado pelo seu ponto médio, logo nossa reta vertical que contém A, interceptará todos os pontos médios de todas as fatias, inclusive o ponto médio de BC.

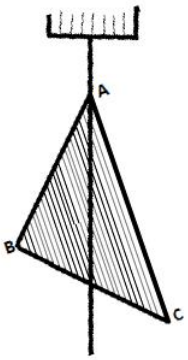

Figura 3.13: Triângulo pendurado pelo vértice A

Mas, se o centro de gravidade da superfície de um triângulo pertence a uma mediana, teremos então que ao repetirmos a experiência ele é o ponto de interseção das três medianas.

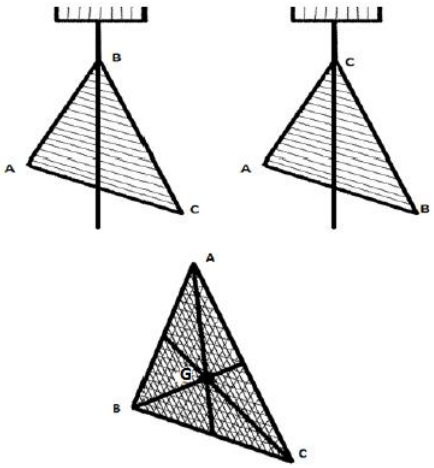

Figura 3.14: Experimentos e o resultado

Portanto concluímos que o centro de gravidade de um triangulo é o ponto de interseção das três medianas, denominado como baricentro.

Agora vamos determinar a posição do centro de gravidade da superfície de um polígono, mas para isso, vamos imaginar o mesmo dividido em triângulos $T_1, T_2, ..., T_n$, com áreas $A_1, A_2, ..., A_n$, respectivamente.(fig. 3.15)

Consideremos então um sistema de coordenadas no plano do polígono e seja (x_k, y_k) o baricentro do triângulo T_k, novamente vamos usar o raciocínio físico de tomar a figura recortada de uma chapa uniforme de espessura constante, onde temos que a massa de cada triângulo é proporcional a sua área, ou seja, a massa m_k do triângulo T_k é igual a $c.A_k$ para uma certa constante c(que depende do material). Daí podemos, então imaginar o polígono transformado em um conjunto de partículas, onde cada uma delas se encontra no baricentro de um triângulo e com massa proporcional a sua área. Em outras palavras estamos descrevendo que toda massa de um triângulo esteja centrada no seu baricentro.

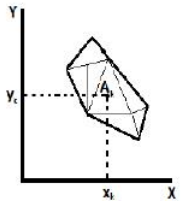

Figura 3.15: Triângulos traçados no polígono

Com essas considerações vamos poder aceitar a seguinte definição.

Definição 3.2 *Se um polígono P está dividido em figuras $T_1, T_2, ..., T_n$, de áreas $A_1, A_2, ..., A_n$, respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o baricentro da figura T_k, o centro de gravidade da superfície de P é o ponto $G = (x, y)$, tal que:*

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n}{A_1 + A_2 + ... + A_n}$$

e

$$y = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + ... + A_ny_n}{A_1 + A_2 + ... + A_n}$$

Para fixar essa ideia, vamos no exemplo a seguir determinar a posição do centro de gravidade da superfície de um retângulo.

Exemplo 3.3 *Determine a posição do centro de gravidade da superfície do retângulo $ABCD$ onde $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^o$, $\overline{AB}$=10,$\overline{AD} = 4$.*

Solução: Consideremos em um sistema de coordenadas, $A = (0, 0)$, $B = (10, 0)$, $C = (10, 4)$ e $D = (0, 4)$ como na figura abaixo.

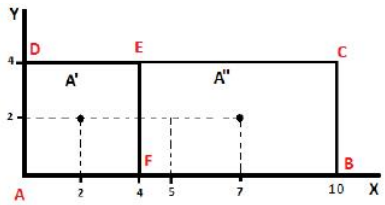

Figura 3.16: Centro de gravidade do retângulo

Dividamos o retângulo em duas figuras: um quadrado $ADEF$ e um retângulo $BCEF$. As áreas dessas figuras são $A^{'} = 16$ e $A^{''} = 24$ respectivamente, o baricentro do quadrado é o ponto $(2, 2)$ e o do retângulo é o ponto $(7, 2)$. Se $G = (x, y)$ é o centro de gravidade da superfície de $ABCD$, então temos:

$$x = \frac{16 \times 2 + 24 \times 7}{16 + 24} = \frac{32 + 168}{40} = \frac{200}{40} = 5$$

$$y = \frac{16 \times 2 + 24 \times 2}{16 + 24} = \frac{32 + 48}{40} = \frac{80}{40} = 2$$

Portanto $G = (5, 2)$.

3.4 A Rotação de um Retângulo.

Vamos observar, o que acontece quando um retângulo gira em torno de um eixo de seu plano e paralelo a um de seus lados.

Temos a seguir uma figura cuja mostra um retângulo de base a e altura b, e um eixo r. Onde o eixo se encontra paralelo a um lado do retângulo e distando d do lado mais próximo, onde temos também, $S = ab$, a sua área.

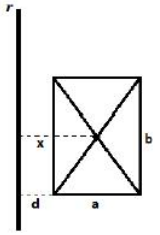

Figura 3.17: Retângulo e o eixo

O resultado dessa rotação em volta do eixo r produz um sólido de revolução que é a diferença entre dois cilindros: o maior, com raio $a + d$ e altura b, e o menor cujo raio mede d e altura b. O volume desse sólido é, portanto,

$$\begin{gathered} V = \pi(a+d)^2 b - \pi d^2 b = \\ = \pi(a^2 + 2ad + d^2)b - \pi d^2 b = \\ = \pi(a^2 b + 2abd + d^2 b) - \pi d^2 b = \\ = \pi a^2 b + \pi 2abd + \pi d^2 b - \pi d^2 b = \\ V = \pi a^2 b + \pi 2abd \end{gathered}$$

Escrevendo a equação acima da seguinte maneira, temos:

$$V = \pi ab(a + 2d)$$

Com isso faremos então a substituição de S=ab, daí,

$$V = \pi(a + 2d)S$$

Agora vamos multiplicar e dividir a equação por 2, fazendo isso vem que:

$$V = 2\pi \frac{(a+2d)}{2} S$$

Daí,

$$V = 2\pi \frac{a}{2} + dS. \tag{3.3}$$

Observe ainda que $x = \dfrac{a}{2} + d$ é a distância do centro do retângulo até o eixo r. Substituindo x em (3.3), podemos então, concluir, que, se um retângulo de área S gira em torno de um eixo paralelo a um de seus lados e que não o atravessa, temos que o volume gerado é,

$$V = 2\pi xS$$

Onde x é a distância do centro do retângulo ao eixo.

3.5 Teorema 2 de Pappus-Guldin

Teorema 3.2 *Se uma figura plana gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual a área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Em outras palavras, temos que se uma figura plana tem área S e mais ainda, se x dista o baricentro dessa figura ao eixo r, o Teorema 2 de Pappus-Guldin nos afirma que o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa nossa figura em torno de r vale $2\pi xS$.

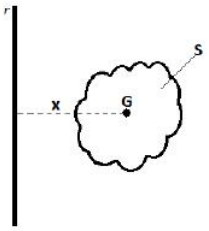

Figura 3.18: Figura plana e o eixo

Demonstração: Iremos fazer a demonstração onde no caso a figura e um polígono retangular, ou seja, temos um polígono composto de vários retângulos unidos e adjacentes. Com o eixo r paralelo a um lado desses retângulos.
Vamos considerar, então, o polígono retangular P, dividido em retângulos $R_1, R_2, ..., R_n$, de áreas $A_1, A_2, ..., A_n$, respectivamente. Com isso vem que $S = A_1 + A_2 + ... + A_n$ a área de P e temos também x_k a distância do centro do retângulo R_k ao eixo r, que é paralelo a um lado desses retângulos e não os atravessa.

O volume do sólido gerado pela rotação de P em torno de r é a soma dos volumes gerados pela rotação de cada figura retangular. Levando em consideração o que

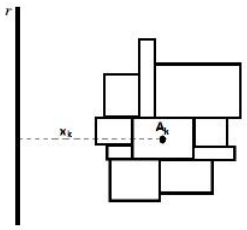

Figura 3.19: Polígono retângular

concluímos no item anterior, teremos para esse volume a seguinte expressão:

$$V = 2\pi x_1 A_1 + 2\pi x_2 A_2 + ... + 2\pi x_n A_n$$

Escrevendo a igualdade acima da seguinte maneira temos,

$$V = 2\pi(A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n) \tag{3.4}$$

Mas observamos, que, se x é a distância do centro de gravidade da superfície do polígono P ao eixo r, então:

$$x = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n}{A_1 + A_2 + ... + A_n}$$

ou seja, ao multiplicarmos S por x teremos

$$xS = \Big(\frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n}{A_1 + A_2 + ... + A_n}\Big).A_1 + A_2 + ... + A_n$$

$$xS = A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n \tag{3.5}$$

Portanto, substituindo (3.5) em (3.4), o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do polígono retangular P em torno do eixo r é:

$$V = 2\pi xS.$$

Nota: A demonstração geral não foi feita, pois o público alvo é de ensino médio, e ao entender a demonstração para um polígono retangular, alcança o objetivo e não ultrapassa o nível do ensino médio e o leitor que se interessar em conhecer a demonstração geral pode consultar os livros de cálculo, onde indicamos o livro um curso de cálculo.

3.5.1 Uma aplicação do teorema 2 de Pappus-Guldin.

Exemplo 3.4 *Calcule o volume do cone de revolução. Onde um cone de revolução e obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contem um dos catetos. A figura abaixo, mostra um triângulo retângulo ABC com catetos $AB = 6$ e $AC = 8$ e o eixo r que contem AC*

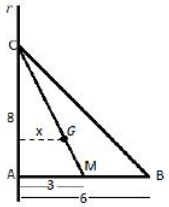

Figura 3.20: Rotação do triângulo

O baricentro do ΔABC é o ponto G, situado sobre a mediana CM e tal que

$$CG = \frac{2}{3}CM.$$

Se x é a distância de G ao eixo, então, usando o Teorema 1.4 apresentado no capítulo 1, podemos aplicar a razão de semelhança de triângulos para encontrar o valor de x logo

$$\frac{CG}{CM} = \frac{x}{3} \tag{3.6}$$

Como $CG = \frac{2}{3}CM$, substituindo em (3.6), temos:

$$\frac{\frac{2}{3}CM}{CM} = \frac{x}{3}$$
$$\frac{2}{3}CM \times \frac{1}{CM} \times 3 = x$$

Portanto $x = 2$.

Como a área do ΔABC é

$$S = \frac{b \times h}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 3 \times 8 = 24.$$

O volume do sólido de revolução gerado pela rotação do ΔABC em torno de r, será igual a:

$$V = 2\pi xS = 2\pi \times 2 \times 24 = 96\pi$$

Vamos rapidamente fazer uma verificação aplicando a fórmula do volume do cone, que é encontrado no livro A Matemática do Ensino médio-Capítulo 11.

$$\frac{1}{3}(\text{área da base}) \times (altura)$$

Temos que a área da base é

$$\pi r^2 = \pi 6^2 = 36\pi$$

Como $h = 8$ substituindo na fórmula $\frac{\pi r^2 h}{3}$ temos

$$\frac{1}{3} \times 36\pi \times 8 = 12\pi \times 8 = 96\pi$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho mostra uma beleza de geometria espacial que simplesmente de deixar a pessoa fascinada, curiosidades que desperta o interesse de saber mais e mais, de procurar novidades e de se querer estudar e ir mais afundo entrar literalmente de cabeça e um mundo tão fascinante o quão é esse da geometria espacial.

Os teoremas abordados no conteúdo de poliedros e superfícies e sólidos de revolução, são abordados de maneira que antes de anunciarmos os teoremas, primeiramente é estudado uns assuntos de pré-requisitos que consequentemente serão usados na demonstrações, onde buscamos a clareza no decorrer do estudo de cada teorema, como o conteúdo em si é do nível do ensino médio, então as demonstrações são feitas de maneira que subtendida que para um nível de estudo do conteúdo de ensino médio a compreensão fique mais fácil e consequentemente mais simples de se aprender. Então após completar todo o processo do estudo de um teorema é realizado uma aplicação do mesmo, para fixar uma ideia de onde e como podemos aplicá-lo.

BIBLIOGRAFIA

[1] DOLCE,OSVALDO;POMPEO, JOSÉ NICOLAU, **Fundamentos de Matemática Elementar-volume 10: Geometria Espacial**,6.ed São Paulo: ATUAL, 2005.

[2] DOLCE,OSVALDO;POMPEO, JOSÉ NICOLAU, **Fundamentos de Matemática Elementar-volume 9: Geometria Plana**,7.ed São Paulo: ATUAL, 1993.

[3] LIMA, ELON LAGES;CARVALHO, PAULO CEZAR PINTO;WAGNER, EDUARDO;MORGADO, AUGUSTO CÉZAR, **A Matemático do Ensino Médiio-volume 2**,6.ed Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[4] GUIDORIZZI,H.L. **Um curso de cálculo**, Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[5] BOYER,CARL B., **História da Matemática**,2.ed São Paulo: EDGARD BLÜCHER LTDA, 1996.