UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

YURI VIEIRA CORDEIRO

Teoria dos Jogos e o Equilíbrio de Nash

MACAPÁ - AP
2017

YURI VIEIRA CORDEIRO

TEORIA DOS JOGOS E O EQUILÍBRIO DE NASH

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de matemática como requisito para obtenção do grau de licenciatura plena em matemática, da universidade federal do Amapá.

Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco

MACAPÁ-AP

2017

YURI VIEIRA CORDEIRO

TEORIA DOS JOGOS E O EQUILÍBRIO DE NASH.

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de licenciatura plena em matemática pela Universidade Federal do Amapá, campus marco zero, aprovado pela banca examinadora de professores:

Aprovado em Abril de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. GUZMÁN EULALIO ISLA CHAMILCO - Orientador
COLEGIADO DE MATEMÁTICA-UNIFAP

Prof. KELMEN DA CRUZ BARROSO
COLEGIADO DE MATEMÁTICA-UNIFAP

Prof. GILBERLANDIO DIAS JESUS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA-UNIFAP

MACAPÁ-AP
2017

DEDICATÓRIA

A conclusão do meu curso não seria concretizada sem a ajuda das pessoas próximas de mim. Primeiramente dedico o meu trabalho a Deus que jamais me deixou enfraquecer nos momentos difíceis que passei. A todos os meus familiares, pai e mãe, namorada e amigos que sempre estiveram me apoiando, diretamente e indiretamente e claro aos meus caros companheiros de turma e professores.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por me proporcionar este dia maravilhoso que para mim é uma vitória muito grande, pois durante todos esses semestres foram muitas dificuldades encontradas, mas que foram vencidas com a ajuda de Deus, agradeço a minha mãe que me ajudou em cada momento difícil que passei, ao meu pai que sempre me incentivou a ser o melhor, ao meu irmão para que ele possa se inspirar em mim, a minha namorada que esteve comigo em cada momento me incentivando para que eu jamais desistisse e a todos que estiveram comigo nessa batalha incluindo meus colegas de turma que também com a graça de Deus estarão realizando seus objetivos. Agradeço também aos meus professores de matemática do ensino médio em especial aos professores Marco antônio e ao professor Luiz Franco, pois me incetivaram a seguir a área de exatas. Aos maravilhosos professores do colegiado de matemática que puderam passar todos os ensinamentos que lhes convém para nós alunos. Agradeço em especial ao meu professor orientador Gusmán que esteve sempre presente me incentivando a estudar sempre mais e buscar mais conhecimento, aos professores Kelmen, Gilberlândio, Naralina, Edivaldo que estiveram muitas vezes conosco durante todo o curso de licenciatura em matemática e a todo colegiado do curso de matemática.

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vii**

Abstract **viii**

1 A HISTÓRIA DA TEORIA DOS JOGOS **2**

2 PRELIMINARES **7**

2.1 Limite de Uma Função 7

2.2 Funções Contínuas 8

3 TEOREMA EQUILÍBRIO DE NASH **10**

3.1 Teorema do valor médio 10

3.2 Teorema do ponto fixo de Brouwer 11

3.3 Teorema Equilíbrio de Nash 12

4 APLICACÕES DO EQUILÍBRIO DE NASH **16**

4.1 Aplicação na Econômia 16

4.2 Aplicação na Biologia 17

4.3 Dilema do prisioneiro 18

4.4 Tabelas 19

5 Considerações Finais **20**

Referências Bibliográficas **21**

Resumo

Este trabalho tem por objetivo mostrar a importância da aplicação da teoria dos jogos na tomada de decisões relacionadas a diversas áreas distintas do nosso cotidiano através do Equilíbrio de Nash. A teoria dos jogos busca entender a lógica na hora da decisão e ajudar a responder se é possível haver colaboração entre os jogadores, em quais circunstâncias o mais racional é não colaborar e quais estratégias devem ser adotadas para garantir a colaboração entre os jogadores. A partir da avaliação dos conceitos descritos e com a ajuda do equilíbrio de Nash é possível elaborar uma conclusão coerente com a realidade da situação, suas variáveis e desdobramentos previsíveis.

Palavras-chave: Teoria dos jogos. Equilíbrio de Nash. Ponto Fixo de Brouwer

Abstracto

Este trabajo tiene como objetivo mostrar la importancia de la aplicación de la teoria de juegos en la toma de decisiones relacionadas con las diferentes áreas á través del equilibrio de Nash . La teoría de juegos busca entender la lógica en el tiempo de decisión y ayudar a responder si puede haber colaboración entre los jugadores, en qué circunstâncias el más racional y no funciona y qué estrategias deben adoptarse para garantizar la cooperación entre los jugadores. De la evaluación de los conceptos descritos y con la ayuda de equibrio de Nash es posible hacer un hallazgo consistente con la realidad de la situación, sus variables y su evolución previsible.

Keywords: La teoría de juegos.Equilibrio de Nash. Punto fijo de Brouwer.

Introdução

Durante todo o curso de licenciatura em matemática foi estudado com professores qualificados as matérias de análise I e II, álgebra I e II e álgebra linear. Com isso obtive as ferramentas necessárias para o meu estudo sobre a teoria dos jogos e o equilíbrio de nash. A teoria dos jogos é um ramo da matemática que estuda determinadas situações de conflitos ou como são chamados, situações de jogos. Tem por objetivo prever as ações de cada jogadores, sejam eles da mesma equipe ou não.

Essa teoria posiciona os jogadores da melhor forma possível para que se haja o resultado desejado, ou seja, onde existe a possibilidade de lucro. A finalidade da teoria dos jogos é fazer com que se tenha entendimento lógico na hora de tomar a decisão e ajudar a responder se pode haver a colaboração ou não entre os jogadores na hora da decisão.

É por meio da matemática, que a teoria dos jogos equaciona os conflitos, onde o foco são as estratégias utilizados pelos jogadores. Um conceito central para isso é o equilíbrio de Nash, como o próprio nome ja diz há um equilíbrio nas jogadas de cada jogadores, fazendo com que nenhum dos jogadores melhore sua estratégias de jogo, após saber as estratégias do outro jogador.

Este trabalho está organizado em capítulos da seguinte maneira: No capítulo 1 temos um breve histórico da teoria dos jogos, falando sobre a sua origem, sobre os criadores e os primeiros artigos escritos sobre a teoria dos jogos, falaremos também sobre os tipos de jogos para que se tenha um melhor entendimento em todo nosso trabalho e por fim falaremos de Jonh Forbes Nash o criador do teorema equilíbrio de Nash. No capítulo 2 temos uma pequena preliminares falando sobre a definição de limites e funções contínuas para que tenhamos uma melhor compreensãoo do trabalho como um todo. No capítulo 3 temos as apresentações e as demonstrações dos teoremas que serão utilizados para provar o teorema do equilíbrio de Nash e uma pequena demonstração da nossa aplicação. Por fim, no capítulo 3 iremos fazer as aplicações do teorema do equilíbrio de Nash em áreas como na economia, biologia e o jogo Dilema do prisioneiro.

Capítulo 1

A HISTÓRIA DA TEORIA DOS JOGOS

Neste capítulo trataremos da origem da teoria dos jogos, que teve seu surgimento no século XVIII segundo registros antigos. A teoria dos jogos é considerada um ramo da matemática aplicada que estuda estratégias onde jogadores escolhem diferentes ações para melhorar o seu retorno. Os jogos de tabuleiro, cartas, dados e vários outros que servem de competição, divertem a sociedade desde a formação das primeiras civilizações, por deixarem as pessoas em uma situação de ganho ou perda que depende de escolhas feitas no início das partidas. Com isso, o jogo vem se tornando cada vez mais uma ferramenta para o desenvolvimento das pessoas, mas apenas despertou interesse após o surgimento da teoria da probabilidade.

Os estudos sobre a teoria da probabilidade tiveram início com o filósofo, matemático e físico francês Blase Pascal e com o matemático francês Fermat, ambos desenvolveram a teoria da probabilidade em jogos de azar utilizando regras matemáticas. O primeiro estudo a ser reconhecido sobre a teoria dos jogos, foi por meio de uma carta escrita por James Waldegrave, dirigida a Nicolas Bernoulli em 1813, no qual James Waldegrave analisa soluções de estratégias mistas de minimax para o jogo de cartas chamado Le Her de duas pessoas. Waldegrave não estendeu seu trabalho para uma forma geral deixando então sua pesquisa vazia.

Em seguida o Frances matemático Antoine Augustin Cournot em 1838, publicou seu trabalho com estudo da análise do ponto de equilíbrio nas estratégias de jogos. Neste trabalho Cournot apenas formaliza um conceito específico de equilíbrio, ou seja, aplicações feitas somente em casos particulares em que, nos dias de hoje, foi generalizado por Jonh Forbes Nash Jr.

O marco inicial da teoria dos jogos se deu pelo trabalho publicado em 1928 pelo matemático húngaro jonh Von Neumann que demonstrou o teorema minimax, deixado em aberto pelo matemático Frances Émille Borel que também estudou e publicou artigos sobre a teoria dos jogos. Von Neumann na sua demonstração dizia que todo jogo finito de soma zero possuia uma solução em estratégias mistas. A demonstração original do teorema usava Topologia e análise e era difícil de entender e acompanhar. Alguns anos depois Neumann publicou uma demonstração baseada no teorema do ponto fixo de Brouwer, no mesmo período Oskar Morgenster estava por publicar seu livro ”IMPLICACÕES DO QUANTITATIVO

DO COMPORTAMENTO DO MÁXIMO ”no qual analisa unidades da economia como o individualismo ou a interação social.

Imagem de Von Neumann
fonte: Sis Thema.

O livro de Morgenstern demonstra que o máximo depende diretamente da interação entre os indivíduos e indiretamente do meio no qual os mesmos interagem. Com tudo isso Von Neumann e Oskar Morgenster juntaram seus trabalhos e publicaram juntos o livro ”The Theory of Games and Economic Behavior”(teoria dos jogos e o comportamento econômico) em 1944. Este trabalho contém o método para encontrar uma solução ótima para jogos de duas pessoas de soma zero e, também afirma que o comportamento da economia depende da interação entre os agentes, já que afeta diretamente a elaboração de estratégias e decisões de produtores e consumidores.

Imagem de Oskar Morgenstern

Fonte: Hinden blog.

Após o trabalho ser publicado surgiram vários estudos sobre a teoria dos jogos, mais especificamente para jogos cooperativos, no que se refere a existência de estratégias ótimas para grupos de indivíduos, com a finalidade de descobrir a melhor forma de se jogar onde os jogadores dependiam de sorte ou azar, a partir daí a teoria dos jogos passou a ser utilizada como uma ferramenta matemática.

Em 1950, surge então o matemático estadunidense Jonh Forbes Nash Junior, nascido em bluefild no dia 13 de junho de 1928. Nash trabalhou com diversos ramos da matemática como geometria diferencial, equações diferenciais parciais e a teoria dos jogos, deixou nesses ramos da matemática diversos teoremas, um deles foi o teorema do equilíbrio de Nash no qual faremos a demonstração e aplicações em áreas diversificadas. Nash foi professor na universidade de Princeton como matemático sênior, ganhou o prêmio de ciências econômicas de Alfred Nobel de 1944 junto com Reinhard Selten e John Harsanvi.Teve sua vida retratada no filme Uma Mente Brilhante, vencedor de Oscars, baseado no livro-biográfico Homônimo, onde apresentou suas genialidades para matemática e a sua grande luta contra a esquizofrenia.

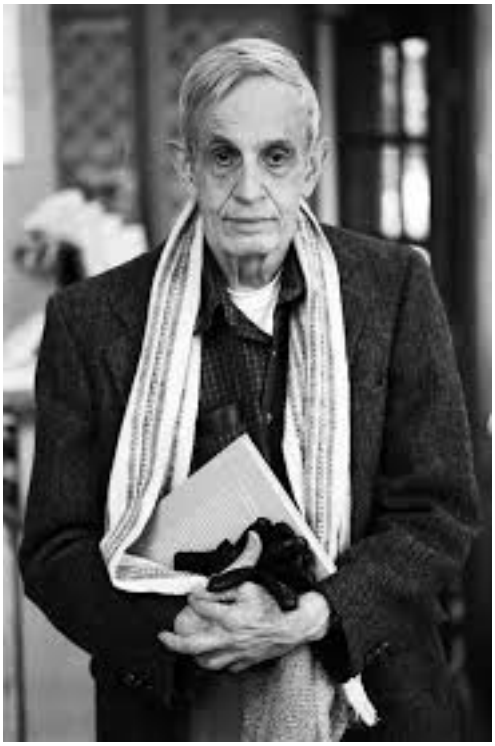


Imagem de Jonh Forbes Nash: Fonte: Getty Imagem

Jonh nash morreu no dia 23 de maio de 2015 aos 86 anos de idade em um acidente de carro em New Jersey junto com sua esposa de 82 anos de idade.

Os jogos estudados pela teoria são divididos em tipos diferentes onde cada um tem seu propósito, jogos do tipo simétrico e assimétrico, simultâneos e sequêncial, jogos de soma zero e soma diferente de zero, jogos coopereativos e jogos não cooperativos e outros tipos.

Para nosso estudo vamos fazer a diferença apenas dos jogos do tipo soma zero e soma diferente de zero e também dos jogos cooperativos e jogos não cooperativos.

Jogos de Soma Zero: refere-se aos jogos em que o ganho de um jogador necessariamente representa a perda do outro. A exemplo temos o jogo de Tênis e o jogo de xadrez, onde sempre haverá um vencedor e um perdedor.

Jogos de soma não zero: este tipo de Jogo caracteriza-se por não haver um vencedor ou um perdedor. A exemplo temos o dilema do prisioneiro no qual faremos a aplicação mais adiante.

Jogos cooperativos: são os jogos que tem como características as dinâmicas de grupo, onde o objetivo é despertar a consciência de cooperação e promover efetivamente a ajuda entre as pesssoas, ou seja, são os jogos para unir pessoas. Temos como exemplo os jogos amarelinha e pula corda.

Jogos não cooperativos: diferente dos jogos cooperativos as decisões dos jogadores são tomadas pensando somente no melhor para si. Exemplo temos o jogo de pôquer.

O jogo dilema do prisioneiro, foi criado pelos matemáticos Melvin Dresher e Merrill Flood que apliaram o trabalho de Nash. Neste jogo, assim como em muitos outros, considera-se que cada jogador de forma independente queira aumentar ao máximo a sua própria vantagem, sem lhe importar o resultado do outro jogador. Para um melhor entendimento, suponhamos que dois crimonosos tenham sido capturados pelo mesmo crime, e fiquem presos separadamente sem possibilidade de comunicação.

Aos prisioneiros, são ofericidas duas escolhas: confessar ou negar o crime. Se ambos negarem, serão presos por um ano. Se ambos confessarem, serão presos por três anos. Mas no caso de um deles confessar e o outro negar, o prisioneiro que confessar será libertado imediatamente, enquanto o que negar será condenado a uma pena de 10 anos. As técnicas de análise da teoria dos jogos podem levar um prisioneiro a trair o outro, mas curiosamente, o melhor resultado para ambos os prisioneiros seria uma colaboração mútua. Obtem-se, da cooperação de ambos, um resultado de equilíbrio. Esse equilíbrio que buscamos como solução para o caso acima, é o chamado equilíbrio de Nash. Nos capítulos a seguir, veremos como obter este equilíbrio, bem como encontrar o melhor resultado para o dilema do prisioneiro.

Capítulo 2

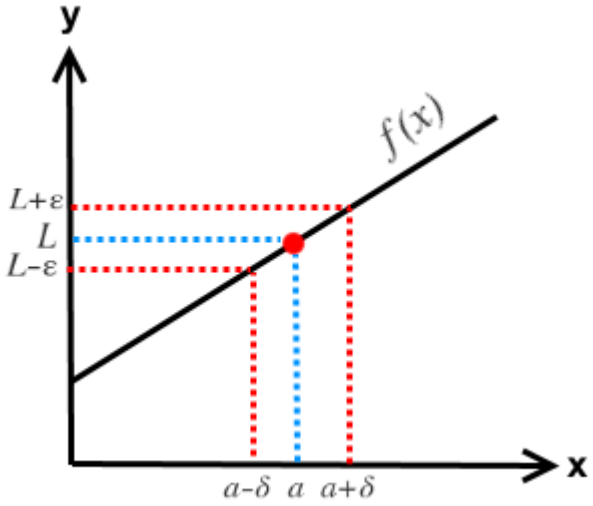
PRELIMINARES

Neste capítulo irei fazer uma abordagem de algumas definições que irão ajudar a ter um entidimento sobre o teorema do equilibrio de Nash.
a primeira definição que vamos fazer será sobre os limites de uma função em seguida vamos definir as funções contínuas e mostrar alguns exemplos , por fim vamos demonstrar o o teorema de Rolle e utiliza-lo para a demonstração do teorema do valor médio.

2.1 Limite de Uma Função

Na matemática a definição de limite é utilizada para determinar o comportamento de uma função ¡ medida que ela se aproxima de alguns valores. O limite de uma função possui grande importância no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática, definindo derivadas e continuidade de funções. A utilização de limites ajuda na compreensão de diversas situações envolvendo funções, através de pontos notáveis como mínimo e máximo ou até mesmo os pontos de intersecção entre funções, a continuidade de funções também utiliza as noções de limites, bem como os problemas envolvendo séries numéricas convergentes ou divergentes.
Seja uma função $y = f(x)$ definida sobre algum intervalo aberto que contenha o número a, mas não obrigatoriamente essa função necessita estar definida nesse ponto a. Podemos dizer então que, o limite de $f(x)$ vale L quando x se aproxima, ou quando x tende ao número a e representamos essa afirmação por $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, para todo nÃºmero $\varepsilon > 0$, existir um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
Note que em nenhum momento dessa definição é mencionado algo sobre o valor da função quando $x = a$, ou seja, não é necessário que a função esteja definida em a, pois o que importa no limite é o que acontece com o valor de $f(x)$ nas proximidades do número a tanto pela direita quanto pela esquerda.
Estudando a definição formal de limite: A definição formal de Limites diz que se conseguirmos fazer $|x - a|$ tão pequeno quanto possível e $|f(x) - L|$ também tão pequeno quanto possível, mas maiores que zero e pudermos associar essas diferenças por meio de uma relação, então existirá o limite L da função f(x) quando x tende ao número a.

Em outras palavras se pudermos atribuir um valor "μ" maior que zero de modo que exista um valor correspondente "Δ também maior que zero então: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ Observe a função f(x) representada no gráfico abaixo:



Interpretação geométrica da definição formal de Limite

fonte: wikipédia.

Perceba que se pudermos relacionar "μ" em função de "Δ, então para qualquer intervalo no eixo x próximo de a podemos fazer um intervalo no eixo y próximo de L, ou seja, f(x) tende a L quando x tende a a se fizermos "μ" e "Δ tão pequenos quanto possível, porém maiores que zero, e se pudermos encontrar uma relação entre "μ" e "Δ.

2.2 Funções Contínuas

Um conceito fundamental no cálculo, no que diz respeito ao estudo de funções, é o de continuidade de uma função num ponto de seu domínio. O domínio da função é constituido por todos os pontos de um intervalo , e observamos que, para todo, $a \in I$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Dizemos que a função é contínua em todo ponto de seu domínio. Ou, simplesmente, que a função é contínua. Embora o conceito de continuidade possa ser dado sem o auxílio de limites, o conceito de limite será usado para definir com mais cuidado o significado da continuidade de uma função. Ao definir Lim f(x) quando $x \longrightarrow a$, analisamos o comportamento da função f(x) para valores de x próximos de a, mas diferentes de a. Vimos que Lim f(x) pode existir, mesmo que f não esteja definida no ponto a. Se f está definida em x=a e Lim f(x) existe, ainda pode ocorrer que este limite seja diferente de f(a). Uma ideia muito simples de função real contínua é a de uma função que possa ser traçada em uma folha sem retirar a caneta do papel. Caso se interrompa o gráfico da função e se comece em outro local do papel, ocorre uma "descontinuidade". Em contextos avançados, observa-se que este critério é errado, mas para o momento tal análise é suficiente. Na sequência, mostramos um gráfico de uma função f contínua (sem interrupção) e um gráfico de uma função g descontínua com uma série de problemas.

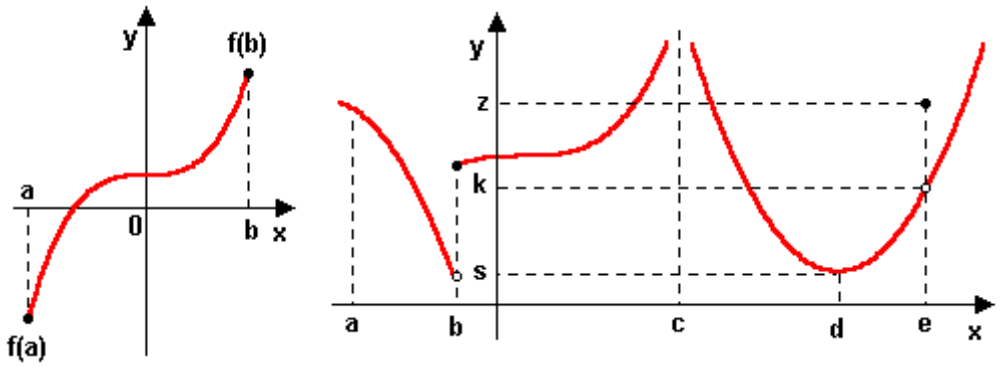


Imagem de uma função contínua e função descontínua

Capítulo 3

TEOREMA EQUILÍBRIO DE NASH

Para a fazermos a demonstração do teorema equilíbrio de Nash, vamos precisar fazer antes algumas demonstrações de outros teoremas que nos ajudarão a chegar em um resultado com um bom entendimento. Mas antes de começarmos a falar desses teoremas cabe uma definição sobre o equilíbrio de Nash. Este equilíbrio representa uma situaçã de um jogo envolvendo dois ou mais jogadores, em que cada jogador, após tomar sua decisão, não poderá mudá-la para melhorar sua situação no jogo.
Assim podemos iniciar as demonstrações dos teoremas que nos ajudarão na prova do equilíbrio de Nash. O primeiro teorema no qual vamos falar é o teorema do valor médio, logo depois em outra sessão estaremos exibindo a demonstração do teorema do ponto fixo de Brouwer, por fim partiremos para a demonstração do equilíbrio de Nash.

3.1 Teorema do valor médio

O Teorema do Valor Médio foi formulado pela primeira vez por Lagrange. A importância desse teorema deve-se ao fato dele estabelecer uma relação importante entre a função e sua derivada. Basicamente, ele garante o seguinte: supondo que a função f é derivável e, sendo dados dois pontos (a,f(a)) e (b,f(b)) do gráfico de f, existe pelo menos um ponto c, tal que $a < c < b$, de modo que a reta tangente ao gráfico de f traçada pelo ponto (c,f(c)) é paralela á reta que passa por (a,f(a)) e (b,f(b)).
É preciso observar que o Teorema do Valor Médio não garante a unicidade do ponto c.
Para isso iremos precisar do resultado de um outro teorema conhecido como teorema Rolle, que nos dará a garantia da unicidade do ponto c.
Teorema de Rolle: dada uma função continua f definida num intervalo fechado [a,b] e diferenciável em (a,b), se $f(a) = f(b)$, então existe um ponto c em (a,b) onde a tangente ao gráfico f é horizontal, isto é:

$$f'(c) = 0 \tag{3.1}$$

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que, se f é uma função constante para todo x no intervalo [a,b], então $f'(x) = 0$ no interior do intervalo. Logo, c pode ser qualquer ponto do intervalo]a,b[.

Suponhamos então que f é uma função não constante em [a,b].

Como f, por hipótese, é contínua no intervalo fechado, então, pelo Teorema de Weierstrass, existem x_1 e x_2 em $[a, b]$, tais que $f(x_1)$ e$f(x_2)$ são, respectivamente, os valores de máximos e mínimos de f em [a,b]. Como, uma vez que f é não constante em [a,b], segue que x_1 ou x_2 é interior ao intervalo [a,b]. Logo $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$. Portanto, existe um ponto c interior ao intervalo, tal que $f'(c) = 0$.

Demonstrado o teorema de Rolle, vamos demonstrar o teorema do valor médio ou teorema de lagrange como também é conhecido.

Teorema do valor médio: Dada uma Função contínua f definida em um intervalo fechado [a,b] e diferenciável em (a,b), existe um ponto c em (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{3.2}$$

Demonstração: Seja $g : [a, b] \longrightarrow \Re$, a função definida por:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a).$$

Então g também é uma função continua em [a,b] e derivável em (a,b). Além disso, temos que $g(a) = g(b) = 0$. Logo, pelo teorema de rolle, existe algum ponto c pertencente a (a,b) tal que g'(c)=0. Mas $g'(c) = 0 \leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

logo: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Geometricamente, significa que a tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa c é paralela á secante que passa pelos pontos de abscissas a e b.

3.2 Teorema do ponto fixo de Brouwer

Define-se ponto fixo de uma função, como sendo um ponto do domínio desta função que não se altera pela sua aplicação, isto é, $x \in A$ é dito ponto fíxo de uma função $f : A \to A$ se $f(x) = x$. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é também conhecido como teorema de existência, claro que com algumas condições. O teorema pode assegurar a existência de uma raiz para a função $f(x) = x$. Equivalente a função (3.2) mostrada anteriormente.

Teorema do ponto fixo de brouwer: Seja B um conjunto compacto e convexo e $f : B \longrightarrow B$ uma aplicação continua, nestas condições existe pelo menos um ponto $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração: Provaremos o teorema no caso em que B é uma bola fechada e tomando como fato a seguinte proposição. Se B é compacto então não existe nenhuma aplicação continua $f : B \longrightarrow \lambda B$ tal que $f \mid \lambda_B = id \mid \lambda B$

Suponhamos por contradição, que existe uma aplicação continua $f : B \longrightarrow B$ tal que f não possui nenhum ponto fixo, ou seja, $f(x) \neq x$ para todo $x \in B$. Definimos então $g : B \longrightarrow \lambda B$ da seguinte maneira. G(x) é igual a interseção com λB do segmento de reta que começa em f(x) e passa por x. Intuitivamente vemos que g é continua e se $x \in \lambda B$, vale que $g(x) = x$. Então g é continua e $g : B \longrightarrow \lambda B$ tal que

$g \mid \lambda_B = id \mid \lambda_B$, o que é uma contradição pelo fato acima. Assim concluimos a demonstração do teorema do ponto fixo de brouwer.

3.3 Teorema Equilíbrio de Nash

Já que concluimos a demonstração dos dois teoremas citados acima, vamos para a demonstração do teorema equilíbrio de Nash.

Definição: Todo jogo finito, isto é, com finitos jogadores e um conjunto compacto e convexo de estratégias, tem uma solução em estratégias mistas.

Mais importante para o nosso trabalho é termos estratégias contínuas que podem representar preços, decisões de produção ou qualquer outra situação em que os resultados indivíduais dependam das decisões de outros jogadores.

Exemplo: Dado um jogo com dois participantes, "A"e "B"ambos escolhem estratégias no intervalo [0,1]. assim

$$I_A = [0,1] \text{ e } I_B = [0,1]$$

o dominio $I_1 x I_2$ é dado pelo quadrado compacto de lado 1.O bem estar ou utilidade de cada jogador é dado pelas funções

$$U_A : I_A x I_B \to \Re \text{ e } U_B : I_A x I_B \to \Re.$$

Como vimos no capítulo anterior, o jogador para ter o bem estar dependerá não somente das decisões dele, como também das decisões tomadas pelos outros jogadores. Assim, a parti das funções utilidades, podemos definir φ tal que.

$$\varphi_A : I_A \to I_B \text{ e } \varphi_B : I_A \to I_B$$

Sendo funções que, uma vez tomada as decisões de um dos jogadores, φ_i leva o outro a tomar uma decisão que possa maximizar sua utilidade.

Exemplo: φ_1 leva x_1^* em um único x_1' que maximize a utilidade do jogador A, de tal forma que, o ponto $(\varphi_1(x_2^*), x_2^*)$ será dado por:

$$U_A(x_1', x_2^*) \geq U_A(x_1, x_2^*) \forall_{x1} \in I_A$$

e, que será equivalente ao ponto $(x_1^*, \varphi_2(x*_1))$ dado por:

$$U_B(x_1^*, x_2') \geq U_B(x_1^*, x_2) \forall_{x2} \in I_B.$$

verificando de tal forma que x_i' é a melhor estratégia escolhida á disposição do jogador i, dado que o outro jogador tenha feito a escolha da estratégia x_k^*.

Considerando o produto $\varphi_A x \varphi_B$, teremos uma aplicação da seguinte maneira:

$$\varphi : I_A x I_B \to I_A x I_B \tag{3.3}$$

que leva o ponto (x_1^*, x_2^*) no ponto $(\varphi_A(x_2^*), \varphi_B(x_2^*))$. O equilíbrio de Nash será dado pelos pontos fixos desta aplicação. Assim se obtermos um ponto fixo da aplicação $\varphi_A x \varphi_B$, encontraremos a existência de um equilíbrio de nash.

Teorema equilíbrio de Nash: Dizemos que um perfil de estratégias $S = x_1, ..., x_i, ..., x_n \in I_n$ é um equilíbrio de Nash se, para todo i ocorrer que: $U_i(x^*_{-i}, x^*_{-i}) \geq U_i(x_i, x^*_{-i})\ \forall x_i \in I_i$ em que -i representa todos os outros jogadores exceto i.

Demonstração: Em nossa demonstração faremos uma hipótese adicional, a concavidade na própria estratégia, que facilitará a compreensão dos passos da demonstração e não irá comprometer o resultado final que é a existência do equilíbrio de Nash. Adotaremos algumas condições para as funções φ_i, para que sejam realmente funções bem definidas. Para termos a boa definição de φ_i, as funções utilidades U_A e U_B devem ser contínuas, pois pelo teorema de weirtrass temos que existem pontos que maximizem $U_A(\cdot, x_2^*)$ e $U_B(x_1^*, \cdot)$, já que os intervalos I_A e I_B são compactos. Porém, a continuidade das funções utilidades por si só não é o bastante para afirmar que cada função φ_i seja função bem definida, pois podem existir n pontos que maximizem φ_i nos intervalos dados. Buscaremos, então, uma condição que garanta um único ponto máximo de utilidade. Esta condição é a concavidade das funções utilidades em cada estratégia. como foi dito anteriormente, a demonstração de Nash não tem está condição como pré-requisito, mas para nosso objetivo, ela é altamente válida e simplificadora.

Nos termos formais de um jogo, definidos anteriormente, isso quer dizer que, após fixados as escolhas de todos os outros jogadores "-i " como foi considerado, a função $U(x_i, x'_{-i}) : I_i \to \Re$ que relaciona unicamente a escolha do jogador i com sua utilidade deve ser côncava em I_1.

Observe nos dois grafícos os casos extremos:

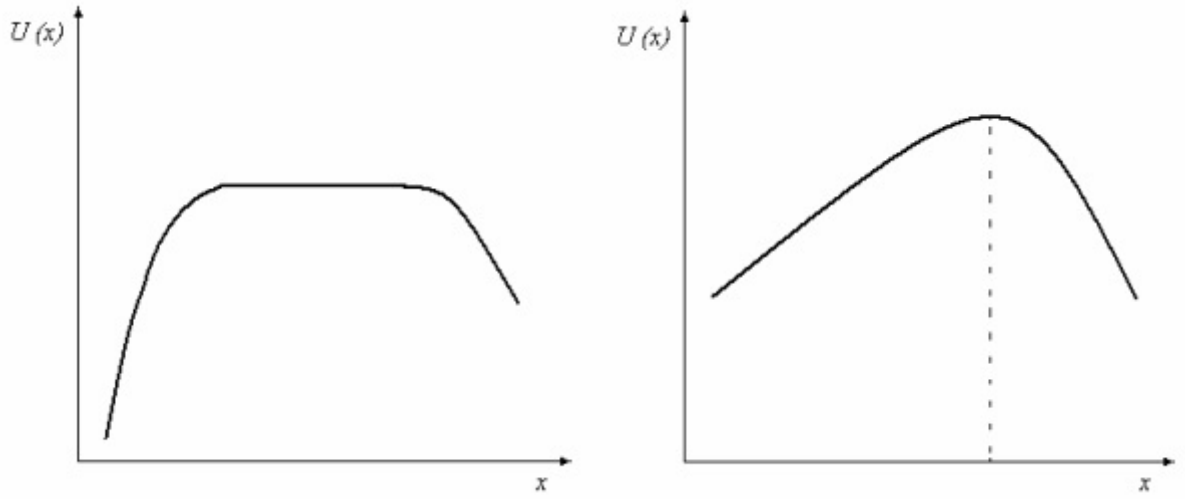


Imagem de uma função com infinitos máximos e um único máximo respectivamente

Fonte: Pedro Henrique.

Podemos facilmente provar que a concavidade implica na unicidade do ponto máximo, demonstrando que se existissem dois máximos, por exemplo, em um certo intervalo, a função não poderia ser côncava nesse mesmo intervalo.

Seja $xey \in I$, com $x \neq y$, ambos pontos máximos de $f : \Re \to \Re$ em I, assim

$$f : f(x) = f(y) \geq f(z) \forall_z \in I$$

Dado $t \in [0, 1]$, da definição de concavidade estrita afirmamos que

$$f(t.x + (1 - t)y) > t.f(x) + (1 - t).f(y)$$

Como por hipótese f(x)=f(y) e x e y são máximos, então chegamos a um absurdo, já que a equação acima nos mostra que uma média ponderada qualquer de x e y possui imagem no valor maior que f(x)=f(y). Logo f so pode possuir apenas um único ponto máximo em I, caso f seja côncava.

Para garantir a concavidade, vamos supor que a segunda derivada de U_i seja negativa no intervalo [0,1], uma vez fixada a escolha do outro jogador.

Vamos utilizar o teorema do valor médio mostrado anteriormente, para provar que $f'(x) < 0$ implica em concavidade.

Suponhamos que

$$f : \Re \to \Re \text{ tal que } f'(x) < 0 \forall_x \in [a, b]$$

sabemos que f só será côncava se

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

ou seja, f é côncava se estiver localizada na reta que tangencia f no ponto a, como mostra a figura a seguir de uma função f qualquer:

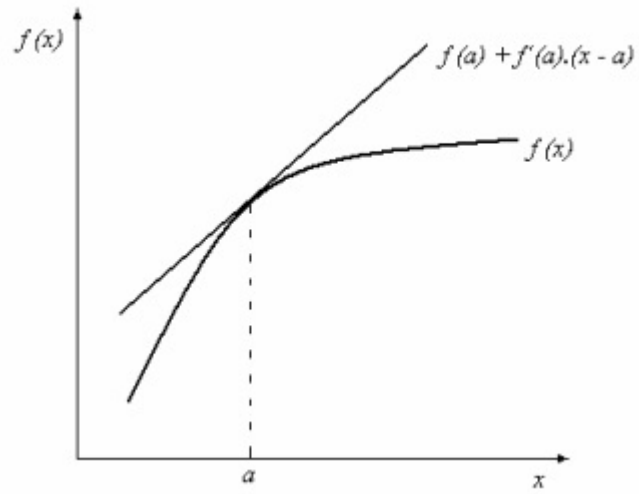


Imagem de uma função f qualquer

Fonte: Pedro Henrique.

Utilizando o teorema do valor médio, temos a garantia de que existe um $z \in [a, b]$ tal que

$$f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

De fato, considerando $f|_{(a,x]}$. Pelo teorema do valor médio

$$\exists z \in (a, x) \text{ tal que } f'(z) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

manipulando a equação obtemos

$$f(x) = f(a) + f'(z) \cdot (x - a)$$

Temos por hipótese que $f' < 0$ e $z > a$, então podemos afirmar que $f(z) < f(a)$. Assim

$$f(x) = f(a) + f(z) \cdot (x - a) < f(a) \cdot (x - a.)$$

portanto, f é côncava.

Após estabelecida as condições para a existência das funções φ_i, vamos trabalhar na necessidade de sua continuidade. Para isso vamos utilizar as hipóteses que construimos as funções φ_i, como demonstramos, elas sempre serão contínuas. Utilizando agora a notação x_A e y_B, no caso da função φ_A, temos: $\varphi_A(y^*) = x' \in I_A \mid U_A(x', y^*) \geq U_A(x, y^*) \forall_x \in I_A$ Afirmamos que $\varphi_A : I_B \to I_A$ é contínua.

Vamos supor por contadição que $\varphi_A : I_B \to I_A$ não é contínua, então vai existir uma sequência $y_n \in I_B$ tal que

$$y_n \to Y \text{ mas } \varphi_A(x_n) \text{ não tende a } \varphi_A(x)$$

Tomando uma subsequência y_k de y_n temos que $\varphi_A(y_k) \to x$ tal que x não é maximizante.

Contudo, concluimos que $U_A(\varphi_A(y), y) \geq U_A$ e também que $U_A(\varphi_A(y), y_n) \to U_A(\varphi_A(y), y)$, já que $U_A : I_A x I_B \to \Re$ é contínua. Logo vemos que, para n suficientemente grande temos

$$\varphi_A(\varphi_A(y), y_n) \to U_A(\varphi_A(y), y) \text{ e } U_A(\varphi_A(y_k), y_k) \to U_A(x, y), \text{ com } U_A(\varphi_A(y), y) \geq U_A(x, y),$$

o que é um absurdo, já que construimos a função φ_i como uma função maximizadora. O mesmo serve para φ_B. Logo, φ_i são funções contínuas.

Uma vez garantida a existência e continuidade de $\varphi_A x \varphi_B$, precisamos garantir a existência de um ponto fixo para $\varphi_A x \varphi_B$, ou seja, do equilíbrio de Nash.

Utilizaremos o teorema do ponto fixo de brouwer, demonstrado anteriormente para garantir o equilíbrio de Nash.

Como no âmbito de jogo o domínio $I_A x I_B \to I_A x I_B$ é contínua, pois é o produto de duas funções contínuas φ_A e φ_B, podemos pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, afirmar que existe um ponto $\bar{x} \in I_A x I_B$ tal que $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$, ou seja, concluimos que existe um equilíbrio de Nash.

Agora que já demonstramos o teorema do equilíbrio de Nash, vamos avançar nossos estudos para o próximo capítulo, onde vamos fazer a aplicação do teorema na área da Economia, Biologia e encontrar o melhor reasultado para o dilema do prisioneiro.

Capítulo 4

APLICACÕES DO EQUILÍBRIO DE NASH

4.1 Aplicação na Econômia

Jogo Publicitário: Os economistas sempre tiveram meios de subsistência na teoria dos jogos, eles tem usado a teoria para analisarem um grande leque de fenômenos econômicos, entre eles leilões, barganhas, oligopólios, formação de redes sociais e sistemas de votação. As pesquisas feitas tem como foco um conjunto particular de estratégias conhecida como equilíbrio no jogo. Um conjunto de estratégias é um equilíbrio de nash se cada uma representar a melhor resposta para as outras estratégias. A estratégia começa com uma visão de futuro para a empresa e implica na definição clara do seu campo de visão, buscando prever possiveis reações para as ações empreendidas que a levará ao crescimento. A teoria dos jogos interage com a economia a fim de encontrar estratégias racionais para situações em que o resultado depende não só da estratégia de um agente, mas também das estratégias escolhidas por outros agentes que claramente terão estratégias diferentes e objetivos equivalentes. Com o jogo publicitario não é diferente. Os jogadores são agentes econômicos que tomam decisões. Podem ser consumidores buscando maximizar seus lucros ou consumidores buscando maximizar sua satisfação no mercado. Neste jogo entre empresas, verifiquemos os produtos similares fabricados por ambas. O lucro vira das decisões tomadas por cada uma das empresas, sendo que a decisão de uma dependerá da decisão da outra. tomando duas empresas de quaisquer do ramo de venda, podemos verificar três situações direta das opções das fabricantes.

1) Ambas não fazem publicidade; Assim dividirão o mercado entre sí e terão lucro 4.

2) Ambas fazem publicidade; Também dividirão o mercado entre sí, mas os lucros serão menores, pois cada uma vai gastar com a publicidade, assim terão lucro 3.

3) Uma empresa anuncia e a outra não; A que empresa que anunciou vai atrair clientes da outra, neste caso a empresa que anunciou terá lucro 5 e a outra um lucro 2.

Mostraremos na tabela a seguir as decisões tomadas pelas duas empresas.

A.B	Faz public.	Não faz public.
Faz public.	(3;3)	(2;5)
Não faz public.	(5;2)	(4;4)

A tabela acima apresenta o lucro das duas empresas após tomada as decisões de custos de publicidade ou não. Neste caso das empresas a publicidade é a estratégia dominante para cada uma delas. Assim, ambas optam por anunciar, apesar de que ficariam em melhor situação se nenhuma das duas fizesse publicidade.

É importante observamos que a falta de cooperação é um problema não só das empresas envolvidas, mas sim da sociedade como um todo. O equilíbrio de Nash é um equilíbrio não-cooperativo, ou seja, cada empresa toma suas decições visando sempre obter o maior lucro possível.

Portanto, as duas fazendo propaganda, estarão em um equilíbrio de Nash.

4.2 Aplicação na Biologia

Teoria da evolução: Todos nós evoluimos, de acordo com o processo conhecido como seleção natural científica.

Um gene sozinho não consegue construir partes de seu corpo, portanto é necessário á cooperação de outros genes e também do meio externo.

Para cada espécie, um número de descendentes é deixado, onde alguns sobrevivem mais do que outros, devido a sua adaptação mais rapida. Assim tem maior êxito reprodutivo.

Diferente da econômia os jogos na biologia são vistos como uma medida de adaptação, porém o foco está menos voltado para o equilíbrio, e sim para aquilo que pode ser mantido pelas forças evolucionárias. Este equilíbrio é bem conhecido na biologia como Estratégias Evolucionárias Estáveis (EEE), criado por john maynard smith.

embora as EEE não tenha feito nenhuma relação com o equilíbrio de Nash, cada EEE esta em um equilíbrio de Nash.

Podemos fazer a aplicação do equilíbrio de Nash de modo que , dois animais (gavião e pombo), estejam competindo, como que pedaço de comida será dividido entre eles. Ambos podem optar por duas ações em seus comportamentos.

O primeiro comportamento é o agressivo e o segundo comportamento é o passivo. Assim podemos analizar as possiveis escolhas dois animais a seguir.

Tomando dois animais um gavião e um pombo analizaremos as escolhas que podem ser feitas pelos animais com um total de alimentos igual 6.

- Ambos passivos: Repartem os alimentos uniformemente, em partes iguais, ou seja, 3 para cada

-Um agressivo e o outro passivo: Ficam com 5:1, ou seja, haverá um com mais alimentos que o outro.

-Ambos agressivos: Destroem o alimento para ambos.

Para melhor visualizar as decisões de cada um, iremos fazer uma tabela da seguinte maneira:

Gavião,Pombo	Agressivo	Passivo
Agressivo	(0;0)	(1;5)
Passivo	(5;1)	(3;3)

Neste caso, temos dois equilíbrio de Nash dado por (5,1) e (1,5) pois não é possivel prever qual equilíbrio será usado.

O jogo gavião e pombo é um jogo de anti-coordenação, pois ambos os participantes podem jogar diferentes estratégias e rivalizam os recursos entre si.

4.3 Dilema do prisioneiro

Como foi dito anteriormente no capítulo 1, o dilema do prisioneiro é um jogo de soma não zero, que surge na situação de dois criminosos sendo presos pelo mesmo crime cometido. Ficam em celas separadas e sem possibilidades de comunicação. Aos presos é feita as seguintes propostas: Confessar ou Negar. As escolhas feitas pelos prisioneiros tem as seguintes consequências.

Ambos confessam: Serão presos por 3 anos;

Ambos negam: Serão presos por 1 ano;

Um nega e o outro confessa: O que negou o crime será preso por 10 anos, enquanto que o prisioneio que confessou será libertado imediatamente;

Temos então a seguinte tabela de resutados.

$P_1; P_2$	Confessar	Negar
Confessar	(-3,-3)	(0,-10)
Negar	(-10,0)	(-1,-1)

O dilema do prisioneiro, portanto, é trair o companheiro ou não trair.

Tendo em vista que o acordo que trará mais beneficio seja o de negar o crime, o receio que cada crimonoso tem de que o outro encarcerado posssa tesmunhar tente a fazer com que o ambos os crimonosos acabem traindo um ao outro.

Contudo, confessar o crime é uma estratégia dominante para ambos os prisioneiros. Seja qual for a decisão do outro prisioneiro, podem reduzir sempre sua sentença confessando. Assim o ponto (Confessar,Confessar) representa um equilíbrio de Nash. Para que isso fique bem claro, faremos uma análise do ponto de vista de ambos os prisioneiros.

Ambos racionam da seguinte maneira.

O outro prisioneiro pode assim como eu, confessar ou negar o crime. Se ele confessar, o melhor que tenho a fazer é confessar também, já que ficarei por 3 anos em vez de 10 anos. Mas se ele negar, o melhor para mim, continua sendo confessar o crime, pois assim estarei livre da prisão. Em ambos os casos, a melhor escolha que tenho a fazer é confessar o caso, portanto, eu confessarei. Neste caso, ambos os prisioneiros se forem racionais, pensarão dessa maneira, assim ficariam presos por 3 anos.

O resultado do dilema dos prisioneiros nos permite fazer algumas observações muito interessantes. Não é difícil perceber que o ponto de equilíbrio de Nash não é eficiente no sentido de Pareto, isto é, existe uma maneira de melhorar a situação de um dos prisioneiros sem piorar a situação do outro. De fato, o equil 'ibrio é o único que não é ótimo de Pareto! Na verdade, dentre as escolhas existe uma forma de melhorar a situação de ambos os jogadores concomitantemente. Se ambos cooperarem se deslocando para o ponto (Negar, Negar) terão dois anos a menos de pena. Mas isso não ocorre pelo fato de que o ponto (Negar, Negar) não obedece á racionalidade. Estando nesse ponto, os dois terão um incentivo enorme a confessar o crime: sua liberdade. A desconfiança os leva a confessar o crime.

4.4 Tabelas

A.B	Faz public.	Não faz public.
Faz public.	(3;3)	(2;5)
Não faz public.	(5;2)	(4;4)

tabela de resultados do jogo publicitário

Gavião,Pombo	Agressivo	Passivo
Agressivo	(3;3)	(1;5)
Passivo	(5;1)	(0;0)

tabela de resultados do jogo Gavião x Pombo

$P_1; P_2$	Confessar	Negar
Confessar	(-3,-3)	(0,-10)
Negar	(-10,0)	(-1,-1)

tabela de resultados do dilema do prisioneio

Citações

> "O importante é não parar de questionar. A curiosidade tem sua própria razão para existir. Uma pessoa não pode deixar de se sentir reverente ao contemplar os mistérios da eternidade, da vida, da maravilhosa estrutura da realidade. Basta que a pessoa tente apenas compreender um pouco mais desse mistério a cada dia. Nunca perca uma sagrada curiosidade". Albert Einstein

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho, abordamos situações relacionadas a teoria dos jogos e suas aplicações, bem como o seu contexto histórico. A teoria dos jogos é um ramo da matemática que estuda situações de conflitos, tomada de decições e desenvolvimento de estratégias, que surpreende a cada nova aplicação. Esta aplicação que falamos, foi dada pelo matemático Jonh Forbes Nash, conhecida como equilíbrio de nash. A aplicação visa sempre buscar uma solução ótima para os diversos tipos de decisões em determinados jogos. A teoria dos jogos e o equilíbrio de nash mostram como é importante o estudo do comportamento humano na hora de tomar uma decisão e o quanto é relevante o trabalho em equipe em situações de risco, como foi o caso do dilema do prisioneiro. Contudo, Nash utilizou a matemática como ferramenta principal desse estudo e a teoria dos jogos para reformula-la e fazer com que houvesse uma revolução mundial nos estudos da economia, biologia e outras áreas.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon Lages "Análise Real, volume 1,

Funções de uma Variável: IMPA, 2014

[2] M. Shubik, "Teoria de juegos en las Ciencias sociales - Conceptos y Soluciones", Textos de Economia do Fondo de Cultura Econômico.

[3] Dawkins.Richard *O Gene Egoísta, Biologia Evolutiva*, ed. Gradiva. Inc., 1989.

[4] Nash,John *"Equilibrium points in n-person games"1950*

[5] Neumann,Von and Morgenstern,Oskar *"Theory of games and Economic Behavior"(1944). Deluxe edition*