UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAMON COSTA BENJAMIM

O CÁLCULO MODERNO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE SETE TEOREMAS E SUAS APLICAÇÕES

MACAPÁ
2017

RAMON COSTA BENJAMIM

O CÁLCULO MODERNO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE SETE TEOREMAS E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso como exigência para a obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá. Orientador: Professor Mestre João Socorro Pinheiro Ferreira.

MACAPÁ
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

510.07
B468s Benjamim, Ramon Costa.
O cálculo moderno na História da Matemática: um estudo sobre sete teoremas e suas aplicações / Ramon Costa Benjamim; orientador, João Socorro Pinheiro Ferreira. -- Macapá, 2017.
58 f.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Matemática - História. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Cálculo – História. I. Ferreira, João Socorro Pinheiro, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

RAMON COSTA BENJAMIM

O CÁLCULO MODERNO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UM ESTUDO SOBRE SETE TEOREMAS E SUAS APLICAÇÕES

A Banca examinadora abaixo relacionada aprova a Monografia defendida à mesma, como parte da exigência para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, na área de concentração em Educação Matemática e linha de pesquisa História da Matemática:

Macapá, 25 de março de 2017

Prof. Me. João Socorro Pinheiro Ferreira
Orientador - Universidade Federal do Amapá

Prof. Me. Steve Wanderson Calheiros de Araújo
1º Membro – UNIFAP

Profa. Dra. Eliane Leal Vasquez
2º Membro – UNIFAP

A Deus!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida e não somente nestes anos como universitário, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram à janela que hoje vislumbre um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao meu orientador, pelo emprenho dedicado à elaboração deste trabalho, a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

Agradeço à minha mãe Iraci Miranda da Costa, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Ao meu pai Edivaldo Rodrigues Benjamim, que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e que para mim foi muito importante.

Obrigado meus irmãos e sobrinhos, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente!

Meus agradecimentos aos amigos Baldano, Edielson, Aline Cristina, Emerson, Aldenice, Gisele, Adriana, Marciele, Leidecley, Arlediane, Marleson, Francisco, Cesar, Samuel, Fabio e muitos outros companheiros de trabalho e irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Eu me senti completamente inútil ao ler grandes tratados de análise pura: é muito grande o número de métodos de acontecimento uma vez diante de nossos olhos. É no trabalho de sua aplicação onde se deve estudá-los, não julgar a sua utilidade e avaliar como usá-los.

Joseph-Louis Lagrange

RESUMO

Nesta Monografia de Conclusão de Curso são apresentados os resultados da pesquisa bibliográfica realizada sobre a contribuição científica de sete grandes matemáticos europeu que construíram cientificamente os alicerces do cálculo diferencial e integral com uma variável independente, também denominado de cálculo na reta real. O texto está escrito em ordem cronológica de nascimento dos sete matemáticos que viveram a partir da segunda metade da era Moderna e o início da idade Contemporânea, compreendendo um período de duzentos e cinquenta e quatro (254) anos de revolução matemática. São apresentados os sete teoremas, suas demonstrações e suas interelações quando existentes. A monografia também pode servir de texto didático, técnico e pedagógicos para acadêmicos, professores e estudiosos de diversas áreas do conhecimento científico.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Teoremas. História da Matemática. Idades Moderna e Contemporânea.

ABSTRACT

In this monograph the results of the bibliographical research carried out on the scientific contribution of seven great European mathematicians who scientifically constructed the foundations of the differential and integral calculus with an independent variable, also denominated calculation in the real line. The text is written in chronological order of birth of the seven mathematicians who lived from the second half of the Modern era and the beginning of the Contemporary age, comprising a period of two hundred and fifty-four (254) years of mathematical revolution. The seven theorems are presented, their demonstrations and their interactions when they exist. The monograph may also serve as didactic, technical and pedagogical text for academics, professors and scholars from various areas of scientific knowledge.

Key-words: Differential and Integral Calculus. Theorems. History of Mathematics. Modern and Contemporary Ages.

LISTA DE FIGURAS

2.1 Fluxograma cronológico dos sete matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento científico do cálculo diferencial e integral. 16
4.2 Gráfico da função 4.5: $s(t) = \frac{t^2-4}{t-2}$. 25
4.3 Teorema de Rolle. 27
4.4 Gráfico da função $f(x) = 3x^4 - x^2 + 1$, em que foram aplicados os fundamentos do Teorema de Rolle, para encontrar a equação da reta tangente onde $f'(c) = 0$. 29
4.5 Teorema do Valor Médio. 30
4.6 Gráfico das funções $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $g(x) = x + 1$ e $y = x + 23/27$. 32
4.7 - Teorema do Valor Intermediário. 33
4.8 Os gráficos da função seno em três intervalos abertos, porém as imagens são, respectivamente, intervalos fechado, aberto e semiaberto. 34
4.9 Intervalo [a,b] com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. O produto de f(a) por f(b) é negativo, logo por hipótese pode-se aplicar o TB. 36
4.10 c_0 é o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$. 36
4.11 Intervalo $[a_1, b_1]$ com $f(c_0) = f(a_1) < 0$ e $f(b_0) = f(b_1) > 0$. O produto de $f(c_0)$ por $f(b_1)$ é negativo. 36
4.12 c_1 é o ponto médio do intervalo $[a_1, b_1]$. 36
4.13 Intervalo $[a_2, b_2]$ com $f(c_1) = f(a_2) < 0$ e $f(b_1) = f(b_0) > 0$. O produto de $f(c_1)$ por $f(b_2)$ é negativo. 36
4.14 Intervalos encaixantes. 37
4.15 Teorema do Bolzano. 37
4.16 Representação do intervalo $[3, 4]$ com as respectivas imagens dos extremos do intervalo. 38
4.17 $c_1 = 3,75$ é o ponto médio do intervalo encaixante $[3,5; 4]$. 38
4.18 $c_2 = 3,875$ é o ponto médio do intervalo $[a_2 = 3,75; b_2 = 4]$. 39
4.19 $c_3 = 3,9375$ é o ponto médio do intervalo $[a_3 = 3,875; b_3 = 4]$. 39
4.20 $c_4 = 3,96875$ é o ponto médio do intervalo $[a_4 = 3,9375; b_4 = 4]$. 39
4.21 $c_5 = 3,953125$ é o ponto médio do intervalo $[a_5 = 3,9375; b_5 = 3,96875]$. . 40
4.22 Teorema de Weierstrass. 41
4.23 Representação geométrica da partição P na reta real. 43
4.24 Gráfico da função limitada $y = x$ no intervalo $[0, a]$. A área em destaque é a que se quer calcular. 46

4.25 Intervalo [a, x+h], identificando que a função deve ser integrada nos subintervalos $[a, x] \cup [x, x + h]$. 50
4.26 Intervalo [x, x+h], identificando que a função deve ser integrada no subintervalo $[x, x_m] \cup [x_m, x_M$. 51
4.27 Representação do subintervalo $[x, x+h]$ que está contido no intervalo $[a, b]$, domínio de integração para o TFC1. 52

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **12**

2 METODOLOGIA **15**
2.1 Tipo de pesquisa 15
2.1.1 Coleta de dados e seus instrumentos 15
2.2 Método histórico 16
2.2.1 Idade Moderna 16
2.2.2 Idade Contemporânea 17

3 BIOGRAFIAS RESUMIDAS E PRINCIPAIS OBRAS **18**
3.1 Isaac Newton 18
3.2 Gottfried Wilhelm Leibniz 19
3.3 Michel Rolle 20
3.4 Joseph Louis de Lagrange 20
3.5 Bernhard Placidus Jojann Nepomuk Bolzano 21
3.6 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 21
3.7 Georg Friedrich Bernhard Riemann 22

4 RESULTADO DA PESQUISA **23**
4.1 Prática investigativa sobre estudo do ponto na reta tangente de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ 23
4.2 Os trabalhos sobre cálculo de Newton, Leibniz, Rolle, Lagrange, Bolzano, Weierstrass e Riemann na história da matemática 25
4.3 Teoremas do cálculo diferencial e integral 26
4.3.1 Teorema de Rolle 26
4.3.2 Teorema do valor médio de Lagrange 29
4.3.3 Teorema do valor intermediário 32
4.3.4 Teorema de Bolzano 34
4.3.5 Teorema de Weierstrass 40
4.3.6 Teorema de Riemann para integral definida 42
4.3.6.1 Partição de um intervalo $[a, b]$ 43
4.3.6.2 Partição pontilhada de um intervalo $[a, b]$ 44

4.3.7 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) 49

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **55**

REFERÊNCIAS **56**

1 INTRODUÇÃO

Nesta monografia de conclusão de curso de graduação em Licenciatura em Matemática faz uma abordagem histórica e cronológica sobre os sete principais teoremas do cálculo diferencial e integral e os seus autores (responsáveis), que são considerados como os fundadores do cálculo diferencial e integral, desde Newton e Leibniz até as contribuições de Riemann, por conseguinte este estudo está delimitado nas Idades Moderna e Contemporânea.

Tema

A história da evolução do cálculo diferencial e integral tem registro desde os povos antigos, quando naquela época houve a necessidade de se estudar a Matemática a partir do conceito de se dividir os objetos em partes muito pequenas (infinitesimal), o que ocorria com representação geométrica, anotados em papiros ou tablets (tábuas), com a escrita comum para aquela época. Porém com a linguagem atual, somente a partir da Idade Moderna, com as grandes navegações e a importância da astronomia como guia para as viagens marítimas, que possibilitaram as mudanças de registros matemáticos de localização, velocidade e outros fenômenos através de funções.

De acordo com as pesquisas realizadas, foram sete os principais matemáticos que se destacaram nestas duas eras, sendo que Lagrange desenvolveu os estudos nestas duas eras.

Problema

Os matemáticos pesquisados estavam interessados em encontrar a abscissa pertencente ao domínio de uma função real, cuja ordenada correspondesse ao ponto em que a reta tangente intercepta à curva, para isso utilizaram diferentes métodos, entretanto conseguiram chegar a algum resultado?

Hipótese

Diversos matemáticos desenvolveram/criaram diferentes métodos que foram usados para encontrar um ponto qualquer podendo ser de mínimo ou de máximo de uma curva (gráfico de uma função), em que a reta tangente tem inclinação nula, positiva ou negativa quando não se tratar de pontos críticos, para isto descobriram/criaram diversos teoremas que fundamentaram cientificamente o cálculo diferencial e integral.

Objetivos

Geral

Pesquisar os principais teoremas que formalizaram cientificamente o cálculo moderno, no período de 1643 - 1897.

Específicos

a) Relatar a trajetória do desenvolvimento de sete principais teoremas que estruturaram cientificamente o cálculo diferencial e integral.

b) Diferenciar os métodos e as técnicas desenvolvidas por cada teorema pesquisado e a sua particularidade para resolver problemas matemáticos.

c) Estruturar e organizar cronologicamente os escritos matemáticos de cada teorema dentro de cada era histórica.

d) Demonstrar os sete teoremas.

e) Resolver problemas do cálculo diferencial e integral aplicando os teroemas estudados.

Justificativa

Inicialmente, o autor pensou em pesquisar e escrever - esta monografia - a partir da origem (gêneses) do cálculo diferencial e integral, desde os primórdios da humanidade, procurando saber qual a contribuição de cada povo ou civilização fez para a evolução do tema, como por exemplo, dos egípcios, babilônios, gregos e outros, entretanto, devido a extensão da temática e da grande quantidade de trabalhos acadêmicos e científicos publicados nesta área de pesquisa, resolveu delimitar a pesquisa somente em duas eras

da história da humanidade, pois uma vantagem é pertinente a notação (escrita) praticada naquelas épocas em ser praticamente a utilizada atualmente.

A possibilidade de mudanças na forma de pensar do autor e das pessoas interessadas em relação ao tema está na proposta de ensino e aprendizagem de cálculo tendo como introdução uma breve História da Matemática, pois com o propósito de se escrever a monografia de forma cronológica e destacar as eras históricas, possibilita ao leitor conhecer os fatos que ocasionaram a ruptura de uma forma de pensar matematicamente para as novas descobertas científicas, ou seja, promover um novo paradigma com a descoberta ou criação dos novos teoremas, sobre problemas de otimização (máximos e mínimos) e retas tangentes (velocidades).

A contribuição deste TCC para a comunidade acadêmica e a sociedade em geral se faz em virtude de o texto ser escrito a partir da investigação histórica e cronológica dos matemáticos pesquisados, da sua utilização como leitura para acadêmicos e docentes de Ciências Exatas e Naturais e também de Engenharia, ou até mesmo de outras áreas do conhecimento. Discute-se de modo simples o porquê de se aprender derivadas e integrais.

No decorrer da monografia, em cada teorema apresentado, é feita uma aplicação utilizando um ou mais exemplos matemáticos ou físicos cuja resolução é realizada por meio de um teorema específico, devendo ainda ser utilizado para resolver problemas de taxas relacionadas (problema de escoamento de líquidos), método de Newton (raízes de função), tangentes de duas curvas, diferenciabilidade, monotonia, máximos e mínimos, o princípio de Fermat, interpretação física, interpretação geométrica. Com a Integral de Riemann, estuda-se o cálculo de áreas, a construção da integral, áreas definidas por duas curvas, somas inferiores e superiores.

Esta monografia é composta pelos seguintes elementos: Introdução, Metodologia, Biografias, Resultado da Pesquisa, Considerações Finais, que é a conclusão e as Referências.

Na Introdução, estão todas as informações de caráter técnico e metodológico sobre a monografia (tema). No Capítulo 2, à Metodologia onde são apresentados os principais conteúdos. No capítulo 3, são apresentadas as biografias resumidas com as principais obras dos matemáticos citados no texto. No Capítulo 4, faz-se a apresentação do resultado da pesquisa, detalhando os sete teoremas, inclusive com exemplos matemáticos. Nas Considerações Finais, faz-se uma conclusão da monografia, onde se destaca as diferenças e aplicações dos teoremas.

2 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos as duas Eras Históricas em que o tema desta monografia foi desenvolvido, incluindo um pouco da vida e obra dos principais construtores do Cálculo Diferencial e Integral no decorrer do fim da era moderna e início da contemporânea.

2.1 Tipo de pesquisa

A metodologia da pesquisa utilizada quanto aos objetivos foi à pesquisa teórica (em fontes secundárias) e metodológica. Quanto aos procedimentos, a forma de estudo foi exploratória, porque proporcionou maiores informação a respeito do tema pesquisado. Quanto a metodologia do objeto (autores/construtores) foi bibliográfica, pois foram consultadas diversas obras impressas, conforme descritas na referência desta monografia.

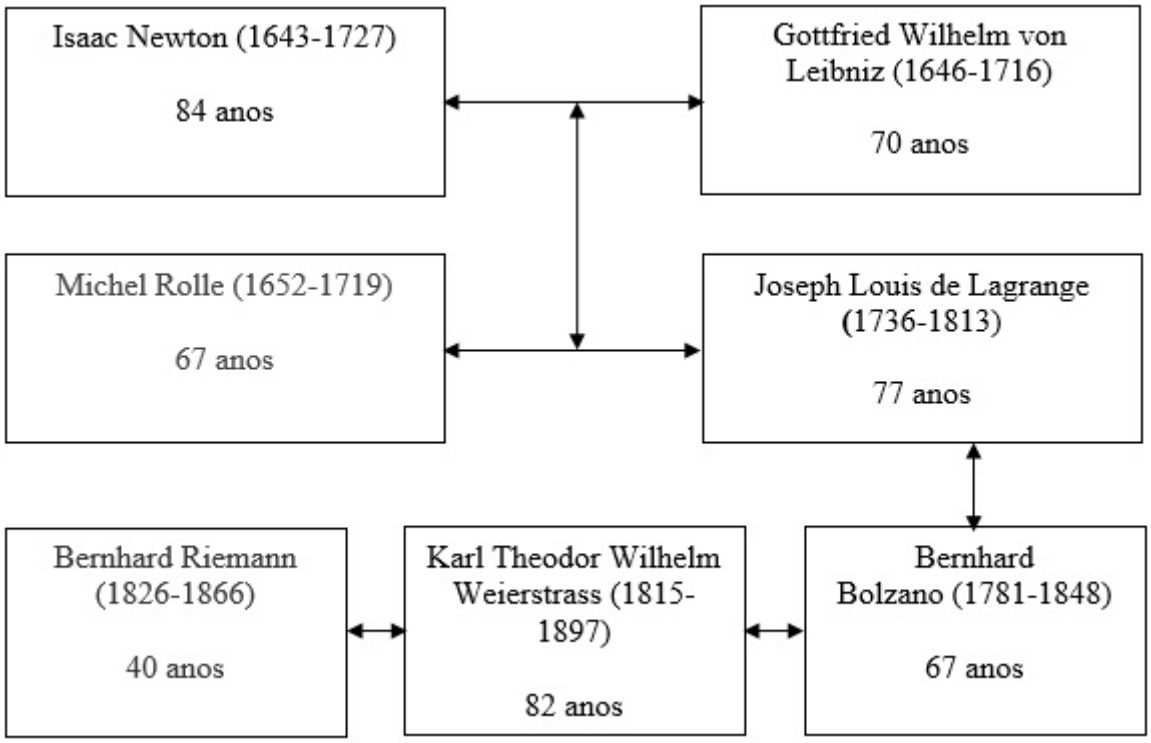
O método de produção foi o dedutivo, porque tomamos como ponto de partida um teorema e seu respectivo enunciado desenvolvido pelo pesquisado, que desenvolveu de um caso particular para um caso geral, ou seja, um teorema resolve um problema específico, porém pode ser utilizado para resolver outros e até mesmo servir para demonstrar ou provar outro.

2.1.1 Coleta de dados e seus instrumentos

Na Figura 2.1, apresentamos um fluxograma cronológico com os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral com o intuito de melhorar a compreensão dos objetivos desta monografia, pois com ele é possível identificar o ano de nascimento e de morte do(s) matemático(s) bem como quantos anos viveram e o grau de entrosamento ou conhecimento entre eles. A respeito da contemporaneidade, Boyer ([1], 2012, p. 269) dedicou um capítulo exclusivamente para Newton e Leibniz em seu livro História da Matemática, devido à contribuição dada por eles ao cálculo e também porque conviveram na mesma época e segundo Boyer ([1]), Leibniz trocou

correspondências com Newton como forma de divulgar o que ele havia escrito (descoberto) sobre derivadas e integrais.

Figura 2.1: Fluxograma cronológico dos sete matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento científico do cálculo diferencial e integral.



Fonte: Fonte: Do Autor (2017).

2.2 Método histórico

A história da humanidade está dividida em eras ou idades históricas. Nesta monografia serão abordados os principais conteúdos científicos do cálculo diferencial e integral a partir da segunda metade da era Moderna e o início da idade Contemporânea, compreendendo um período de duzentos e cinquenta e quatro anos (254) de revolução matemática, marcados desde o nascimento de Newton até à morte de Weierstrass.

2.2.1 Idade Moderna

Segundo Vicentino (2000), a Idade Moderna é o período da história que tem início em 1453 e vai até o ano de 1789, data da Revolução Francesa (aproximadamente 350 anos). Dentro desse período da história se destacam:

A Expansão Marítima Europeia;

A Revolução Comercial e o Mercantilismo;

O Colonialismo Europeu na América;

O Renascimento Cultural;

A Reforma Protestante e Contrarreforma;

O Absolutismo;

O Iluminismo.

Os quatro matemáticos que se destacaram nesta era ou idade foram: Newton, Leibniz, Rolle e Lagrange.

2.2.2 Idade Contemporânea

A Idade Contemporânea é estudada de 1789, época da Revolução Francesa, até os dias atuais. Dentro desse período, vários acontecimentos políticos, econômicos e sociais, receberam influência da Revolução Francesa, como a Independência do Brasil e a Revolução Industrial. Até os dias de hoje diversos outros fatos marcaram a história Contemporânea. Teve início com o amadurecimento das ideias iluministas disseminadas pela Revolução Francesa, contribuindo com o progresso científico na busca de novos conhecimentos para entender o homem e a sociedade.

Vicentino (2000) divide a idade contemporânea em dois períodos: o primeiro engloba os Séculos XVIII e XIX, e segundo, o Século XX até os dias atuais.

Os matemáticos que se destacaram nesta era ou idade foram: Lagrange (na transição), Bolzano, Weierstrass e Riemann.

3 BIOGRAFIAS RESUMIDAS E PRINCIPAIS OBRAS

3.1 Isaac Newton

Segundo Boyer ([1], 2002, p.269), **Isaac Newton**, o sucessor de Barrow, nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, o ano da morte de Galileu. Ele foi educado pela avó enquanto frequentava a escola da vizinhança. Um tio do lado materno, que se formara em Cambridge, percebeu no sobrinho um talento matemático incomum e convenceu a mãe de Isaac a matriculá-lo em Cambridge. O jovem Newton então ingressou no Trinity College em 1661, provavelmente sem pensar em vir a ser um matemático, pois não estudou particularmente o assunto. A química pareceu a princípio ser seu principal interesse, e ele conservou um forte interesse por essa disciplina durante a sua vida. Porém no início de seu primeiro ano de estudos ele comprou e estudou um exemplar de Euclides, e logo depois leu a *Clavis* de Oughtred, a *Geometria a Renato Descartes* de Schooten, a *Óptica* de Kepler, as obras de Viète, e o que talvez o que tenha sido o mais importante de todos para ele, *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Também veio a conhecer obras de Galileu, Fermat, Huygens e outros.

Em 1664 Newton parece ter atingido as fronteiras do conhecimento matemático e estava pronto para fazer suas contribuições. Suas primeiras descobertas, já de 1665, resultaram do conhecimento que obteve em exprimir funções em termos de séries infinitas - o mesmo que Gregory estava fazendo na Itália pela mesma época, embora dificilmente Newton pudesse saber disso.

O período que se estende de 1665 a 1666, logo depois de Newton ter obtido seu grau A. B., o Trinity College foi fechado por causa da peste, e Newton se retirou deste cenário para sua casa. O resultado foi o mais produtivo período de descoberta matemática jamais referida, pois foi durante esses meses, Newton mais tarde afirmou, que fizera quatro de suas principais descobertas: 1) o teorema binomial, 2) o cálculo, 3) a lei da gravitação e 4) a natureza das cores.

A obra *Principia* foi o primeiro tratado de Newton a ser publicado, mas foi o último na ordem de composição. A fama lhe tinha vindo relativamente cedo, pois fora eleito para a Royal Society em 1672, quatro anos antes de ter construído seu telescópio refletor (a idéia desse tinha ocorrido também a Gregory antes ainda). *Os Principia* obtiveram aprovação entusiástica, e em 1689 Newton foi eleito para representar Cambridge no Parlamento Britânico. A teologia e a cronologia também lhe chamaram a atenção. Parece que era um cripto-Unitário, embora externamente professando a visão religiosa Trinitária do tempo. Em seus últimos anos as honrarias choveram sobre Newton.

3.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

De acordo com Boyer ([1], 2002, p. 275), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716) nasceu em Leipzig, onde aos quinze anos entrou na universidade e aos dezessete obteve o grau de bacharel. Estudou teologia, direito, filosofia e matemática na universidade e ás vezes é considerado o último sábio a conseguir o conhecimento universal. Aos vinte, ele estava preparado para o grau de doutor em direito, mas esse lhe foi recusado por causa de sua pouca idade. Deixou então Leipzig e obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf em Nüremberg, onde lhe foi oferecido um posto de professor de direito, que ele recusou. Entrou então no serviço diplomático, primeiro para o eleitor de Mainz, depois para a família de Brunswick, e finalmente para os hanoverianos, a quem serviu durante quarenta anos.

De seus estudos sobre séries infinitas e o triângulo harmônico Leibniz se voltou para a leitura das obras de Pascal sobre a ciclóide e outros aspectos da análise infinitesimal. Em particular, foi ao ler a carta de Amos Dettonville sobre Traité des sinus du quart de cercle que Leibniz diz ter uma luz jorrado sobre ele.

Leibniz desenvolveu a regra para a derivação de função composta conhecida como a Regra da Cadeia, conforme a seguir:

Seja $u = g(x)$ uma função derivável e

$$(fog)'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Percebeu então, em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que formam a área.

3.3 Michel Rolle

Sobre **Michel Rolle** (1652-1719), Boyer ([1], 2002, p. 300), cujo nome é lembrado em conexão com o teorema de Rolle, publicado em 1691 num obscuro livro sobre geometria e álgebra intitulado Méthode pour résoudre les égalitéz. O teorema agora importante para o Cálculo, foi dado apenas incidentalmente por Rolle a propósito de uma resolução aproximada de equações.

Rolle também levantou questões embaraçosas a propósito da geometria analítica, especialmente quanto à solução gráfica de equações de Descartes, tão popular na época. Em sua obra mais conhecida, o Traité d'algèbre de 1690, Rolle parece ter sido o primeiro a afirmar que existem n valores para a raiz $n-$ésima de um número, mas só foi capaz de provar isso para $n = 3$, pois morreu antes que os trabalhos nesse sentido de Cotes e De Moivre aparecessem. Rolle foi o matemático mais capaz no grupo da Académie des Sciences que criticava o Cálculo.

3.4 Joseph Louis de Lagrange

De acordo com Boyer ([1], 2002, p.323), **Joseph Louis de Lagrange** (1736-1813), nasceu em Turim, foi educado lá e tornou-se cedo professor de matemática na academia militar de Turim. Lagrange é em geral considerando o mais notável matemático do século dezoito, sendo somente Euler um sério rival, e há aspectos de sua obra que não são fáceis de descrever numa exposição histórica elementar. Entre esses está a primeira e talvez a maior contribuição de Lagrange – o cálculo de variações. Esse era um ramo novo da matemática, cujo nome se origina de notações usadas por Lagrange aproximadamente a partir de 1760.

Foi durante sua estadia em Berlim que Lagrange publicou importantes memórias sobre mecânica, o problema dos três corpos, suas primeiras idéias sobre funções derivadas, e importantes trabalhos sobre a teoria das equações. Em 1767 ele publicou um artigo sobre aproximação de raízes de equações polinomiais por meio de frações contínuas; em outro artigo em 1770 ele considerou a resolubilidade de equações em termos de permutações de suas raízes. Foi esse o último que levou à enormemente e bom-sucedida teoria dos grupos e às provas de Galois e Abel da impossibilidade de resolver, em termos usuais, as equações de grau maior que quatro. O nome Lagrange é ligado até hoje ao teorema da teoria dos grupos. Ao descobrir que a resolvente de uma quíntica, longe de ser de grau menor que cinco, como se esperaria, era de seis, Lagrange conjeturou que equações polinomiais de grau superior a quatro não são em geral resolúveis no sentido usual.

Estando sempre à procura de generalidade e elegância no tratamento de problemas,

Lagrange foi o inventor do método da variação de parâmetro na resolução de equações diferencias lineares não-homogêneas. Como tantos dos maiores matemáticos modernos Lagrange tinha um profundo interesse pela teoria dos números. Embora não usasse a linguagem das congruências, Lagrange provou, em 1768, equivalente do enunciado que para um módulo primo p a congruência $f(x) = 0$ não pode ter mais que n soluções distintas, onde n é o grau (exceto no caso trivial em que todos os coeficientes de $f(x)$ são divisíveis por p). Dois anos depois ele publicou uma demonstração do teorema, para o qual Fermat dissera ter uma prova, que diz que todo inteiro positivo é a soma de no máximo quatro quadrados perfeitos. Ao mesmo tempo ele deu também a primeira prova de um resultado conhecido como teorema de Wilson, que aparecera nas Meditations algebraicae de Waring no mesmo ano. Lagrange contribuiu também para a teoria das probabilidades, mas nesse campo ele ficou abaixo de Laplace, que era mais jovem.

3.5 Bernhard Placidus Jojann Nepomuk Bolzano

Segundo Corrêa ([5], p. 45), **Bernhard Placidus Jojann Nepomuk Bolzano** (1781 - 1848) nasceu em Praga, Boêmia, atual República Tcheca, em 5 de outubro de 1781 e morreu em 18 de dezembro de1848 em Praga. Interessou-se por Matemática, Filosofia e Teologia. Foi padre, mas tinha idéias contrárias às da igreja Católica, também adotou posições críticas relativas às condições sociais do Império Austro-húngaro, por isso foi obrigado a aposentar-se em 1824 pelo Imperador Franz I da Áustria.

3.6 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

De acordo com Boyer ([1], 2002, p. 384), **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815-1897). Weierstrass obteve seu certificado de professor aos vinte e seis anos, e por mais dez anos ensinou em várias escolas secundárias. Em 1854 porém um artigo sobre funções abelianas, publicado no Journal de Crelle, trouxe-lhe tal reputação que logo depois lhe foi oferecido, e ele aceitou, um posto de professor na Universidade de Berlim. Weierstrass tinha então quarenta anos, o que o tornou uma exceção notável à idéia comum de que um grande matemático deve revelar-se cedo. Apesar de seu início tardio, durante o último terço do século muitos o consideraram o maior analista do mundo.

Uma das importantes contribuições de Weierstrass à análise chama-se prolongamento analítico. Weierstrass, portanto, definia uma função analítica como sendo uma série de potência juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico. A importância de trabalho como este de Weierstrass é sentida especialmente

na física matemática, em que soluções de equações diferenciais raramente são achadas em qualquer forma que não seja uma série infinita. Weierstrass tentou separar o cálculo da geometria e baseá-lo no conceito de número apenas. Weierstrass não publicou suas idéias sobre a aritmatização da análise, mas elas foram difundidas por estudantes, que assistiram as suas aulas.

3.7 Georg Friedrich Bernhard Riemann

Segundo Boyer ([1], 2002, 377), **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1822-1866), filho de um pasto de aldeia, foi educado em condições muito modestas, permanecendo sempre fisicamente frágil e tímido de modos. Teve no entanto boa instrução, primeiro em Berlim depois em Gottingen, onde obteve esse doutorado com uma tese sobre teoria das funções de variável complexa. Em 1854 Riemann tornou-se Privatdozent na Universidade de Gottingen, e segundo o costume ele foi designado para apresentar um habilitationschrift perante o corpo docente. O resultado no caso Riemann foi o mais célebre conferência probacionáriada história da matemática, pois apresentava uma profunda e ampla visão de todo o domínio da geometria. Riemann viu que a geometria nem sequer deveria necessariamente tratar de pontos ou retas ou do espaço no sentido ordinário, mas de coleções de n-uplas que são combinadas segundo certas regras. O próprio Riemann contribuiu grandemente para a física teórica em muitas direções, e, portanto foi apropriado que em 1859 ele fosse nomeado sucessor de Dirichelet na cadeira em Gottingen que Gauss acupara. Ao mostrar que a geometria não-euclidiana com soma dos ângulos maior que dois é realizada sobre a superfície de uma esfera Riemann essencialmente provou a consistência dos axiomas de que a geometria deriva. A unificação da geometria que Riemann tinha conseguido era especialmente relevante no aspecto microscópico da geometria diferencial, ou geometria "da pequena vizinhança". A geometria analítica, ou "em grande"não mudara muito. Na verdade, a conferência de Riemann foi feita mais ou menos a meio tempo da auto-aposentadoria geométrica de Plucker, durante a qual tinha havido uma pausa na atividade sobre geometria analítica na Alemanha.

4 RESULTADO DA PESQUISA

4.1 Prática investigativa sobre estudo do ponto na reta tangente de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

Um dos questionamentos feitos por acadêmicos em sala de aula é sempre para que serve aquele conteúdo que está sendo ensinado pelo professor. Por isso muitas das vezes pergunta: por que estudar derivada? Uma consequência direta da aprendizagem sobre limites (assunto que antecede à derivada nos dias atuais) é a sua aplicação na definição de derivada, visto que a mesma ocorre da seguinte maneira: segundo Guidorizzi ([7], 2007, p. 137), a definição de derivada de uma função em um ponto p é:

Definição 4.1 *Seja p uma função e p um ponto em seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}, \tag{4.1}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se f'(p) (leia: f linha de p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}. \tag{4.2}$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é *derivável* ou *diferenciável* em p.

A origem dos estudos de derivada são atribuídos ao inglês Isaac Newton (1643 – 1727) e ao alemão Leibniz (1646 – 1716). O conceito é consequência dos estudos sobre o coeficiente angular da reta quando o denominador é nulo e posteriormente de taxa de variação média (TVM) de uma função na vizinhança de um ponto p quando $\Delta t \to 0$, ou da aplicação de limite no quociente de Newton, conforme definido nas Equações (4.1) e (4.2).

A taxa de variação média (TVM) de uma função é calculada pelo seguinte quociente:

$$TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{4.3}$$

para $b \neq a$.

Por exemplo, para uma função constante, $f(x) = k$, a taxa de variação média é nula, visto que

$$TVM = \frac{k-k}{b-a} = \frac{0}{b-a} = 0.$$

para $b \neq a$.

A interpretação deste resultado é de que uma função constante não varia com a variação da variável independente. Neste exemplo, é a variável x, mas pode ser o tempo t ou um parâmetro qualquer.

A função linear $f(x) = ax$ tem taxa de variação média constante e igual ao coeficiente a.

Um exemplo aplicado à Física é o seguinte:

Exemplo 4.1 *Uma partícula desloca-se no plano conforme a função horária de sua posição.*

$$s(t) = \frac{t^2-4}{t-2}. \tag{4.4}$$

Qual é a posição da partícula no instante $t = 2$? Adotaremos o SI de medidas.

A resolução é simples: basta substituir $t = 2$ na função (4.4) e encontrar a posição da partícula. Com efeito:

$$s(2) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}.$$

Qual é o resultado desta divisão? Como este quociente tem infinitas soluções, porque $0 \times s(2) = 0$, $\forall s(2) \in \mathbb{R}$, o definimos então como uma indeterminação matemática (IM).

Para resolver este exemplo, devemos utilizar a teoria de limite. Por isso,

$$\lim_{t\to 2} s(t) \Rightarrow \lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t-2}. \tag{4.5}$$

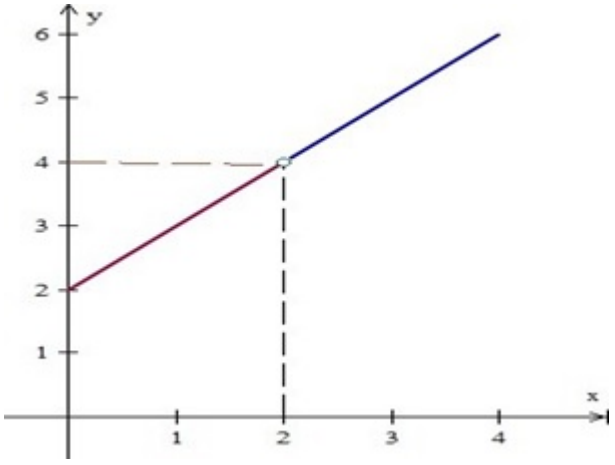
Fatorando-se o numerador de (4.5), tem-se:

$$\lim_{t\to 2} s(t) \Rightarrow \lim_{t\to 2} \frac{(t+2)(t-2)}{t-2} \Rightarrow \lim_{t\to 2}(t+2) = 4\text{m}.$$

Portanto, a posição da partícula no plano é $s(2) = 4m$, isto é, a partícula encontra-se $4m$ à direita da origem.

Conclui-se que a função (4.4) não está definida em $t = 2s$, logo ela é descontinua neste ponto. A Figura 4.2 representa a interpretação gráfica deste problema.

Figura 4.2: Gráfico da função 4.5: $s(t) = \frac{t^2-4}{t-2}$.



Fonte: Do Autor, com o auxílio do winplot (2016).

Diante dos fatos abordados anteriormente, surge a grande necessidade de se pesquisar profundamente como o ensino de cálculo está organizado didaticamente nos livros e programas (currículos) universitário. De acordo com o levantamento feito em alguns livros, como por exemplo, as obras de [9] e [7], o cálculo diferencial e integral orbita em torno dos autores citados na próxima seção.

4.2 Os trabalhos sobre cálculo de Newton, Leibniz, Rolle, Lagrange, Bolzano, Weierstrass e Riemann na história da matemática

Quais são as principais aplicações de derivada? A derivada tem aplicação em quase todas as grandes áreas do conhecimento científico desenvolvido pela humanidade. Na área de Ciências Exata e da Terra, podemos destacar dentre várias aplicações, aquelas que decorem (envolvem) dos seguintes teoremas: 1. Teorema de Rolle (TR), 2. Teorema do Valor Médio (TVM) (ou Teorema de Lagrange (TL)), 3. Teorema do Valor Intermediário (TVI), 4. Teorema de Bolzano (TB), 5. Teorema de Weierstrass (TW), 6. Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) e o 7. Teorema de Riemann.

Os sete (7) teoremas citados anteriormente estão em ordem cronológicas de vida e obra de seus autores. Alguns autores foram contemporâneos e compartilharam seus conhecimentos que desenvolveram os alicerces do cálculo diferencial e integral. O TVI

não apresenta a sua autoria, porém antecede ao TB, conforme literatura pesquisada, por isso, neste artigo ele está posto antes do TB.

Com os teoremas citados anteriormente, pode-se estudar problemas de todas as áreas do conhecimento científico, como as seguintes de acordo com a classificação do CNPq: 1. Ciências Exatas e da Terra, 2. Ciências Biológicas, 3. Engenharias, 4. Ciências da Saúde, 5. Ciências Agrárias, 6. Ciências Sociais Aplicadas, 7. Arquitetura e Urbanismo, 8. Ciências Humanas, 9. Linguística, Letras e Artes e 10. Outras.

As demonstrações dos teoremas serão abordadas no decorrer dos estudos qualitativos de funções. Dentre os conteúdos podemos citar alguns que são solucionados por derivadas: pontos críticos, crescimento e decrescimento, e esboço de gráficos de funções.

4.3 Teoremas do cálculo diferencial e integral

4.3.1 Teorema de Rolle

De acordo com Lima ([9], 1997, p. 96), o Teorema de Rolle, apresenta o seguinte enunciado:

Teorema 4.1 *(TR)*

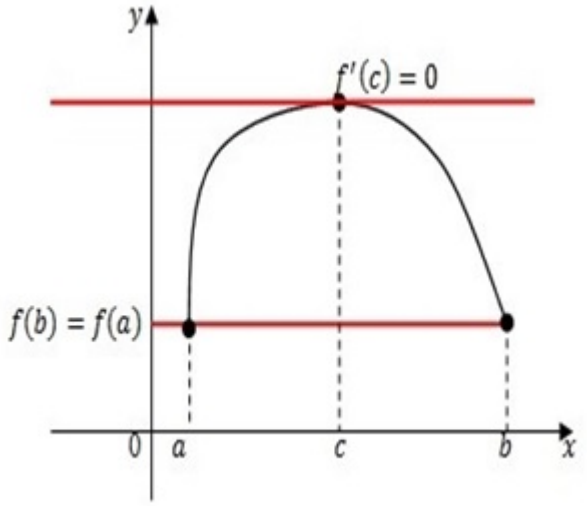
" Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$."

Este teorema foi demonstrado aproximadamente cem anos depois por Weierstrass e a demonstração a seguir encontra-se em Guidorizzi ([7], 2007, p. 458), com pequenas modificações e adaptações.

> Se f for constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ em (a, b); logo, existirá c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. Suponhamos, então, que f não seja constante em $[a, b]$. Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, pelo teorema de Weierstrass, existem x_1 e x_2 em $[a, b]$, tais que $f(x_1)$ e $f(x_2)$, são respectivamente, os valores de máximo e mínimo de f em $[a, b]$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, pois estamos supondo f não constante em $[a, b]$, segue x_1 ou x_2 pertence a $]a, b[$ (estamos usando aqui a hipótese $f(a) = f(b)$), daí $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$. Portanto, existe c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. (GUIDORIZZI, [7], 2007, p. 458).

A Figura 4.3 ilustra o Teorema de Rolle, onde a função f é contínua no intervalo $[a, b]$ e possui um ponto de máximo neste intervalo. Como $f(a) = f(b)$, logo existe uma

Figura 4.3: Teorema de Rolle.



Fonte: Do Orientador (2016).

reta formada pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. A função que representa esta reta é uma função constante, cuja derivada é nula em todos os pontos do intervalo (a, b) e é igual a zero.

A seguir um exemplo com o objetivo de fixar o entendimento do teorema de Rolle.

Exemplo 4.2 *([6], 2016) Seja* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *contínua, definida por*

$$f(x) = 3x^4 - x^2 + 1, \tag{4.6}$$

com $a = -1$ *e* $b = 1$*, sendo* $f(-1) = f(1) = 3$*. Detemine* c *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Como f é contínua em $[-1, +1]$, $f(-1) = f(+1) = 3$ e derivável em $(-1, 1)$, temos que pelo teorema de Rolle, podemos encontrar pelo menos um c que satisfaça $f'(c) = 0$.

O coeficiente angular da reta secante $y_s = 3$, que passa pelos pontos $(-1, 3)$ e $(+1, 3)$ é nulo porque a função é constante, consequentemente $y'_s = \frac{dy_s}{dx} = 0$. Pelo TR, a reta tangente que passa pelo ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante. Sabe-se que duas retas paralelas têm o mesmo coeficiente angular, logo pela primeira derivada de (4.6), é possível encontrá-lo, conforme procedimentos algébricos a seguir:

$$f'(x) = 12x^3 - 2x, \tag{4.7}$$

e

$$f'(c) = 12c^3 - 2c. \tag{4.8}$$

Igualando-se (4.8) a zero, tem-se os zero da função (4.6):

$$12c^3 - 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad c(12c^2 - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$c_2 = 0 \quad \text{e} \quad c_{1,3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Portanto, existem três pontos críticos da função: $c_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $c_2 = 0$ e $c_1 = +\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Conhecendo-se o(s) valor(es) de c_i, para $i = 1, 2, 3$ pode-se determinar a equação da reta tangente aos pontos $(c_1, f(c_1)) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{11}{12}\right)$, $(c_2, f(c_2)) = (0, 1)$ e $(c_3, f(c_3)) = \left(+\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{11}{12}\right)$.

Por exemplo, caso queira saber a equação da reta tangente y_t que passa pelo ponto $(c_3, f(c_3)) = \left(+\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{11}{12}\right)$ pertencente a curva da função (4.6), procede-se da seguinte maneira:

1º) a equação da reta tangente ao ponto dado é:

$$y_t - f(c_3) = f'(c_3)(x - c_3); \tag{4.9}$$

2º) o coeficiente angular da reta tangente é:

$$f'(c_3) = f'\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 12\left(\frac{6}{6}\right)^3 - 2\left(\frac{6}{6}\right) = 0.$$

3º) substituir $f'(c_3) = 0$, $c_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ e $f(c_3) = \frac{11}{12}$ na equação (4.9), tem-se:

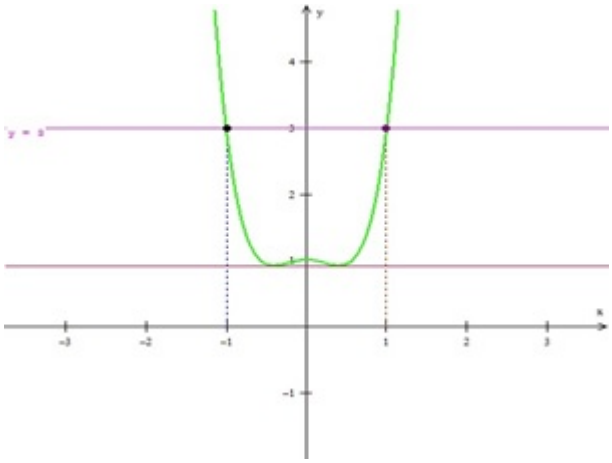
$$y_t - \frac{11}{12} = 0\left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva da função (4.6) e passando pelo ponto $(c_3, f(c_3)) = \left(+\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{11}{12}\right)$ é:

$$y_t = \frac{11}{12}. \tag{4.10}$$

Na Figura 4.4, estão representadas a reta secante que passa pelos pontos $(-1, 3)$ e $(+1, 3)$, constante e definida por $y_s = 3$; e a reta tangente aos pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_2, f(c_2))$, definida pela função 4.10. Observe que o coeficiente angular das retas y_s e y_t são nulos.

Figura 4.4: Gráfico da função $f(x) = 3x^4 - x^2 + 1$, em que foram aplicados os fundamentos do Teorema de Rolle, para encontrar a equação da reta tangente onde $f'(c) = 0$.



Fonte: Dos Autores (2016)

A seguir, estudaremos o teorema do valor médio, TVM, também conhecido como Teorema de Lagrange (1736 - 1813), que diferencia do teorema de Rolle pelo fato de que $f(a) \neq f(b)$.

4.3.2 Teorema do valor médio de Lagrange

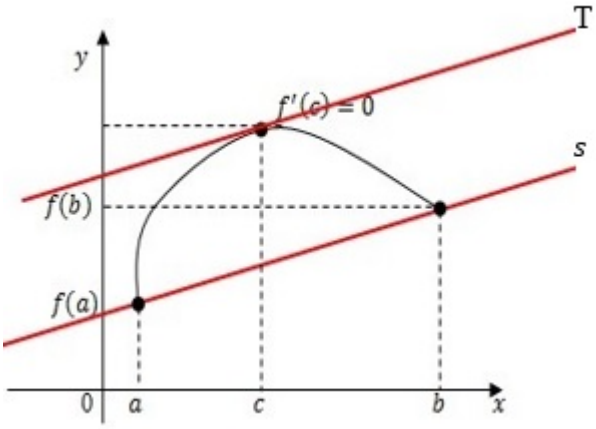
De acordo com Guidorizzi ([7], 2007, p. 225):

> **Teorema 4.2** *Se f contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um c em $]a, b[$ tal que*
>
> $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{4.11}$$
>
> *ou*
>
> $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{4.12}$$

Demonstração 4.1 *Consideremos a função auxiliar $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$, de modo que $g(b) = g(a) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas, $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Geometricamente, de acordo com Guidorizzi ([7], 2007, p. 225), este teorema contanos que s é uma reta passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ então existirá pelo menos um ponto $(c, f(c))$, com $a < c < b$, tal que a reta tangente ao gráfico de f, neste ponto é paralela à reta s. Como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o coeficiente angular de s, conforme representado no gráfico da Figura 4.5.

Figura 4.5: Teorema do Valor Médio.



Fonte: Do Autor (2016).

O teorema do valor médio (TVM) também tem uma interpretação em termos físicos (cinemática): se um objeto está em movimento e se a sua velocidade média v, então, durante esse percurso (intervalo $[a, b]$), há um instante (ponto c) em que a velocidade instantânea é igual a v.

Com o objetivo de reforçar o ensino e a aprendizagem sobre o TVM apresentaremos o exemplo seguinte.

Exemplo 4.3 *([6], 2016)*

Seja $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$. *Encontre a reta tangente ao ponto* $(c, f(c))$ *no intervalo* $[0, 1]$.

Para solucionar este exemplo utiliza-se o Teorema de Lagrange. Segue que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A primeira derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

e em $x = c$ é:

$$f'(c) = 3c^2 - 2c + 1. \tag{4.13}$$

Por outro lado, o coeficiente da reta secante é:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2-1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1. \tag{4.14}$$

Igualando-se as equações (4.13) e (4.14), tem-se:

$$3c^2 - 2c + 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 3c^2 - 2c = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$c(3c-2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0 \notin (0,1) \quad \text{e} \quad \Rightarrow c = \frac{2}{3} \in (0,1).$$

Portanto, $c = \frac{2}{3}$.

As coordenadas do ponto $P = (c, f(c)) = (\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right))$, são:

$$f(c) = c^3 - c^2 + c + 1 \qquad \Rightarrow \qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1 \qquad \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{41}{27}.$$

Assim, o ponto P pertencente a $f(x)$ é:

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{41}{27}\right)$$

O coeficiente angular da reta tangente t que passa por P é $f'(c)$:

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 1.$$

A equação da reta tangente a curva dada passando pelo ponto P, é:

$$y - c = f'(c)(x - c).$$

Substituir $c = 2/3$ e $f'(2/3) = 1$ na equação da reta tangente, tem-se:

$$y - \frac{2}{3} = 1\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

Portanto, a equação da reta tangente ao ponto $P = (c, f(c))$ no intervalo $[0, 1]$, da função $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, é:

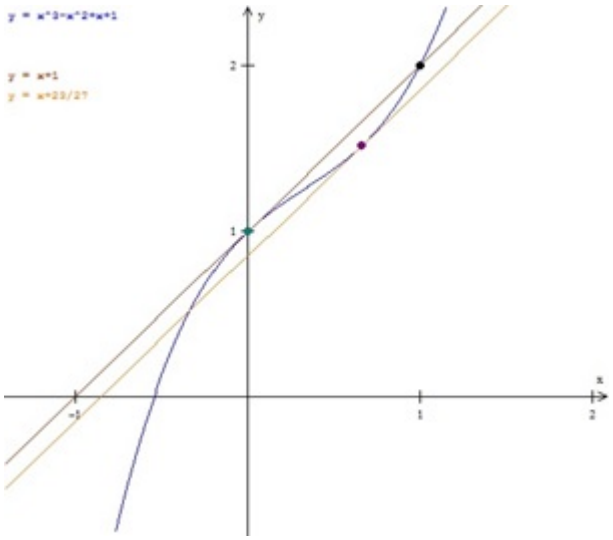
$$y = x + \frac{23}{17}. \tag{4.15}$$

A equação da reta secante a curva da $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ nos pontos $(a, f(a)) = (0, 1)$ e $(b, f(b)) = (1, 2)$ é:

$$g(x) = x + 1. \tag{4.16}$$

Concluindo-se com isto que as duas retas têm coeficientes angulares iguais e portanto são paralelas. A Figura 4.6 contém o gráfico da função $f(x)$, da reta secante $g(x)$ e da função tangente y.

Figura 4.6: Gráfico das funções $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $g(x) = x + 1$ e $y = x + 23/27$.



Fonte: Do Autor com a utilização do *software winplot* (2017).

Como foi estudado neste exemplo, pode-se obter a equação da reta tangente a uma curva, em um intervalo fechado de seu domínio (porque garante a continuidade da função), a partir do coeficiente angular da reta secante. O que diferencia do TR é que a reta secante pode ter inclinação diferente de zero, ou seja, $f(a) \neq f(b)$.

Na seção seguinte estudaremos o Teorema do Valor Intermediário.

4.3.3 Teorema do valor intermediário

Sobre o TVI, Guidorizzi ([7], 2007, p. 122) apresenta o seguinte enunciado[1]:

Teorema 4.3 *"Se f for contínua em [a,b] e d for um número real compreendido entre f(a) e f(b) então existirá pelo menos um c em [a,b] tal que f(c) = d."*

A demonstração a seguir encontra-se em (GUIDORIZZI, 2007, p. 512).

[1]O orientador conjuntamente com o autor fez adequação da letra minúscula grega γ com a letra d para corresponder à Figura 4.7.

Demonstração 4.2 *Para fixar o raciocínio, suponhamos que* $f(a) < d < f(b)$. *Consideremos a função*

$$g(x) = f(x) - d, \quad x \quad em \quad [a, b].$$

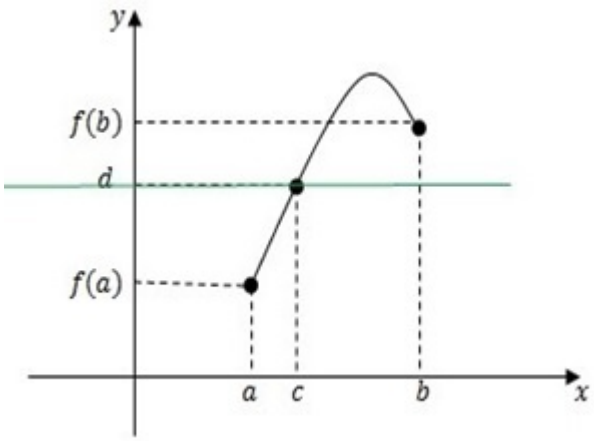
Como f é contínua em [a,b], g também o é; temos, ainda

$$g(a) = f(a) - d < 0 \quad e \quad g(b) = f(b) - d > 0.$$

Pelo teorema do anulamento, existe c em [a,b] tal que g(c) = 0, ou seja, f(c) = d. (GUIDORIZZI, 2007, p. 512).

A Figura 4.7 ilustra o TVI. Uma consequência prática deste teorema (corolário) é no que diz respeito ao conjunto imagem de uma função, pois, segundo Lima ([9], 1997, p. 76), o conjunto imagem de uma função é um intervalo fechado, aberto ou semiaberto. A demonstração deste corolário encontra-se na mesma obra (Ibdem).

Figura 4.7: - Teorema do Valor Intermediário.



Fonte: Dos Autores (2016)

O Teorema do Valor Intermediário assegura que todo elemento do domínio possui uma imagem em um intervalo do contradoínio, isto é, se o domínio é um intervalo fechado, aberto ou semiaberto, então a imagem também é respectivamente um intervalo fechado, aberto ou semiaberto no contradomínio de f.

O corolário a seguir formaliza a consequência do TVI comentado nos parágrafos anteriores. Segundo Lima ([9], 1997, p. 76):

Corolário 4.1 *"Se* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *é contínua então f(I) é um intervalo."*

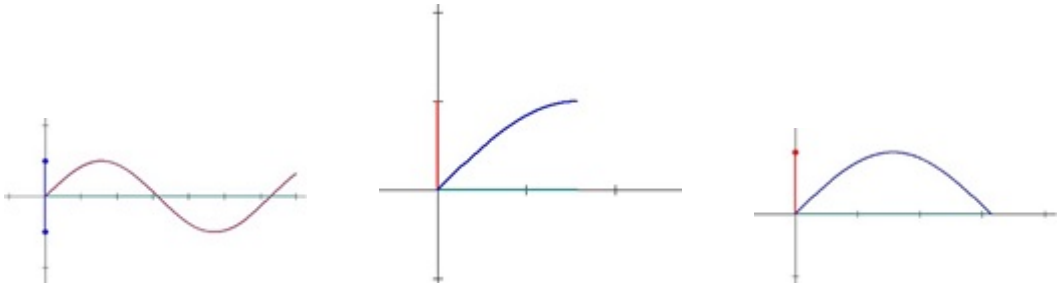
Demonstração 4.3 *Isto é óbvio se f é constante. Caso contrário, sejam* $\alpha = \inf(I) = \inf\{f(x); x \in I\}$ *e* $\beta = \sup(I) = \sup\{f(x); x \in I\}$. *Se f(I) for ilimitado, tomaremos* $\alpha = -\infty$ *e/ou* $\beta = +\infty$, *Para provar que f(I) é um intervalo (aberto, fechado ou semiaberto) cujos extemos são* α *e* β, *tomemos d tal que* $\alpha < d < \beta$. *Pelas efinições de* inf *e* sup, *existem a e* $b \in I$ *tais que* $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \geq \beta$. *Pelo Teorema 3 (TVI) existe* $c \in [a, b]$, *logo* $c \in I$, $f(c) = d$. *Assim,* $d \in f(I)$. *Isto prova que* $]\alpha, \beta[\subset f(I)$. *Como* α *é o* inf *e* β *é o* sup *de* $f(I)$, *nenhum número real menor do que* α *ou maior do que* β *pode estar em f(I). Portanto, f(I) é um intervalo cujos extremos são* α *e* β. *(LIMA, [9], 1997, p. 76).*

Observação 4.1 *Se I = [a,b] é um intervalo compacto*[2] *então f(I) é também um intervalo compacto. Mas se I não é fechado ou é ilimitado, f(I) pode não ser do mesmo tipo que I."*

Exemplo 4.4 *Segundo Lima ([9], 1997, p.76), "Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sin(x)$. *Tomando sucessivamente intervalos abertos* $I_1 =]0, 7[$, $I_2 =]0, \pi/2[$ *e* $I_3 =]0, \pi[$ *temos que* $f(I_1) = [-1, +1]$, $f(I_2) =]0, 1[$ *e* $f(I_3) =]0, 1]$."

A Figura 4.8 ilustra os três casos de conjunto imagem (fechado, aberto e semiaberto) para intervalos abertos contidos no domínio de f.

Figura 4.8: Os gráficos da função seno em três intervalos abertos, porém as imagens são, respectivamente, intervalos fechado, aberto e semiaberto.



Fonte: Do Orientador com o auxílio do *winplot*.

A seguir estudaremos o Teorema de Bolzano que é usado para verificar a existência de pelo menos uma raiz em um intervalo fechado do domínio de f. Bastante utilizado em métodos numéricos, para verificar a existência de uma raiz real em um intervalo dado.

4.3.4 Teorema de Bolzano

O Teorema de Bolzano (1781 – 1848) é um caso particular do TVI, i.e., quando $d = 0$, pois, segundo Guidorizi (2007, p. 121):

[2]Segundo Lima ([9], 1997, p. 53):"Um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ chama-se *compacto* quando é limitado e fechado.

Teorema 4.4 *"Se f for contínua no intervalo fechado [a,b] e se f(a) e f(b) tiverem sinais opostos, então existirá pelo menos um c em [a,b] tal que f(c) = 0."*

Sobre esse teorema, Guidorizzi (2007, p. 511) apresenta a seguinte de demonstração, usando os intervalos encaixantes.

Demonstração 4.4 *Para fixar o raciocínio, suponhamos* $f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$ *(ver FIGURA 4.9). Façamos* $a = a_0$ *e* $b = b_0$*; seja* c_0 *o ponto médio do segmento* $[a_0, b_0]$*, conforme Figura 4.10. Temos*

$$f(c_0) < 0 \quad ou \quad f(c_0) \geq 0.$$

Suponhamos $f(c_0) < 0$ *e façamos* $c_0 = a_1$ *e* $b_0 = b_1$*. Temos,* $f(a_1) < 0$ *e* $f(b_1) > 0$ *(ver FIGURA 4.11). Seja* c_1 *o ponto médio do segmento* $[a_1, b_1]$*, conforme Figura 4.12. Temos*

$$f(c_1) < 0 \quad ou \quad f(c_1) \geq 0.$$

Suponhamos $f(c_1) \geq 0$ *e façamos* $a_2 = a_1$ *e* $c_1 = b_2$ *(ver FIGURA 4.13). Assim,* $f(a_2) < 0$ *e* $f(b_2) \geq 0$*. Prosseguindo com este raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos*

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n]$$

que satisfaz as condições da propriedade dos intervalos encaixantes e tal que para todo n

$$f(a_n) < 0 \quad e \quad f(b_n) \geq 0. \tag{4.17}$$

Seja c o único número real tal que, para todo n,

$$a_n \leq c \leq b_n.$$

As sequências de termos gerais a_n *e* b_n *convergem para c. Segue, então, da continuidade de f, que*

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c). \tag{4.18}$$

Segue das Equações (4.19) e (4.15) que

$$f(c) \leq 0 \quad e \quad f(c) \geq 0. \tag{4.19}$$

e, portanto, f(c) = 0.

As Figuras 4.9 a 4.14 mostram o percurso dos intervalos encaixantes utilizados para demonstrar o TB.

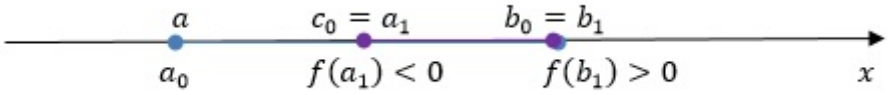
Figura 4.9: Intervalo [a,b] com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. O produto de f(a) por f(b) é negativo, logo por hipótese pode-se aplicar o TB.

Fonte: Do Orientador (2017).

Figura 4.10: c_0 é o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$.

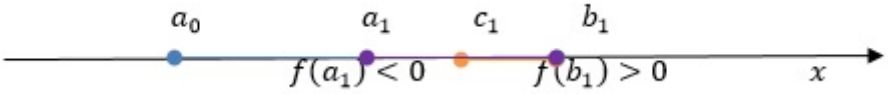
Fonte: Do Orientador (2017).

Figura 4.11: Intervalo $[a_1, b_1]$ com $f(c_0) = f(a_1) < 0$ e $f(b_0) = f(b_1) > 0$. O produto de $f(c_0)$ por $f(b_1)$ é negativo.



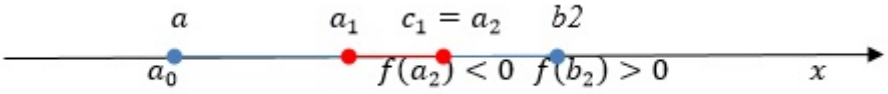
Fonte: Do Orientador (2017).

Figura 4.12: c_1 é o ponto médio do intervalo $[a_1, b_1]$.



Fonte: Do Orientador (2017).

Figura 4.13: Intervalo $[a_2, b_2]$ com $f(c_1) = f(a_2) < 0$ e $f(b_1) = f(b_0) > 0$. O produto de $f(c_1)$ por $f(b_2)$ é negativo.

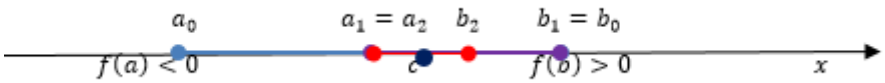


Fonte: Do Orientador (2017).

Nestas condições, *existe um único* real c que pertene a todos os intervalos da sequência, isto é, para todo n, $a_n \leq n \leq b_n$.

Em outras palavras, o teorema de Bolzano diz que se uma função f contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e considerando-se dois pontos a e b tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, a função tem pelo menos

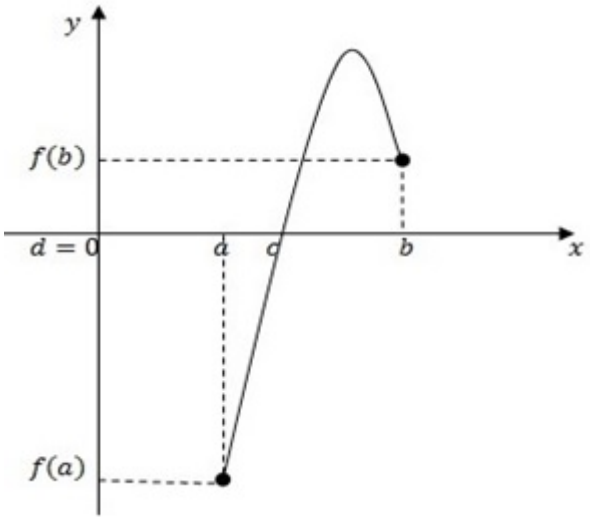
Figura 4.14: Intervalos encaixantes.



Fonte: Do Orientador (2017).

uma raiz entre a e b. A Figura 4.15 mostra que c é uma raiz da função f no intervalo $[a, b]$, i.e., $f(c) = 0$.

Figura 4.15: Teorema do Bolzano.



Fonte: Do Orientador (2017).

A seguir um exemplo para reforçar o entendimento do TB.

Exemplo 4.5 *Verifique se a função* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 27$ *possui pelo menos uma raiz no intervalo* $[3, 4]$. *Faça um esboço desta situação problema.*

Para verificar a existência da raiz no intervalo $[3, 4]$, segundo Ferreira ([6], 2016), aplicar-se-á o Teorema de Bolzano (TB), calculando-se o valor numérico da função nos extremos do intervalo, conforme a seguir:

Para $x = 3$, tem-se:

$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 3 \times 3 - 27 = -18 < 0;$$

Para $x = 4$, tem-se:

$$f(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 + 3 \times 4 - 27 = 1 > 0.$$

Como $f(3) < 0$ e $f(4) > 0$ e o produto entre eles é negativo, o Teorema de Bolzano garante que há pelo menos uma raiz $c \in [3, 4]$ tal que $f(c) = 0$.

Na Figura 4.16 etá representado o intervalo fechado $[3, 4]$ com a indicação do sinal das respectivas imagens.

Para determinar o valor de c, pode-se utilizar a propriedade dos intervalos encaixantes, discutido anteriormente durante a demonstração do Teorema 4.4.

Figura 4.16: Representação do intervalo $[3, 4]$ com as respectivas imagens dos extremos do intervalo.

Fonte: Do Orientador (2017).

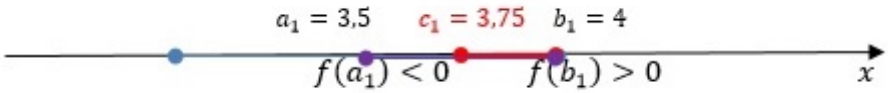
O ponto médio do primeiro intervalo encaixante [3,4] é $c_0 = 3,5$. O valor numérico para $x = c_0 = 3,5$, é:

$$f(3,5) = (3,5)^3 - 3 \times (3,5)^2 + 3 \times (3,5) - 27 = -10,375 < 0.$$

O próximo intevalo encaixante será $[a_1, b_1] = [3,5; 4]$, porque $f(3,5) \cdot f(4) < 0$.

O ponto médio do segundo intervalo encaixante é $c_1 = 3,75$.

Figura 4.17: $c_1 = 3,75$ é o ponto médio do intervalo encaixante $[3,5; 4]$.



Fonte: Do Orientador (2017).

O valor numérico de $c_1 = 3,75$ é:

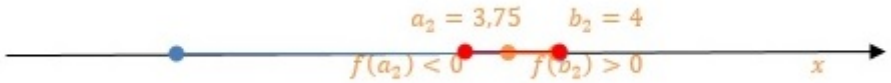
$$f(3,75) = (3,75)^3 - 3 \times (3,75)^2 + 3 \times (3,75) - 27 = -5,203125 < 0.$$

Com isto, o próximo intervalo encaixante será $[a_2, b_2] = [3,75; 4]$, porque $f(3,75) \cdot f(4) < 0$. O ponto médio do terceiro intervalo encaixante será $c_2 = 3,875$. Este inervalo e o seu ponto médio estão representados na Figura 4.18.

O valor numérico de $c_2 = 3,875$ é:

$$f(3,875) = (3,875)^3 - 3 \times (3,875)^2 + 3 \times (3,875) - 27 = -2,24 < 0.$$

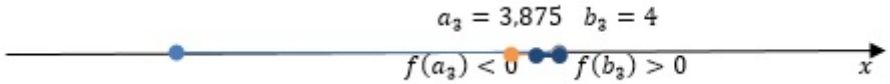
Figura 4.18: $c_2 = 3,875$ é o ponto médio do intervalo $[a_2 = 3,75; b_2 = 4]$.



Fonte: Do Orientador (2017).

Com isto, o próximo intervalo encaixante será $[a_3, b_3] = [3,875; 4]$, porque $f(3,875) \cdot f(4) < 0$. O ponto médio do quarto intervalo encaixante será $c_3 = 3,9375$. Este inervalo e o seu ponto médio estão representados na Figura 4.19.

Figura 4.19: $c_3 = 3,9375$ é o ponto médio do intervalo $[a_3 = 3,875; b_3 = 4]$.



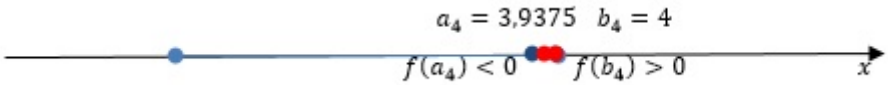
Fonte: Do Orientador (2017).

O valor numérico de $c_3 = 3,9375$ é:

$$f(3,9375) = (3,9375)^3 - 3 \times (3,9375)^2 + 3 \times (3,9375) - 27 = -0,6525 < 0.$$

Consequentemente, o próximo intervalo encaixante será $[a_4, b_4] = [3,9375; 4]$, porque $f(3,9375) \cdot f(4) < 0$. O ponto médio do quinto intervalo encaixante será $c_4 = 3,96875$. Este inervalo e o seu ponto médio estão representados na Figura 4.20. O valor numérico

Figura 4.20: $c_4 = 3,96875$ é o ponto médio do intervalo $[a_4 = 3,9375; b_4 = 4]$.



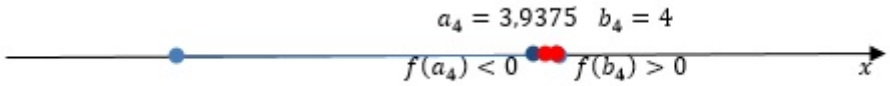
Fonte: Do Orientador (2017).

de $c_4 = 3,96875$ é:

$$f(3,96875) = (3,96875)^3 - 3 \times (3,96875)^2 + 3 \times (3,96875) - 27 = 0,165 > 0.$$

O valor numérico (imagem) do ponto médio $c_4 = 3,96875$ é positiva, com isto, o limite superior do próximo intervalo encaixante mudará. Será então $[a_5, b_5] = [3,9375; 3,96875]$, porque $f(3,9375) \cdot f(3,96875) < 0$. O ponto médio do sexto intervalo encaixante será $c_5 = 3,953125$. Este inervalo e o seu ponto médio estão representados na Figura 4.21.

Figura 4.21: $c_5 = 3,953125$ é o ponto médio do intervalo $[a_5 = 3,9375; b_5 = 3,96875]$.



Fonte: Do Orientador (2017).

O valor numérico de $c_5 = 3,953125$ é:

$$f(3,953125) = (3,953125)^3 - 3 \times (3,953125)^2 + 3 \times (3,953125) - 27 \approx -0,245 < 0.$$

Neste último intervalo, o módulo (valor absoluto) do valor numérico de seu ponto médio é maior do que o módulo do ponto médio do intervalo encaixante anterior, isto é, $|f(c_5)| > |f(c_4)|$. Como não foi adotado um critério de parada, pode-se estabelecer que $c_4 = 3,96875$ é um valor satisfatório para c, porque $|f(c_4)| < |f(c_5)| < |f(c_2)| < |f(c_1)| < |f(c_3)| < |f(c_0)|$.

A seguir, o teorema de Weierstrass estuda os máximos e mínimos de uma função com uma variável real.

4.3.5 Teorema de Weierstrass

O Teorema de Weierstrass ou Teorema dos Extremos afirma que qualquer função contínua de um intervalo $[a, b]$ é limitada e que, além disso, tem um máximo e um mínimo nesse intervalo.

Um teorema relacionado, é o Teorema da Limitância, que determina que uma função f contínua e determinada em um intervalo fechado $[a, b]$ é limitada nesse intervalo. Ou seja, existem números reais $M = f(x_M)$ e $m = f(x_m)$ tais que

$$m \leq f(x) \leq M. \tag{4.20}$$

O Teorema de Weierstrass incrementa o Teorema da Limitância ao dizer que f, em $[a, b]$, não só é limitada, mas também tem como maior valor o Limite Máximo e como menor valor o Limite Mínimo.

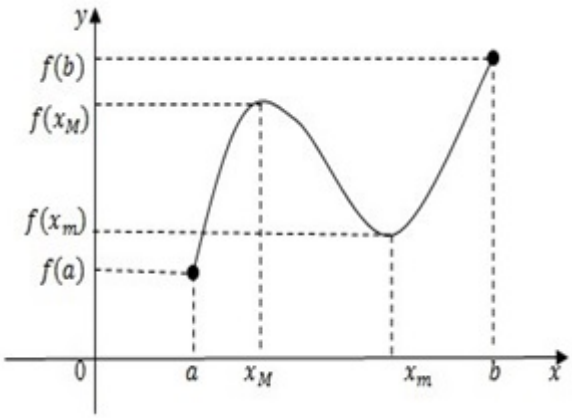
O Teorema é usado para provar o Teorema de Rolle (TR). Em uma formulação de Karl Weierstrass, o teorema determina que em uma função contínua de um espaço compacto contínuo com contradomínio sendo um subconjunto dos reais possui pontos de máximo e mínimo, que podem ser mínimos locais ou globais, e podem ser tanto pontos no meio da curva quanto seus próprios extremos. O enunciado é o seguinte:

Teorema 4.5 *(TW) "Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ e seja f uma função contínua em $[a, b] \in \mathbb{R}$, então existem números $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), (\forall x \in [a, b]) \text{ ."}$$

Em particular f é limitada. A Figura 4.22 é uma ilustração do enunciado do teorema.

Figura 4.22: Teorema de Weierstrass.



Fonte: Do Orientador (2016).

Demonstração 4.5 *Seja f uma função contínua no intervalo [a,b]. Se $Im(f)$ não é limitado, então para cada $M > 0$ existe $x = x(M) = x_M$ no intervalo [a,b] tal que $|f(x_M)| > M$. A sequência $(x_M)_M$ é limitada. É possível escolher uma subsequência $(x_{M_n})_n$ monótona, que também é limitada por ser subsequência, portanto, convergente. Assim, quando n cresce indefinidamente x_{M_n} tende a $\ell \in [a, b]$ enquanto que $|f(x_{M_n})|$ tende a $+\infty$, contrariando o fato de f ser contínua. Logo,* $\mathrm{Im}f$ *é limitado, portanto existem* $M = \sup(\mathrm{Im}f)$ *e* $m = \inf(\mathrm{Im}f)$*, de modo que*

$$\inf(\mathrm{Im}f) \leq f(x) \leq \sup(\mathrm{Im}f),$$

para todo $x \in [a, b]$*. Resta mostra que existem* $x_m, x_M \in [a, b]$ *tais que* $m = f(x_m) = \inf(\mathrm{Im}f)$ *e* $M = f(x_M) = \sup(\mathrm{Im}f)$*. Mostraremos o caso do máximo, o outro é análogo e fica como exercício. Suponha que* $f(x) < M = \sup(\mathrm{Im}f)$ *para todo* $x \in [a, b]$*. Então a função*

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

é contínua para todo $x \in [a, b]$*, porque é razão de funções contínuas e é limitada porque f é limitada. Mas, se g é limitada, então para algum k*

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < k,$$

portanto, $f(x) < K - 1/k$ *para todo* $x \in [a, b]$*, contrariando o fato de M ser supremo de* $\mathrm{Im}f$*. Portanto, deve haver* $x_M \in [a, b]$ *tal que* $f(y) = K$*.*

Segundo Lima ([9], 1997, p. 96), pelo teorema Weierstrass, f atinge seu valor mínimo $m = f(x_m)$ e seu valor máximo $M = f(x_M)$ em pontos de $[a, b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, digamos c, estiver $]a, b[$ então $f'(c) = 0$.

4.3.6 Teorema de Riemann para integral definida

Por que estudar as Integrais de Riemann? A ideia básica do conceito de integral já estava embutida no método da exaustão atribuído a Eudoxo (406-355 a.C.), desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes (287-212 a.C.), grande matemático da escola de Alexandria. Pode-se obter área de uma figura plana irregular ou obter o volume de um sólido com o formato de um barril.

Nesta subseção, estudaremos a integral de Riemann (1826 - 1866), porém Newton e Leibniz já haviam apresentado estudos de integrais anteriormente. Para Newton, ele as denominava de refluxo. Também a integração é denominada de antiderivada ou de

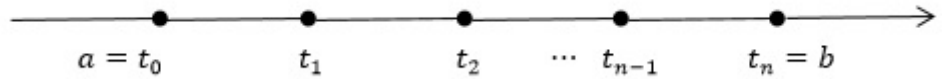
primitiva de uma função.

Riemann foi o matemático que apresentou uma definição rigorosa de integração, utilizando a geometria analítica, mais precisamente a área compreendida pela curva da função e o eixo dos x e para demonstrá-la, definiu a soma inferior, s, e superior, S.

4.3.6.1 Partição de um intervalo $[a, b]$

Segundo Lima ([9], 1997, p. 119), uma partição $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. A notação será sempre usada de modo que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. O intervalo $[t_{i-n} - t_i]$ de comprimento $t_i - t_{i-1}$ será chamado o i-ésimo intervalo da partição P. Evidentemente, $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$.

Figura 4.23: Representação geométrica da partição P na reta real.



Fonte: Do Orientador (2017).

A soma inferior, s, de f relativamente à partição P é o número

$$s(f; P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(m_i(t_i - t_{i-1})).$$

A soma superior, S, de f relativamente à partição P é o número

$$S(f; P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i(t_i - t_{i-1})).$$

Evidentemente,

$$m(b - a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b - a),$$

seja qual for a partição P.

A seguir, enunciaremos o teorema de Riemann, para soma superior conforme Lima ([9], 1997, p. 136-37):

Teorema 4.6 *(TRI) "Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow S(f; P) < \overline{\int}_a^b f(x) + \epsilon$."*

Demonstração 4.6 *Suponhamos inicialmente $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que*

$$S(f; P_0) < \overline{\int_a^b} f(x) + \epsilon/2.$$

Seja $M = \sup f$. Tomemos δ com $0 < \delta < \epsilon/2M_n$. Se P é qualquer partição de $[a,b]$ com $|P| < \delta$, indiquemos com $[r_{\alpha-1}, r_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum $[t_{i-1}t_i]$ de P_0 e com $[r_{\beta-1}, r_\beta]$ os restantes intervalos de P. Cada um destes contém pelo menos um ponto t_i em seu interior, logo há, no máximo, n intervalos do tipo $[r_{\beta-1}, r_\beta]$. Escrevamos $\alpha \subset i$ para significar $[t_{\alpha-1}, t_\alpha] \subset [t_{i-1}t_i]$. Quando $\alpha \subset i$ valem $M_\alpha \leq M_i$ e $\sum_{\alpha \subset i}(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq t_i - t_{i-1}$. Estes números são todos ≥ 0, logo $\sum_{\alpha \subset i} M_\alpha(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$ e $M_\beta(r_\beta - r_{\beta-1}) \leq M\delta$. Portanto:

$$\begin{aligned} S(f;P) &= \sum_\alpha M_\alpha \cdot (r_\alpha - r_{\alpha-1}) + \sum_\beta M_\beta \cdot (r_\beta - r_{\beta-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) + M_n\delta \\ &< S(P; P_0) + \epsilon/2 \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon. \end{aligned}$$

No caso geral, como f é limitada, existe uma constante c tal que $f(x) + c \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Tomando g(x) = f(x) + c temos que $S(g;P) = S(f;P) + c(b-a)$ e

$$\overline{\int_a^b} g(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx + c(b-a),$$

logo recaímos no caso anterior.
Dizemos que $S(f;P) < \overline{\int}_a^b f(x)dx + \epsilon$ equivalente a $|\overline{\int}_a^b f(x)dx - S(f;P)| < \epsilon$. Logo, o Teorema 4.6 significa que $\lim_{|P|\to 0} S(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

De modo inteiramente análogo prova-se que $\underline{\int}_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} s(f;P)$.

4.3.6.2 Partição pontilhada de um intervalo $[a,b]$

Uma *partição pontilhada do intervalo* $[a,b]$ é um par $P^* = (P, \xi)$, onde $P_0 = \{t_0, \cdots, t_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ e $\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ é uma lista de n números escolhidos de forma

que $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$.

Dada uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$ tem-se a soma de Riemann:

$$\sum(f; P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}). \tag{4.21}$$

Evidentemente, seja qual for o modo de pontilhar a partição P, tem-se:

$$s(f; P) \leq \sum(f; P^*) \leq S(f; P).$$

Diz-se que um número real I é o limite de $\sum(f; P^*)$ quando $|P| \to 0$, e escreve-se $I = \lim_{|P|\to 0} \sum(f; P^*)$, quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|\sum(f; P^*) - I| < \epsilon$ seja qual for a partição pontilhada P^* com o $|P| < \delta$.

O comentário a seguir é sobre o entendimento do Teorema 4.6.

O intervalo fechado $[a, b]$ é dividido em n partes, com isto teremos n retângulo compreendidos entre a e b. Com isto, introduzimos o conjunto partição, a seguir:

$$P([a, b]) = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i\}. \tag{4.22}$$

A área sob a curva tem retângulos de base $\Delta t_i = t_i – t_{i-1}$ e altura é $f(t_i)$, para $i = 1, \cdots, n$, para a soma inferior.

Se tomarmos o limite inferior (t_{i-1}) da base para medir a altura de cada retângulo, então a altura de cada um será $f(t_{i-1})$ e a soma da área de cada um destes retângulos é denominada de soma inferior e é calculada por

$$s(f; P) < \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}\Delta t_i).$$

Se tomarmos o limite superior (t_i) da base para medir a altura de cada retângulo, então a altura de cada um será $f(t_i)$ e a soma da área de cada um destes retângulos é denominada de soma superior e é calculada por

$$S(f; P) < \sum_{i=n-1}^{n} f(t_i\Delta t_i).$$

É claro que nas duas somas o resultado em muitos casos não é exatamente igual a área da figura, isto porque na soma inferior, a maioria dos retângulos estão abaixo da curva $f(x)$ ocasionando uma área menor do que a real; na soma superior, os retângulos, em

sua maioria estão acima da curva, provocando uma área maior do que a área verdadeira, porém Riemann para solucionar este problema usou outra técnica, que foi a de escolher um ponto t_i^* compreendido entre os pontos extremos do intervalo Δx_i. Esta soma é definida como a soma de Riemann, conforme abaixo e está limitada (compreendida) entre as soma s e S.

$$s(f;P) \leq \sum(f;P^*) \leq S(f;P).$$

Fazendo $n \to \infty$, teremos infinitos intervalos $\Delta x_i \to 0$, consequentemente teremos a área formada pela curva de f com o eixo das abscissas, no intervalo fechado $[a,b]$. Está área é representada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i, \tag{4.23}$$

denominada de integral de Riemann ou integral definida.

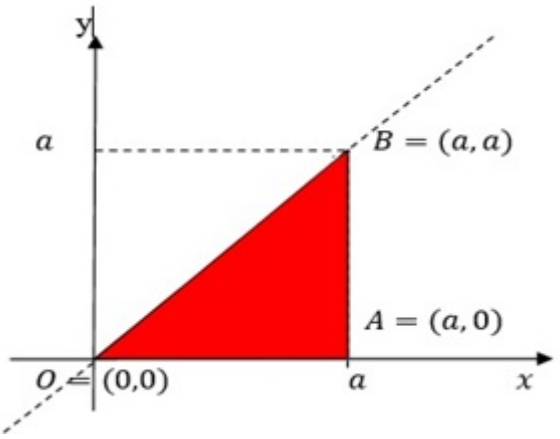
Desafio ao leitor: esboçar uma figura (gráfico) para a integral de Riemann a partir dos parágrafos anteriores, sem consultar outras fontes.

A seguir, apresentaremos dois exemplos de aplicação da integral de Riemann.

Exemplo 4.6 *([6], 2016)*

Calcular a área destacada da função $y = x$, no intervalo $[0,a]$, conforme mostrado na Figura 4.24.

Figura 4.24: Gráfico da função limitada $y = x$ no intervalo $[0,a]$. A área em destaque é a que se quer calcular.



Fonte: Do Orientador (2017).

Para determinar a área do triângulo OAB, reto em $A = (a,0)$, vamos aplicar a integral definida de Riemann, conforme o Teorema 4.6, conforme os passos a seguir:

1º construir a partição P, dividindo-se o intervalo $[0, a]$ em n partes iguais. Cada uma dessas partes será um subintervalo fechado $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, que será a base de cada retângulo;

2º determinar o comprimento (medida) de cada subintervalo da partição P:

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{a - 0}{n} = \frac{a}{n}; \tag{4.24}$$

3º cada x_i é um múltiplo natural de Δx, ou seja:

$$x_i = i \cdot \Delta x = i\frac{a}{n}; \tag{4.25}$$

4º escrever a função $f(x_i)$, substituino-se x por x_i na $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= x_i \\ &= i \cdot \frac{a}{n}; \end{aligned} \tag{4.26}$$

5º a área em destaque na Figura 4.24, será calculada pela soma da *partição pontilhada de Rieman*, de acordo com a Equação 4.21. Ajustada as notações (representações) para esta resolução, tem-se:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i. \tag{4.27}$$

substituir as Equações (4.24) e (4.26) na (4.27), tem-se:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{a^2}{n^2} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i, \end{aligned}$$

isto é,

$$A_n = \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i. \tag{4.28}$$

Mas,

$$\sum_{i\,=1}^{n} i,$$

é a soma de n números naturais. Esta soma, é a soma dos termos de uma PA finita, cujo resultado é:

$$\sum_{i\,=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{4.29}$$

Substituir (4.29) em (4.28), temos:

$$A_n = \frac{a^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2}\frac{n(n+1)}{n^2} \Rightarrow \frac{a^2}{2}\frac{(n+1)}{n} \Rightarrow \frac{a^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)$$

$$n \to \infty$$

$$A_n = \frac{a^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{a^2}{2}. \tag{4.30}$$

Portanto, a área do triângulo retângulo em destaque na Figura 26 é igual a $\frac{a^2}{2}$, que corresponde à integral de Riemann da função $f(x) = x$, no intervalo fechado $[a, b]$.

Exemplo 4.7 *Calcular a área da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, a]$.*

A área A_n será determinada pela soma de Riemann abaixo:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

em que

$$f(x_i) = x_i^2 \quad e \quad x_i = \frac{ia}{n} \quad \Rightarrow f(x_i) = \left(\frac{ia}{n}\right)^2$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ia}{n}\right)^2 \Delta x_i,$$

$$\Delta x_i = \frac{a}{n}.$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ia}{n}\right)^2 \frac{a}{n} \Rightarrow A_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2a^2}{n^2}\frac{a}{n} \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2. \tag{4.31}$$

O somatório na Equação (4.31) representa a soma dos quadrados dos números naturais e é determinada por:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{4.32}$$

Substituir a equação (26) na equação (25):

$$A_n = \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow A_n = \frac{a^3}{n^2}\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow A_n = \frac{a^3}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{a^3}{6}\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n+1)}{n} \Rightarrow A_n = \frac{a^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$n \to \infty$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{a^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n+1)}{n} \Rightarrow A_n = \frac{a^3}{6}(1)(2) \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{a^3}{3}. \tag{4.33}$$

Portanto, a área compreendida pelo segmento de arco da parábola $y = x^2$ e as retas $x = 0$ e $x = a$ é a obtida na equação (4.33).

4.3.7 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

O teorema fundamental do cálculo (TFC) estabelece uma relação entre os conceitos de derivada e integral.

Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ podemos definir

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

$a \leq x \leq b$. Existe $g'(x)$?

a) f é contínua e limitada em $[a, b]$, existem x_m e $x_M \in [a, b]$ tal que

$$f(x_m) = m \to \text{valor mínimo}$$
$$f(x_M) = M \to \text{valor máximo}$$

Com isto, devemos ter a função assumindo valores entre $f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$, conforme abaixo:

$$f(x_m) \leq f(t) \leq f(x_M), \qquad \forall \in [a, b].$$

Isto implica que:

$$m \leq f(t) \leq M.$$

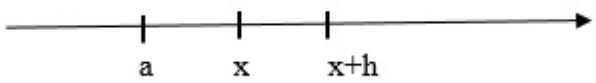
A definição da primeira derivada de $g(x)$ é:

$$g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Se $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ então $g(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$. Segue que:

$$g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}. \tag{4.34}$$

Figura 4.25: Intervalo [a, x+h], identificando que a função deve ser integrada nos subintervalos $[a, x] \cup [x, x+h]$.



FFonte: Do Orientador (2017).

$$g(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt. \tag{4.35}$$

Sustituir a Equação (4.34) na Equação (4.35), tem-se:

$$g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}. \tag{4.36}$$

Cancelar as integrais simétricas na Equação (4.36), tem-se:

$$g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}. \tag{4.37}$$

Portanto, a primeira derivada da função g(x) é a função encontrada na Equação (4.37).

Vamos integrar da função $f(t)$ no inervalo $[x, x+h]$, desde que

$$f(x_m) \leq f(t) \leq f(x_M).$$

$$\int_x^{x+h} f(x_m)dt \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq \int_x^{x+h} f(x_M)dt \qquad \Rightarrow$$

$$f(x_m)\int_x^{x+h} dt \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x_M)\int_x^{x+h} dt \qquad \Rightarrow$$

$$f(x_m)\left(t|_x^{x+h}\right) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x_M)\left(t|_x^{x+h}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$f(x_m)\left(x+h-x\right) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x_M)\left(x+h-x\right) \qquad \Rightarrow$$

$$f(x_m)\left(h\right) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x_M)\left(h\right) \qquad .$$

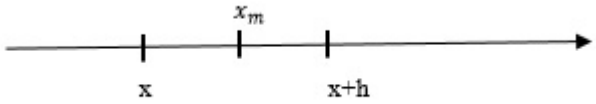
Multiplicar a desigualdade acima por $\frac{1}{h}$:

$$f(x_m) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x_M).$$

Aplicar o limimite na desigualdade acima, para $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} f(x_m) \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq \lim_{h\to 0} f(x_M).$$

Figura 4.26: Intervalo [x, x+h], identificando que a função deve ser integrada no subintervalo $[x, x_m] \cup [x_m, x_M$.



Fonte: Do Orientador (2017).

A Figura 4.26 tem como objetivo apresentrar a compreesão da demonstração, por isso vemos que x_m está entre x e $x+h$. Simbolicamente:

$$x \leq x_m \leq x+h.$$

Quando $h \to 0$, $x_m \to x$ e $x+h \to x$.

Segue que:

$$\lim_{h\to 0} f(x_m) \to f(x) \qquad e \qquad \lim_{h\to 0} f(x_M) \to f(x),$$

isto é:

$$f(x) \leq g'(x) \leq f(x) \Rightarrow g'(x) \leq f(x) \Rightarrow g'(x) = f(x). \tag{4.38}$$

O resultado (4.38) comprova que existe $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, tal que $g'(x) = f(x)$. Esta conclusão é a demonstração da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 4.8 *Use a definição da primeira parte do TFC para encontrar uma expressão para a função*

$$g(x) = \int_0^x tdt.$$

Como se trata de uma integral definida, pela parte 1) do TFC, tem-se:

$$g(x) = \left(\frac{t^2}{2}|_0^x\right) = \frac{1}{2}(x^2 - 0^2) = \frac{1}{2}x^2.$$

Portanto,

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Do resultado (37), temos que:

$$g'(x) = x = f(x).$$

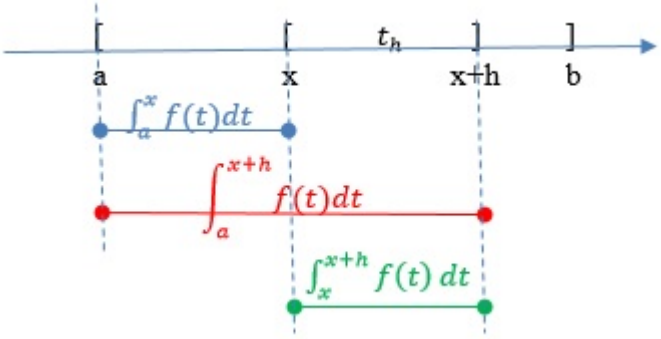
Observação 4.2 *Note que $g^0(x) = f(x)$, ou seja, g' é uma primitiva de f.*

Teorema 4.7 *(TFC - Parte 1) "Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, então a função*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{4.39}$$

em que F é uma primitiva ou antiderivada de f."

Figura 4.27: Representação do subintervalo $[x, x + h]$ que está contido no intervalo $[a, b]$, domínio de integração para o TFC1.



Fonte: Do Orientador (2017).

Teorema 4.8 *(TFC - Parte 2) "Se f for contínua em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{4.40}$$

em que F é uma primitiva ou antiderivada de f."

Demonstração 4.7 *Seja*

$$h(x) = \int_a^x f(x)dx, \tag{4.41}$$

cuja antiderivada ou antiprimitva é

$$h(x) = F(x) + c. \tag{4.42}$$

Para $x = a$, à Equação (4.42), tem-se:

$$h(a) = F(a) + c. \tag{4.43}$$

Ao igualar (4.41) com (4.42), obtém-se o valor da constante c:

$$h(a) = \int_a^a F'(x)dx = F(a) + c \quad \Rightarrow$$

$$0 = F(a) + c \quad \Rightarrow$$

$$c = -F(a). \tag{4.44}$$

Substituir (4.44) na (4.42) :

$$h(x) = F(x) - F(a). \tag{4.45}$$

Para $x = b$, na Equação (4.45), temos:

$$h(b) = F(b) - F(a) \tag{4.46}$$

e na Equação (4.41), temos:

$$h(b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.47}$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4.48}$$

Ressaltamos que as ideias de limite, derivada e integral já haviam sido discutidas por outras civilizações, como por exemplo, os babilônios e os gregos, porém com as

formulações axiomáticas atuais, desenvolveu-se a partir da Idade Moderna (1453 - 1789) e no decorrer da Idade Contemporânea (1789 - revolução francesa até os dias atuais). Há também grandes contribuições de Fermat (1601, 1665), Taylor (1685 -1731), Euler (1707 - 1783), Cauchy (1789 - 1857) e outros matemáticos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta monografia foram estudados sete matemáticos e os teoremas de sua autoria conforme a seguir: Teorema de Rolle, Teorema de Lagrange, Teorema do Valor Intermediário, Teorema de Bolzano, Teorema de Weierstrass, Teorema de Rimann e Teorema Fundamental do Cálculo, partes 1 e 2.

Comprovou-se através da demonstração e também de exemplos, que os teoremas são usados para achar ponto pertencente a curva de uma função em que a reta é tangente. Em alguns casos, cuja derivada é nula, todos os pontos do intervalo. O teorema de Lagrange é usado para escrever a equação da reta tangente à curva num intervalo fechado (continuo) a partir do coeficiente angular de uma reta secante, sendo que existirá pelo um ponto no qual existe a reta tangente. O teorema do valor intermediário diz que se tiver um intervalo fechado do contradomínio com um ponto que é a imagem de outro corresponde no domínio, então ele é a imagem daquele, e mais, garante que o conjunto imagem é um intervalo. O teorema de Bolzano afirma que se num intervalo fechado o produto das imagens dos extremos dele é negativo então existirá pelo menos uma imagem real da função neste intervalo. O teorema de Weierstrass afirma que em um intervalo fechado do domínio de uma função existem pontos de mínimo e de máximo. O teorema de Reimann afirma que em uma função real, em um intervalo fechado, pode-se fazer uma partição regular deste intervalo e que a soma dos retângulos sob a curva é igual à área correspondente. Finalmente, o teorema fundamental do cálculo afirma na sua parte 1, que a integral de uma função é igual a sua primitiva ou antiderivada, isto é, derivando-se a primitiva ou antiderivada retorna-se a função integrando inicial; já a parte 2, diz que a integral definida em um intervalo fechado é igual à diferença do valor numérico do limite superior do intervalo pelo valor numérico do limite inferior deste intervalo.

De modo geral, como se conjecturou na hipótese, os sete matemáticos pesquisados tinham em comum encontrar ponto (s) em um intervalo fechado do domínio que satisfizessem as condições de máximo ou de mínimo de uma função, procurando interpretar os pontos críticos e também outros pontos.

Durante à defesa do TCC, os avaliadores arguiram quanto a inclusão de somente

sete matemáticos e "deixado de fora"outros importantes, por isso sugeriram que fosse acrescentado algumas obras como leitura futura para auxiliar o leitor. Por isso, indicaram os seguintes autores que pulbicaram obras sobre a gênese e evolução da história do cálculo diferencial e integral: Boyer ([2], 1949), Carvalho ([3], 2007), Cohen e Westfall ([4], 2002), Iezzi *et al.* ([8], s.d), Lima e Cunha Junior ([10], 2016), Melchior e Soares ([11], 2013) e Mol ([12], 2013).

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, Carl B. **História da matemática**. 4. Reipr. São Paulo: Edgar Blucher, 2002.

[2] BOYER, Carl B. **The history of the Calculus and its conceptual development**. Ed. Dover Publications, 1949. Disponível em: https://www.google.com.br/q=carl+boyer. Acesso em: 7 Maio 2017.

[3] CARVALHO, R. M. **História da Matemática**: A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o cálculo contemporâneo. Monografia (Especialização em Matemática para Professores em Ênfase em Cálculo). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2007. Disponível em: www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/MonografiaRomeu.pdf . Acesso em: 26 Fev. 2017.

[4] COHEN, I. B.; WESTFALL, R. S. (Orgs.). **Newton**: Textos, antecedentes e comentário. Rio de Janeiro: Contraponto; EDUERJ, 2002. (Tradução de Vera Ribeiro).

[5] CORRÊA, F. J. S. A. **Introdução à análise real**. Belém: UFPA, s.d. (Material Didático do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPA).

[6] FERREIRA, J. S. P. **Notas de aulas de Cálculo Diferencial e Integral em** $\mathbb{R}$. Macapá, 2016.

[7] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**: vol.1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

[8] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACAHDO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Limites, derivadas e noções de integral. 5. ed. São Paulo: Atual, v. 8.

[9] LIMA, E. L. **Análise real**: vol. 1. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

[10] LIMA. I. S.; CUNHA JUNIOR, L. C. C. Matemática lúdica na educação de jovens e adultos do Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal **Ciência e Natura**, v. 38, n. 3, Set./Dez. 2016, p. 1448-1461.

[11] MELCHIOR, A.; SOARES, M. História do Cálculo Diferencial e Integral. **Maiêutica**, v.1, n.1, 2013, p. 61-71. Disponível em: https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD˙EaD/issue/view/24/showToc. Acesso em: 7 Maio 2017.

[12] MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED/UFMG, 2013. Disponível em: www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducaoahistoriadamatematica.pdf. Acesso em: 26 Fev. 2017.